

非線型長周期波の2次元スペクトル

木 村 晃*

1. はじめに

不規則波に含まれる 1st order の成分波相互の非線型干渉により、その周波数の和と差の 2 次干渉波が発生することを最初に示したのは Tuck¹⁾ である。その後これとは別に Longuet-Higgins ら²⁾ により Radiation stress の概念が提案され、一様な波の場では波群のピーク付近で wave set down と呼ばれる平均水位の低下が生ずることが明らかにされ、やはり彼らの研究でこれが 2 次干渉波のうち周波数差の成分波と同じものであることが示された。Tuck の研究では 2 次干渉波の存在が示されただけであるが、Ottesen-Hansen³⁾ は運動量解析により不規則波の波群においてもそのピーク付近で wave set down が生ずることを示した。その後 Gallagher⁴⁾、Bowers⁵⁾ ならびに Hsu ら⁶⁾ 等の研究でこの 2 次の干渉波のうち、周波数差の成分波が surf beat, edge 波、浮体の長周期動搖、湾水振動等の原因となり得ることが示されるに到ってこの波が広く注目されるようになった。最近になってこうした現象の定量的な把握に資するため、この周波数差の波（以後 2 次の非線型長周期波と呼ぶ）のエネルギーならびに方向スペクトルの理論が Ottesen-Hansen ら⁷⁾、Sand⁸⁾、Sharma ら⁹⁾ によって相ついで発表された。しかし、2 次の非線型長周期波は波群に拘束される性質の波であり、その振幅は 1 次成分波の相互の位相差に依存するため、理論式の中に 1 次成分波の位相の項がそのまま残る。このため従来のスペクトルのように振幅、周波数ならびに進行角（方向スペクトルの場合）だけでそのスペクトル特性を確定することが出来ず、定常性が仮定できる波浪場でも 2 次非線型長周期波のスペクトルはケースごとに異なる値を持つため、一般的なスペクトル形状を与えることが出来ない。つまり、Pierson-Moskowitz スペクトルなど従来の一般化されたスペクトルからだけではこのスペクトルを計算することが出来ない。

この研究は成分波の位相の平均化操作により、従来の 1 次成分波の方向スペクトルから、2 次非線型長周期波の方向スペクトルの期待値を算定し、これを用いた一般的な論議が可能となるようにしたものである。

2. 2 次の非線型干渉波

方向分散性を有する不規則波の速度ポテンシャルおよび水面形の第 1 次近似は一般に次式のように与えられる。ただし、座標系は 図-1 のように取る。

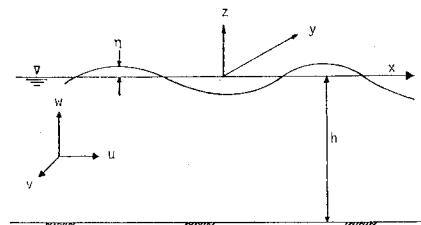


図-1 座標系

速度ポテンシャル:

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\cosh k_n(h+z)}{\cosh k_n h} \cdot \sin(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \epsilon_n) \quad (1)$$

水面形:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \frac{1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sigma_n \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \epsilon_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\phi_n) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_n &= b_n \sigma_n / g, & \phi_n &= \vec{k}_n \cdot \vec{x} - \sigma_n t + \epsilon_n \\ \sigma_n^2 &= g |\vec{k}_n| \tanh |\vec{k}_n| h \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

である。ここに、 g は重力加速度、 h は水深、 k_n 、 σ_n 、 ϵ_n はそれぞれ第 n 成分波の波数、角周波数ならびに初期位相角であり、矢印はそれがベクトルであることを示す。（1）、（2）式で与えられる 1 次成分波は相互に干渉し、次式で与えられる 2 次干渉波を生ずる。

速度ポテンシャル:

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{-}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{-} h} \frac{D_{ij}^{-}}{\sigma_i - \sigma_j} \\ &\quad \times \sin(\phi_i - \phi_j) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_i b_j \frac{\cosh k_{ij}^{+}(h+z)}{\cosh k_{ij}^{+} h} \frac{D_{ij}^{+}}{\sigma_i + \sigma_j} \\ &\quad \times \sin(\phi_i + \phi_j) \end{aligned} \quad (4)$$

* 正員 工博 鳥取大学助教授 工学部海洋土木学科

ワースペクトル計算法では初期位相角の情報が計算のプロセスで消えてしまうためこの式は計算出来ない。便宜的に観測値を直接フーリエ変換法で計算して得た位相角を代入して計算することも可能であるが、周波数スペクトル、方向分布関数も平均操作をする前の生の値を使う必要があるため、計算時間を要するばかりでなく、計算された $R_i^{(2)}$ はケースごとに大きくばらつく。これを解決するために、1次成分波の初期位相角の差の統計的特性を新たに検討する必要があるとする研究もあるが、1. で説明した諸現象でも1次成分波の初期位相角の情報を必要とするものは少ないので、ここでは(15)式の位相角を平均し、2次非線型長周期波の方向スペクトルの期待値を次のように与えた。

$$\begin{aligned} E_i^{(2)}(\sigma_0, \theta_0) &= 4 \int_{\sigma_{i_1}} \int_{\theta_{i_2}} E_i^{(1)}(\sigma_{i_1}, \theta_{i_2}) E_i^{(1)}(\sigma_{j_1}, \theta_{j_2}) \\ &\times \alpha(\sigma_{i_1}, \theta_{i_2}, \sigma_{j_1}, \theta_{j_2}) d\sigma_{i_1} d\theta_{i_2} \quad \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha(\sigma_{i_1}, \theta_{i_2}, \sigma_{j_1}, \theta_{j_2}) = \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad \dots \dots \dots (18)$$

であり、 $\sigma_{j_1}, \theta_{j_2}$ は(16)式で与えられる。2次の非線型長周期波の周波数スペクトル $S_i^{(2)}(\sigma_0)$ および方向分布関数 $H_i^{(2)}(\theta_0 | \sigma_0)$ は次のように与えられる。

$$S_i^{(2)}(\sigma_0) = \int_{\theta_0} E_i^{(2)}(\sigma_0, \theta_0) d\theta_0 \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$H_i^{(2)}(\theta_0 | \sigma_0) = E_i^{(2)}(\sigma_0, \theta_0) / S_i^{(2)}(\sigma_0) \quad \dots \dots \dots (20)$$

4. もう1つの2次の非線型長周期波

図-2には1次成分波の波数ベクトル $\vec{k}_{i_1}, \vec{k}_{j_1}$ とその干渉により生ずる2次の非線型長周期波の波数ベクトル $\vec{k}_{i_1} - \vec{k}_{j_1}$ (進行角 θ_0) の関係を示した。しかし、この図に示したものだけでなく、波数が同じ k_{i_1}, k_{j_1} の組み合わせであっても相互の干渉による2次非線型長周期波の進行角が θ_0 となる組み合わせは無数に存在する。たとえばこの図の場合、 θ_{i_2} が $\sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \pm \theta_0$ の範囲内にある波はすべて進行角が(16)式の関係を満たす波と干渉して角周波数差 σ_0 、進行角 θ_0 の2次非線型長周期波を生ずる。

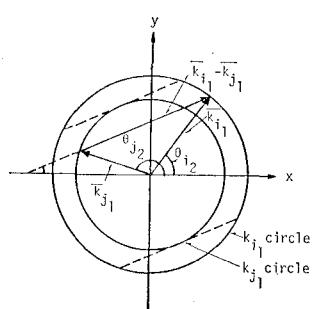


図-3 波数の大きな2次非線型長周期波

さらに θ_{i_2} が図-2と同じ範囲で θ_{j_2} が $\pi/2 + \theta_0 \sim 3\pi/2 + \theta_0$ の間にある場合(図-3)にもやはり角周波数差 σ_0 、進行角 θ_0 の2次非線型長周期波を生ずる。図-2と図-3の波の差異を(a) $\vec{k}_{i_1} \approx \vec{k}_{j_1}$, (b) $\vec{k}_{i_1} \approx -\vec{k}_{j_1}$ の2つの極端な場合を例に説明すると次のようである。すなわち、(a)の場合(6a式)より

$$\eta_i^{(2)} \approx -[a_{i_1}^2 k_{i_1} / (4k_{i_1} h - 1)] \cos \Delta k(x - C_g t) \quad \dots \dots \dots (21)$$

となる。ここに $\Delta k = k_{i_1} - k_{j_1}$, C_g は群速度である。ここでは簡単のために $k_{i_1} h \gg 1$ とした。一方(b)の場合は(6a)式より、

$$\eta_i^{(2)} \approx a_{i_1}^2 k_{i_1} \cos 2k_{i_1} x \quad \dots \dots \dots (22)$$

となる。この式でも $k_{i_1} h \gg 1$ とした。

(21)式は Longuet-Higgins が深海における wave set down として与えた式²⁾であり、(22)式は Tadjbaksh と Keller による有限振幅重複波理論における2次の非線型項¹⁰⁾と一致する。(21), (22)の両式で与えられる $\eta_i^{(2)}$ の水面形(破線)を示したものが図-4(a), (b)である。

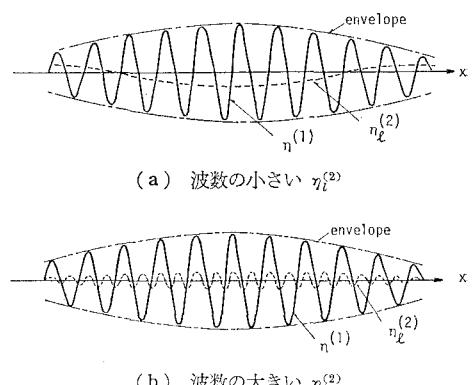


図-4 2次の非線型長周期波の波形

図には $\eta^{(1)}$ (実線) とそれに対する包絡線(1点鎖線)もあわせて示した。図からわかるように(a)図の $\eta_i^{(2)}$ は $\eta^{(1)}$ の波群のピーク付近で谷、両端付近で峰となる波群の長さに対応する水位変動であるのに対して、(b)では $\eta^{(1)}$ の1波長に2波入る波長の短い水面形となっている。図-2, 3の場合では2次の非線型長周期波の波数は1次成分波の進行角 θ_{i_2} と θ_{j_2} が等しい場合にもっとも小さく、両者の差の増大とともに大きくなり、差が π になった時最大となる。1次成分波の進行角が $0 \sim 2\pi$ の間に分布しておれば図-2から4に示した2種の2次非線型長周期波はすべての成分波の組み合わせで常に発生する。しかし1次成分波の進行角が $0 \sim \pi$ の間に分布している場合、図-2, 4(a)に示した波数の小さい2次非線型長周期波は(17)式の θ_{i_2} が次の範囲で現れる。

$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ の範囲

$$\theta_0 - \sin^{-1}((k_{j_1}/k_{i_1}) \sin \theta_0)$$

$$\sim \theta_0 + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$$

$\pi/2 < \theta_0 \leq \pi$ の範囲

$$\theta_0 - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$$

$$\sim \theta_0 + \sin^{-1}((k_{j_1}/k_{i_1}) \sin(\pi - \theta_0))$$

$\pi < \theta_0 \leq \pi + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$ の範囲

$$\theta_0 - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \sim \pi$$

$2\pi - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \leq \theta_0 \leq 2\pi$ の範囲

$$0 \sim \theta_0 + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) - 2\pi$$

一方、波数の大きな2次非線型長周期波は(17)式の θ_{i_2} が次の範囲内にある場合に現れる。

$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ の範囲:

$$\theta_0 + \sin^{-1}((k_{j_1}/k_{i_1}) \sin \theta_0)$$

$$\sim \theta_0 + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$$

$\pi/2 < \theta_0 \leq \pi$ の範囲:

$$\theta_0 - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$$

$$\sim \theta_0 - \sin^{-1}((k_{j_1}/k_{i_1}) \sin(\pi - \theta_0))$$

ただし θ_0 が $\pi \sim 2\pi$ の範囲では(23)式の範囲と同じである。(23), (24)式からわかるように2次の非線型長

値を持つ。

次にここで示した波数の大きな2次非線型長周期波の影響を概略評価するため(13)式の伝達関数 α の特性を示す。図-5は水深で正規化した値 $2ah$ を θ_{i_2} に対してプロットしたものである。

θ_{i_2} の取り得る範囲は図-2, 3で示したように、 $\theta_0 - \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$ から $\theta_0 + \sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1})$ の間である(13)式の α は θ_0 の影響を受けないので $\theta_0 = 0$ として一般性を失わない。さらにこの式は θ_{i_2} に関して対称であるのでその取り得る範囲幅の半分 $0 \leq \theta_{i_2}/\sin^{-1}(k_{j_1}/k_{i_1}) \leq 1$ の間の計算結果を示した。(a)は $k_{i_1}h = 10\pi$, (b)は $k_{i_1}h = \pi$, (c)は $k_{i_1}h = 0.1\pi$ の場合のもので、図中のパラメーターは1次成分波の波数の比である。図中の実線の部分が波数の小さい2次非線型長周期波に対応するものであり、破線が波数の大きい波に対応する部分である。ただし(c)図の破線部は波数比による差がきわめてわずかであるので一本の線で示した。図からわかるように実線の部分はほとんどすべての領域で負となり、破線の部分は逆に正となる。両者の比率は深海では波数の大きい部分の方が大きく、浅海では波数の小さい部分の方が大きくなる。

5. おわりに

2次非線型長周期波の方向スペクトル $E_y^{(2)}(\sigma_0, \theta_0)$ は角周波数差 σ_0 、進行角 θ_0 が与えられてもその成分波の波数ベクトルが決まらない性格のスペクトルである。したがって、 $\eta^{(1)}$ に対するのと同じ観測ならびに解析方法で $E_y^{(2)}$ を直接求めることは出来ない。実測値と理論との比較検討は(17), (19)式を用いた間接的な方法によれば可能である¹¹⁾。

謝 辞: この研究は著者が文部省在外研究員として昭和58年から59年にかけて滞在したデルフト工科大学で行った研究の一部である。機会を与えていただいた文部省、研究に協力していただいたJ. A. Battjes教授を始めとするデルフト工科大学の諸氏ならびにデルフト物理実験所の諸氏に深謝いたします。

参考文献

- 1) Tuck, L. J.: A non-linear random model of gravity waves, Jour. Math. Mech., 8, pp. 643~652, 1959.
- 2) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Radiation stresses in water waves: a physical discussion, with applications, Deep Sea Res., Vol. 11, pp. 529~569, 1964.
- 3) Ottesen-Hansen, N. E.: Long period waves in natural wave trains, Prog. Rept. 46, Inst. Hydrodyn. and Hydraulic Engg. Tech. Univ. Denmark, pp. 13~24, 1978.
- 4) Gallagher, B.: Generation of surf beat by non-linear wave interaction, Jour. Fluid Mech., Vol. 49, Part

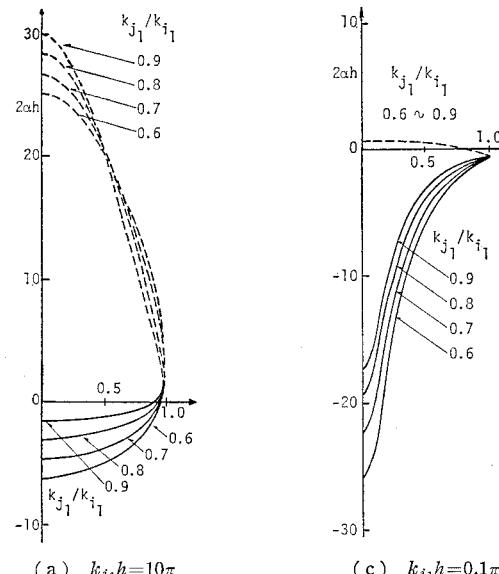
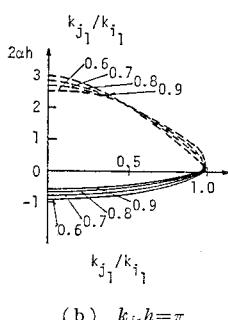


図-5 $2ah$ と θ_{i2} の関係



周期波の進行角は1次成分波の伝播しない $\pi \sim 2\pi$ の間に存在する。したがって(20)式で示される方向分布関数は1次成分波のそれに比して幅広い分布形状を持つ。特に σ_0 が小さい場合には $\theta_0 = 3\pi/2$ 付近を除いてあらゆる角度で

- 1, pp. 1~20, 1971.
- 5) Bowers, E. C.: Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, Jour. Fluid Mech., Vol. 79, pp. 71~92, 1977.
- 6) Hsu, F. H. and K. A. Blenkarn: Analysis of peak mooring force caused by slow vessel drift oscillation in random seas, O.T.C., Paper No. 1159, 1970.
- 7) Otteden-Hansen, N. E., S. E. Sand, H. Lundgren, T. Sorensen and H. Gravensen: Correct reproduction of group-induced long waves, Proc. 17th Conf. Coastal Engg., pp. 784~800, 1980.
- 8) Sand, S.E.: Long waves in directional seas, Coastal Engg., 6, pp. 195~208, 1982.
- 9) Sharma, J. N. and R. G. Dean: Developement and evaluation of a procedure for simulating a random directional send order sea surface and associated wave forces, Ocean Engg. Rept. No. 20, Dept. Civil Engg., Univ. of Delaware, 139 p., 1979.
- 10) Tadjbaksh, L. and J. B. Keller: Standing surface waves of finite amplitude, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, Part 3, pp. 442~451, 1960.
- 11) Kimura, A.: Averaged two-dimensional low-frequency wave spectrum of wind waves, Comm. on Hydraulics, Dept. of Civil Engg. Delft Univ. of Tech., Report No. 84-3, 54 p., 1984.