

最大エントロピー原理 (MEP) を用いた方向スペクトルの推定

小 舟 浩 治*・橋 本 典 明*

1. ま え が き

海面を伝わる波浪は、種々の方向に伝わる波の重ね合せとして表現される。このため、詳細に波浪現象を記述するためには、一次元スペクトルでは不十分であり、二次元の方向スペクトルを求める必要がある。方向スペクトルを推定する方法としては、観測手法に応じて種々の方法が提案されている。例えば、実用に適している定点計測データから方向スペクトルを推定する方法として、DFT 法¹⁾、パラメータ法²⁾、MLM³⁾、EMLM⁴⁾ などがある。この内、EMLM は波高計群ばかりでなく、流速計や傾斜計等の混ざった任意の計測器の組合せに適用でき、しかも分解能が高く、今後、現地波浪データ解析に広く普及してゆくものと思われる。しかしながら、EMLM を種々の場合に適用してみると、例えば、方向スペクトルのエネルギーが 0 の領域にも、いくらかのエネルギーが存在したり、あるいは、エネルギーのピーク付近で、やや小さめのエネルギーを与える等、精度のみを問題にすると、まだ検討すべき余地がある。したがって、ここでは上記問題点を解消し、さらに推定精度を高めるために、不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理 (MEP)^{5),6)} から方向スペクトルの推定を行なった。ここに示す方法は、EMLM と同様に任意の計測器の組合せに適用可能な形に拡張可能であろうが、ここでは、簡便かつ実用的な、波高計と流速計、あるいは加速度計と傾斜計の組合せなどの 3 成分観測データ (以下、3 成分アレイと呼称する。) を対象として、方向スペクトルの推定式を定式化し、数値シミュレーションおよび現地観測データへの適用例により、その有効性を検討した結果について報告する。

2. MEP を用いた方向スペクトルの定式化

微小振幅の不規則波の水面変動、水面勾配、水面曲率、水圧変動などの任意の波動量間のクロス・パワースペクトル $\Phi_{mn}(\sigma)$ と、波数・周波数スペクトル $S(k, \sigma)$ の関係は、磯部ら⁴⁾と同様な表示を行なえば、

$$\Phi_{mn}(\sigma) = \int_k H_m(k, \sigma) H_n^*(k, \sigma) \times \exp \{-ik(x_n - x_m)\} S(k, \sigma) dk \dots (1)$$

と表示される。ここに、 x : 平面座標、 k : 波数、 σ : 角周波数、 i : 虚数単位、 $*$ は共役複素数である。また、 $H_m(k, \sigma)$ は水面変動から任意の波動量への伝達関数であり、一般に次のように書ける⁴⁾。

$$H_m(k, \sigma) = (\cos \theta)^{\alpha_m} (\sin \theta)^{\beta_m} h_m(k, \sigma) \dots \dots \dots (2)$$

式 (2) 中の h_m , α_m , β_m を主な波動量に対して示したものが表-1 である。

ここで、例えば、ブイに搭載された計測器、あるいは同一地点に設置された波高計と流速計の組合せなどのように、 $x_m = x_n$ の場合を対象とし、さらに座標変換 (k, σ) $\rightarrow$ (f, θ) を行くと、式 (1) は次式のようになる。

$$\frac{2\phi_{mn}(f)}{h_m(f)h_n^*(f)S(f)} = \int_0^{2\pi} G(\theta|f) (\cos \theta)^{\alpha_m + \alpha_n} (\sin \theta)^{\beta_m + \beta_n} d\theta \dots (3)$$

ここに、 $S(f)$: 周波数スペクトル、 $G(\theta|f)$: 周波数 f における方向分布関数、であり、

$$S(f, \theta) = S(f)G(\theta|f) \dots \dots \dots (4)$$

の関係が成立するものとする。

例えば今、3 成分アレイとして水面変動 η 、2 成分水面勾配 η_x および η_y を測定したとする。この場合、式 (3) より次の関係式が求まる。

表-1 主な波動量の水面変動に対する伝達関数⁴⁾

項 目	記 号	$h_m(k, \sigma)$	α_m	β_m
水 面 変 動	η	1	0	0
水 圧 変 動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\sigma^2$	0	0
水面勾配 (x)	η_x	ik	1	0
" (y)	η_y	"	0	1
水粒子速度 (x)	u	$\sigma \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	v	"	0	1
" (z)	w	$-i\sigma \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

k : 波数、 σ : 角周波数、 d : 水深、 z : 底面からの高さ、 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度。

* 正会員 工修、運輸省港湾技術研究所海象観測研究室

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) \alpha_i(\theta) d\theta = \beta_i \quad (i=0, 1, \dots, 4) \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(\theta) &= 1, \quad \alpha_1(\theta) = \cos \theta, \quad \alpha_2(\theta) = \sin \theta \\ \alpha_3(\theta) &= \cos 2\theta, \quad \alpha_4(\theta) = \sin 2\theta \\ \beta_0 &= 1, \quad \beta_1 = Q_{12}(f) / \{k C_{11}(f)\} \\ \beta_2 &= Q_{13}(f) / \{k C_{11}(f)\} \\ \beta_3 &= \{C_{22}(f) - C_{33}(f)\} / \{k^2 C_{11}(f)\} \\ \beta_4 &= 2C_{23}(f) / \{k^2 C_{11}(f)\} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

ここに、 $C_{ij}(f)$, $Q_{ij}(f)$ はそれぞれ、 $(\eta, \eta_x, \eta_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ とした場合のコ・スペクトルおよびクオドラチャ・スペクトルである。3成分アレイとして、他の波動量を計測する場合にも、式(5)と同様な関係式が求められる。

方向分布関数 $G(\theta|f)$ は非負、かつ

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta = 1 \dots (7)$$

であるから、 $[0, 2\pi]$ で定義される確率密度関数と考えることができる。このとき、エントロピーは次式で与えられる。

$$H = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta \dots (8)$$

確率密度関数 $G(\theta|f)$ が具備すべき条件は、式(5)で与えられている。したがって、式(5)を制約条件として、式(8)を最大にする $G(\theta|f)$ を求めれば、これが最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ となる。これは、式(5)で与えられる情報以外はできるだけ一様となる $G(\theta|f)$ を決定していることになる⁹⁾。

そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く。ラグランジュ関数は、

$$\begin{aligned} L = & - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta \\ & + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta \right\} \\ & + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left\{ \beta_i - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \alpha_i(\theta) d\theta \right\} \dots (9) \end{aligned}$$

で与えられる。 $\partial L / \partial G(\theta|f) = 0$ より $G(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ を求めると、

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta) \right\} \dots (10)$$

となる。すなわち、 $\exp$ の指数部がフーリエ級数の形となるが、3成分アレイの場合は $i=4$ で打ち切られる。ここに、 λ_i はラグランジュの未定乗数であり、式(10)を式(5)に代入して得られる次式

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \beta_i - \alpha_i(\theta) \right\} \exp \left\{ -\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta) \right\} d\theta = 0 \quad (i=1, \dots, 4) \dots (11)$$

なる非線型連立方程式を解くことによって決定される。また、 λ_0 は次式から計算される。

$$\lambda_0 = \ln \left[\int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta) \right\} d\theta \right] \dots (12)$$

以上をまとめると、式(11)の非線型連立方程式を解いて $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を求め、式(12)から λ_0 を算出して式(10)に代入すれば、 $G(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ が決定されることになる。

クローバー型ブイ⁷⁾ (6成分アレイ) によって得られる水面の鉛直加速度 η_{tt} 、水面勾配 η_x, η_y 、水面曲率 $\eta_{xx}, \eta_{yy}, \eta_{xy}$ を用いて方向スペクトルを算定する場合にも、上記の理論は容易に拡張できる。なお、式(5)において $i=0, 1, 2$ の3式のみを情報として取り入れる場合の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ は Borgman⁹⁾ により提案された円正規分布

$$G(\theta) = \exp \{ a \cos(\theta - \theta_0) \} / 2\pi I_0(a) \dots (13)$$

になる。

3. ラグランジュ乗数の算定

式(11)を λ_j に関して解くために、多変数の Newton-Raphson 法を採用した。すなわち、

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij} \varepsilon_j = B_i, \quad (i=1, \dots, 4) \dots (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^{2\pi} \{ \alpha_i(\theta) - \beta_i \} \alpha_j(\theta) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta) \right\} d\theta \\ B_i &= \int_0^{2\pi} \{ \alpha_i(\theta) - \beta_i \} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta) \right\} d\theta \\ \varepsilon_j &= \lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k, \quad (k, k+1 \text{ は計算ステップ数}) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

なる ε_j に関する連立方程式において、初期値 $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0)$ を与え、残差 ε_j について式(14)を解く計算を $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4)$ が十分小さくなるまで繰り返すことにより解 $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ の近似値を算出した。上式の計算によって近似解が求まらない場合、すなわち ε_j が発散する場合には、式(14)から求められた ε_j よりもさらに小さいきざみ幅で再計算を行なうこととした。なお、本論文で示す計算例は、すべて初期値を $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0) = (0, \dots, 0)$ とし、 $|\varepsilon_j| \leq 10^{-2}$ で収束したと見なして計算を打ち切っている。

4. 数値シミュレーション例

MEP を用いた方向スペクトルの推定精度を検討するために、数値シミュレーションを行なった。ここでは、磯部ら⁴⁾と同様に、 θ と f に関する方向スペクトルの分布が独立、すなわち式(4)が成立するものとし、任意の f に着目したとして、 θ に関する分布のみについて調べた。具体的手順は磯部ら⁴⁾と同様であり、光易型方向関数⁹⁾を用いて、真の方向スペクトル $S_\theta(\theta)$ を次式のよ

うに与えた。

$$S_{\theta}(\theta) = \sum_i D_i \cos^{2S_i} \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \dots\dots\dots (16)$$

双峯型の方向スペクトルに対しては、式 (16) の D_i , S_i , θ_i の値を変えた 2 種の方向スペクトルを重ね合わせて与えている。本計算例では 3 成分アレイとして、水面変動 η , 水面勾配 η_x , η_y を計測したとして、式 (1) によりクロス・パワースペクトルを計算し、2., 3. 章に述べた方法により、最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta)$ を計算した。

図—1 は単峯型の方向スペクトルの例であり、それぞれ $S=2, 5, 20$ の場合を示している。図中には、真の方向スペクトル、Longuet-Higgins らの解析法¹⁰⁾ による結果 (以下、LHM と呼称する.)、および EMLM による結果も併記した。なお、図の縦軸は真の方向スペクトルの最大値 $\max \{S_{\theta}(\theta)\}$ で無次元化して示している。いずれの場合にも、MEP による結果が最も推定精度が良い。エネルギーの方向集中度が大きいほど近似度は高く、 $S \approx 5$ では真の方向スペクトルとほぼ一致する推定結果となっている。しかしながら、種々の S を与えて計算した結果、 $S=22$ までは初期値として、 $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0) = (0, \dots, 0)$ としても、解 λ_i は容易に求められたが、 $S > 22$ では式 (14) の ϵ_j は発散した。この場合、適当な初期値を与えて計算したが、初期値の与え方により、 $S=35 \sim 40$ までは解 λ_i を求めることができた。初期値の与え方については、今後さらに詳細に検討する必要がある。

図—2, 3 は双峯型の方向スペクトルの例である。図—2

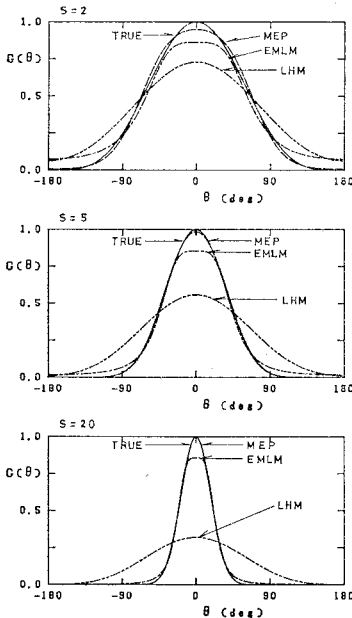
はうねりと風波が重畳している例として、 $D_1/D_2=0.5$, $S_1=100$, $S_2=10$ とし、二つの方向スペクトルの角度差を $\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ とした場合の計算例である。二つの方向スペクトルの角度差が大きいほど推定精度は良く、特に、 $\Delta\theta \approx 100^\circ$ では、他の方法では識別できなかったエネルギーの第 2 ピークを明確に識別している。しかしながら、エネルギーの大きい方向スペクトルを過大に、エネルギーの小さい方向スペクトルを過小に推定している。

図—3 は $D_1/D_2=1$, $S_1=S_2=20$ の同じ形の方向スペクトルを、角度差 $\Delta\theta=60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ と変えた場合の計算例である。図—2 の例に比べて、さらに推定精度は良い。

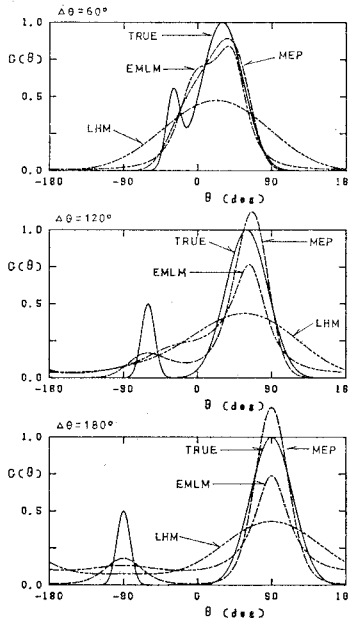
5. 現地観測データへの適用例

MEP を用いた方向スペクトル推定法の実測データへの適用性を検討するために、新潟西港の波浪観測データ (水深 22.7 m) を用いて解析を行なった。対象データは 1984 年 3 月 10 日～12 日に得られた水面変動データ (超音波式波高計) および流速データ (超音波流速計: 流速計受感部は海底から 1.5 m の高さ) であり、サンプリング周期 0.5 秒、毎偶数正時前後 10 分間を含む計 20 分間のデータを合計 36 ケース解析した。

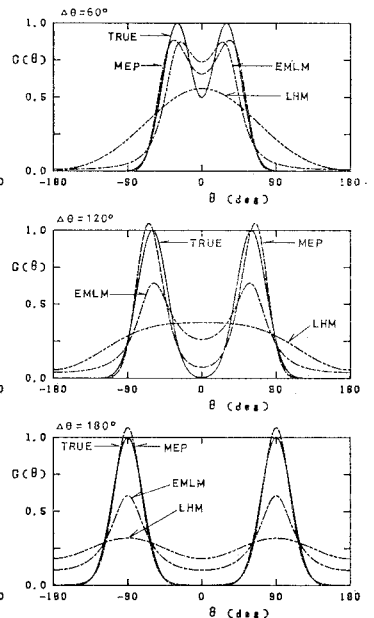
図—4, 図—5 は一方向波浪 ($H_{1/3}=3.47$ m) の解析例である。図—4 は各データ間の位相差およびコヒーレンスを示したものであり、周波数 $f=0.07 \sim 0.20$ (cps) の範囲で、ほぼ線型理論が成立している。図—5 は周波数



図—1 シミュレーション例 (単峯型方向スペクトル)



図—2 シミュレーション例 (双峯型方向スペクトル)



図—3 シミュレーション例 (双峯型方向スペクトル)

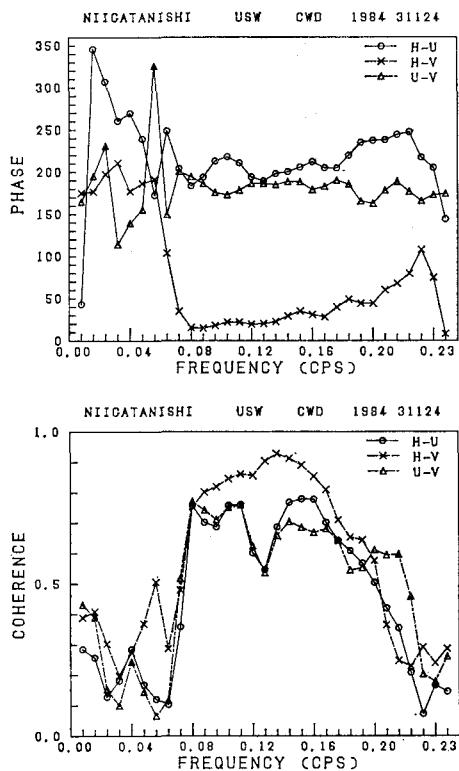


図-4 位相差およびコヒーレンス

別に方向分布関数を示したものである。コヒーレンスの低下している高周波数側および低周波数側で、EMLMとLHMとの差異が小さくなっている。しかしながら、MEPは他の方法に比べて、より明確にエネルギーの方

向分布特性を示している。これは雑音に埋れた信号の抽出という面で、MEPがEMLMよりも優れていることを示唆しているものと思われる。

図-6は二方向波浪($H_{1/3}=2.63\text{ m}$)の解析例であり、方向スペクトルの等値線図を示したものである。エネルギーの詳細な分布を描画するために対数変換を行い $\log S(f, \theta) = 0 \sim \max \{\log S(f, \theta)\}$ を15分割して描画した。MEPとEMLMの間には、詳細に見れば、いくらかの差異は認められるものの、大局的には差異はない。LHMも二方向波浪を識別しているものの、各周波数別に見ると、明確には一つのピークしか表現していない。

6. あとがき

方向スペクトルの推定式、特に3成分アレイを対象として、最大エントロピー原理(MEP)を用いた推定式を定式化した。数値シミュレーションおよび現地観測データを用いて、本方法と他の方法による結果との比較検討を行なった結果、本方法は非常に高い分解能を有し、EMLM等に見られた欠点も、ある程度修正することができるとわかった。また、今後の課題として式(11)を効率的に解く方法について、さらに検討する必要があることが示唆された。今後は、本方法をEMLMと同様に、任意のアレイの組合せに適用可能な形に拡張してゆく予定である。

最後に、本研究の実施にあたっては、港湾技術研究所次長合田良実博士には、種々適切な助言、御指導を頂いた。ここに記して深甚の謝意を表します。また、本論文

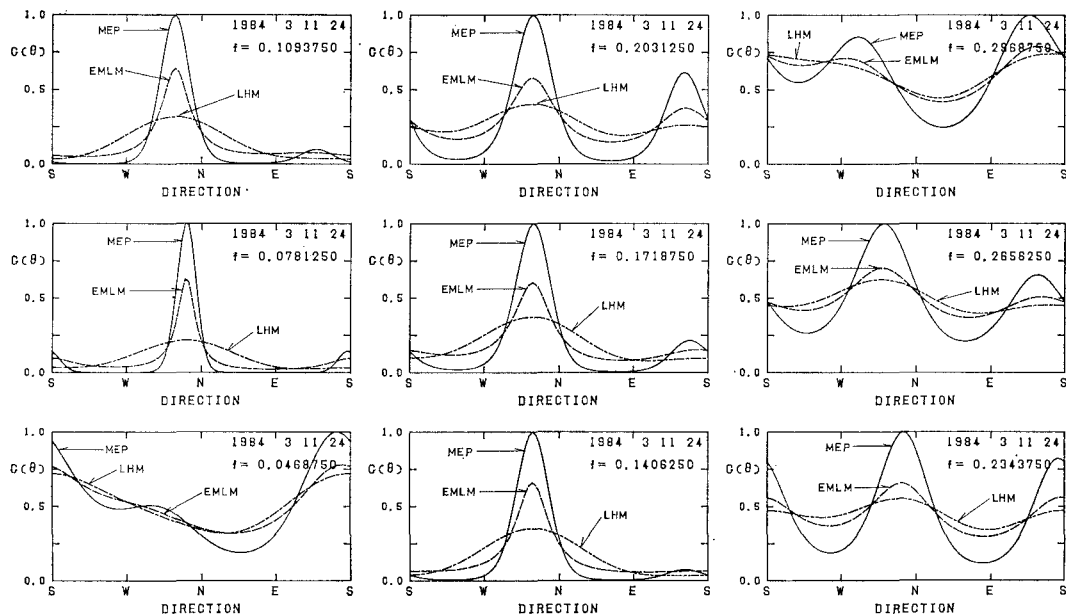


図-5 周波数別方向分布関数(一方向波浪)

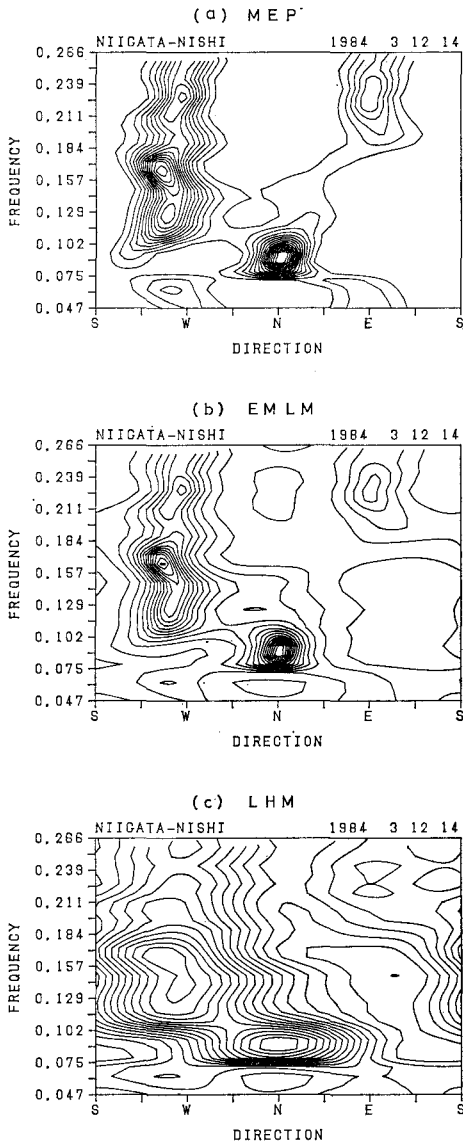


図-6 方向スペクトル (二方向波浪)

で用いた観測データの取得に努力していただいた第一港湾建設局関係各位に謝意を表するとともに、今後さらに御協力を御願ひする次第です。

参考文献

- 1) Barber, N. F.: The directional resolving power of an array of wave detectors, *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, pp. 137~150, 1963.
- 2) Paniker, N. N. and L. E. Borgman: Enhancement of directional wave spectrum estimates, *Proc. 14th Coastal Eng. Conf., ASCE*, pp. 258~279, 1974.
- 3) Capon, J.: High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, *Proc. IEEE*, Vol. 57, No. 8, pp. 1408~1418, 1969.
- 4) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司: 方向スペクトルの推定における MLM の拡張, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 173~177, 1984.
- 5) Sonuga, J. O.: Principle of maximum entropy in hydrologic frequency analysis, *Journal of Hydrology*, Vol. 17, pp. 177~191, 1972.
- 6) 寒川典昭・荒木正夫: 水文事象の頻度分析への MEP の導入について, 土木学会論文報告集, 第 335 号, pp. 89~95, 1983.
- 7) 光易恒ら: 海洋波の計測法の開発研究 (1), 九州大学応用力学研究所報, 第 39 号, pp. 105~181, 1973.
- 8) 光易恒ら: 海洋波の計測法の開発研究 (2), 九州大学応用力学研究所報, 第 40 号, pp. 89~95, 1974.
- 9) Borgman, L. E.: Directional spectral model for design use for surface waves, *Hyd. Eng. Lab. Univ. Calif., Berkeley*, HEL 1-12, 1969, 56 p.
- 10) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N. D. Smith: Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, *Ocean Wave Spectra*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, pp. 111~136, 1963.