

シルを有する円形島周辺での長波の Trapped modes

筒 井 茂 明*

1. 緒 言

1983年5月26日、日本海中部地震により発生した津波¹⁾は、能代海岸をはじめ、隠岐、佐渡ヶ島、奥尻島等にも大きな災害をもたらした。一方、珊瑚礁で囲まれた琉球列島においても、明和の八重山大津波(1771)やチリ津波(1960)時に大波高の記録²⁾が残されている。これらの事例は、外洋に点在する島々においては周辺の海底地形特有の長波のトラップ現象が存在するであろうことを示唆している。

一定勾配の直線状海岸における境界波としてのエッジ波は周知の通りであり、他の典型的な海岸地形に対する同質の波動の存在もよく調べられている³⁾。また、直線状の海岸でなく島のまわりや海嶺にも境界波が存在することも示されている^{4), 5)}。Longuet-Higgins⁴⁾は、同心円状の等深線を有する海底地形で波がトラップされるためには、水深が外洋に向って中心からの距離の自乗以上の割合で深くなる必要があることを示した。しかし、中心に島が有り、島からの反射波の影響が無視できないときには、この条件を満たさない場合にも波がトラップされる可能性が有る。したがって、その特性の解明は防災工学上極めて重要である。

本研究においては、図-1に示すように円形島をシルを取り囲み、シル上および外海での水深が一定である海底地形モデルを考え、シルによる波のトラップの可能性を示すとともに、trapped modesに相当する波が来襲する場合の島周辺での波高分布特性を明らかにし、津波災害対策上の問題点を指摘する。

2. Trapped modes

線形長波の運動を考え、水平座標を (x, y) 、対応する速度成分を (u, v) 、時間を t 、水面変位を $\zeta(x, y, t)$ とする。ただし、コリオリ力は無視する。この近似においては、鉛直加速度は重力加速度 g に比べて無視でき、圧力分布は静水圧分布となるので、運動方程式および連続方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $h=h(x, y)$ は水深である。両式より u, v を消去すると次式が得られる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{gh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \zeta + \frac{1}{h} \nabla h \cdot \nabla \zeta = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。

図-1に示すように、シル上および外海での水深が一定の場合には、 ∇h は消失し、水面変位 ζ の時間項を $\exp(i\sigma t)$ とすると、式(3)はHelmholtzの方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\zeta = 0, \quad k = \sigma/\sqrt{gh} \dots\dots\dots (4)$$

となる。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ 、 σ ：角周波数である。上式を極座標 (r, θ) で表示すると、水面変位は

$$\zeta = R(r) \exp \{i(n\theta + \sigma t)\}, \quad n: \text{整数} \dots\dots\dots (5)$$

となり、動径成分 $R(r)$ は円筒関数で表示される。

ここで、進行波が入射し、そのエネルギーがシル上でトラップされた場合を考える。入射波からのエネルギー供給が無くなった時点では、島から十分離れた海面での波は消失すると考えられるので、島周辺での波は次式で表わすことができる。

$$\zeta = e^{i(n\theta + \sigma t)} \times \begin{cases} A J_n(k_1 r) + B H_n(k_1 r), & b \leq r < a \\ C H_n(k_2 r), & r > a \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $k_j = \sigma/\sqrt{gh_j}$ ($j=1, 2$)で、添字1, 2はそれぞれ

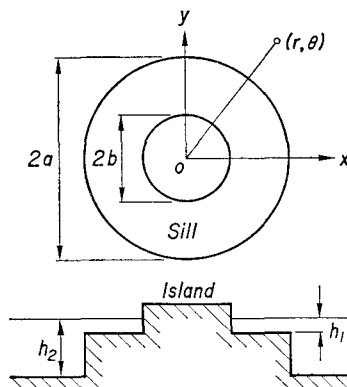


図-1 座標系および記号説明

* 正会員 工博 琉球大学助教授 工学部土木工学科

れシル上および外海での諸量を表わし, $H_n \equiv H_n^{(2)}$ は放射条件を満たすため第2種 Hankel 関数が採れている. 係数 A, B および C はそれぞれ来襲波のシル上への伝達係数, 反射波等によるシル上での増幅係数, およびシル上から外海への散乱係数を表わしている.

境界条件として, シル外縁での水位と流束の連続条件および島での完全反射の条件を用いると,

$$\left. \begin{aligned} \partial \zeta_1 / \partial r &= 0, & r &= b \\ \zeta_1 &= \zeta_2, & r &= a \\ h_1 \partial \zeta_1 / \partial r &= h_2 \partial \zeta_2 / \partial r, & r &= a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

が得られ, 係数 A, B および C は次式により決定される.

$$\begin{pmatrix} J_n'(\beta z) & H_n'(\beta z) & 0 \\ J_n(z) & H_n(z) & -H_n(\epsilon z) \\ \epsilon J_n'(z) & \epsilon H_n'(z) & -H_n'(\epsilon z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= k_2/k_1 = \sqrt{h_1/h_2}, & \beta &= b/a, \\ z &= k_1 a = \sigma a / \sqrt{g h_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし, ()' は主変数に関する微分を表わす. したがって, 式 (8) が解をもつための条件, すなわち, 式 (6) による波のトラップ現象が生じるための条件式は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta(z) &\equiv J_n(z) H_n'(\epsilon z) - \epsilon J_n'(z) H_n(\epsilon z) \\ &\quad - \frac{J_n'(\beta z)}{H_n'(\beta z)} \{ H_n(z) H_n'(\epsilon z) - \epsilon H_n'(z) H_n(\epsilon z) \} \\ &= 0 \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

したがって, trapped modes の周波数は, 島とシルのスケール β および水深比 ϵ に依存する固有周波数 z として定められる. 式 (10) は, 島が無いときには $\beta \rightarrow 0$ であるから, Longuet-Higgins の式と一致する. また, シルが無いときは $\epsilon \rightarrow 1$ であるから, $\Delta(z) = -2i/(\pi z)$ となり, $\Delta(z) = 0$ を満たす有界な z は存在しないのでトラップ現象は発生しない. 固有周波数 z については, シルから外海への弱いエネルギー漏出を伴うべきこと, および $\zeta \propto \exp(i\sigma t)$ と仮定していることから, σ すなわち z は正の虚部をもつ複素数とならねばならない.

Trapped modes の固有周波数に対する近似式を得るため, $|z| \rightarrow \infty$ のときの円筒関数の漸近展開式を用いて式 (10) を変形すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \Delta(z) &\sim \frac{2}{\pi z \epsilon^{1/2}} e^{i\{(\beta - \epsilon)z - \pi/2\}} \\ &\quad \times \{ \cos(1 - \beta)z + i\epsilon \sin(1 - \beta)z \} = 0 \dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここで,

$$z = \xi + i\eta, \quad \eta > 0 \dots\dots\dots (12)$$

とおくと, 次の近似式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} (1 - \beta)\xi &= \frac{1}{2}(2M + 1)\pi, & M &= 0, 1, 2, \dots \\ (1 - \beta)\eta &= \tanh^{-1} \epsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

同様に, シル上での増幅係数

$$|B/A| = |J_n(\beta z)/H_n(\beta z)| \dots\dots\dots (14)$$

の極大値の発生条件は次式で近似される.

$$\beta \xi = \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{4} + N \right) \pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\dots (15)$$

この式は, trapped modes の周波数のうち特定の β に対して, シル上でのエネルギー増幅が生じることを示す.

図-2 は $\epsilon = 1/4$, $\beta = 1/2$ に対する固有周波数を z -平面上に例示したもので, 特定の trapped modes に対する固有周波数は実線で, また, 個々の n に対する第 1, 2, ... 番目の値は順次破線で結ばれている. 表-1 にはこれら周波数の最初の数個が示されている. ϵ が十分大きいときには, 固有周波数は近似式 (13) の値に漸近し, ダンピング η は一定となることが判る. 一方, 図-2 および表-1 に示されているように, 極めて小さいダンピング η をもつ周波数が存在し, この周波数に対しては波のエネルギーがほぼ完全にトラップされ, 後述するように, シル上での波高が極端に増大することになる. エッジ波と同様に, 波のエネルギー・トラッピングにはエネルギー漏出を伴わねばならないから, Longuet-Higgins はこのような η の微小なモードは見かけ上の trapped modes であるとしている. この点に関して, Renardy⁵⁾

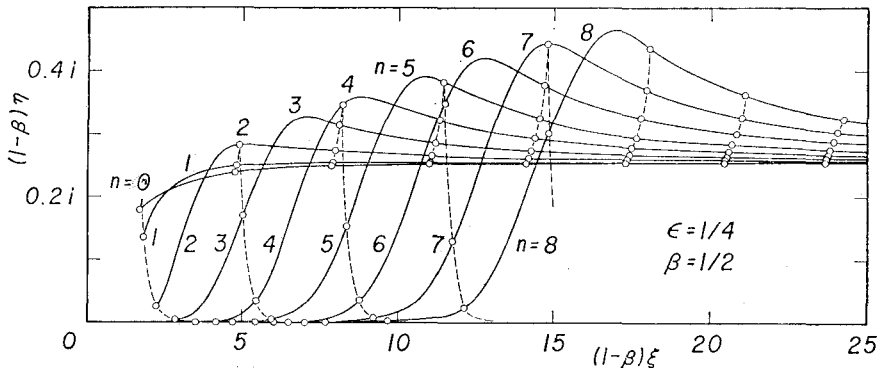


図-2 Trapped modes の固有周波数 (低ダンピング)

表-1 Trapped modes の固有周波数 (低ダンピング)

$(1-\beta)\xi$	$(1-\beta)\eta$	$(1-\beta)\xi$	$(1-\beta)\eta$
$n=0$		$n=6$	
1.706	0.1780	4.794	0.1838×10^{-4}
4.755	0.2392	6.480	0.9124×10^{-3}
$n=1$		8.768	0.3614×10^{-1}
1.813	0.1354	11.497	0.3487
4.797	0.2509	14.709	0.3779
$n=2$		17.782	0.3262
2.266	0.2518×10^{-1}	$n=7$	
4.892	0.2824	5.415	0.3303×10^{-5}
7.991	0.2747	7.066	0.1504×10^{-3}
$n=3$		9.217	0.6988×10^{-2}
2.870	0.3480×10^{-2}	11.752	0.1285
5.015	0.1682	14.805	0.4434
8.111	0.3152	17.940	0.3696
$n=4$		21.003	0.3261
3.510	0.5579×10^{-3}	$n=8$	
5.434	0.3510×10^{-1}	6.016	0.5622×10^{-6}
8.189	0.3478	7.685	0.2637×10^{-4}
11.336	0.3234	9.687	0.1243×10^{-2}
$n=5$		12.157	0.3338×10^{-1}
4.157	0.9969×10^{-4}	14.852	0.3012
5.936	0.5788×10^{-2}	18.085	0.4366
8.358	0.1521	21.166	0.3625
11.464	0.3827	24.225	0.3258

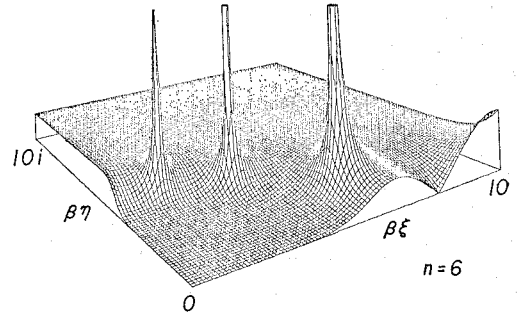

 図-4 波高増幅係数 $|B/A|$

図-4 は、式 (14) で与えられるシル上での波高増幅係数 $|B/A|$ を $n=6$ に対して $|B/A| \leq 3$ の範囲で図示したものである。 $\beta\eta \ll 1$ における極大点は近似式 (15) に対応するものである。注目すべきは、 $\beta\eta \gg 1$ なる位置に極大点が存在し、その個数は図-3 に示されたものと一致する点である。したがって、式 (10) を満たす固有周波数のうちダンピング η が大きい周波数をもつ trapped modes に対しては、例えば、一過性の津波が来襲する場合の波高は、急速に減衰するが極めて大きくなる可能性が有り、特に留意すべきであろう。

3. 円形島周辺の波高分布

ここではシルを有する円形島に進行波が来襲する場合を考える。入射波は、その振幅を 1 とすると、

$$\zeta_{\infty} = e^{i(k_2 x + \sigma t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_2 r) e^{i(n\theta + \sigma t)} \dots (17)$$

と表わされるので、島周辺の波は 2. と同様にして次式⁶⁾で与えられる。

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n\theta + \sigma t)} \times \begin{cases} A_n J_n(k_1 r) + B_n H_n(k_1 r), & b \leq r < a \\ C_n H_n(k_2 r) + i^n J_n(k_2 r), & r > a \end{cases} \dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\frac{2i^{n+1}}{\pi \epsilon z \Delta(z)}, & \frac{B_n}{A_n} &= -\frac{J'_n(\beta z)}{H'_n(\beta z)}, \\ C_n &= -\frac{i^n}{\Delta(z)} \left[J_n(z) J'_n(\epsilon z) - \epsilon J'_n(z) J_n(\epsilon z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_n}{A_n} \{ H_n(z) J'_n(\epsilon z) - \epsilon H'_n(z) J_n(\epsilon z) \} \right] \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ただし、 $\Delta(z)$ は式 (10) の左辺と同じである。上式は、 $\beta \rightarrow 0$ のときにはシルのみが、 $\epsilon \rightarrow 1$ のときには $A_n = i^n$ 、 $B_n = C_n$ となり円形島のみが存在するときの波を表わす。また、この場合には、波の周波数 σ は実数であるから z もまた実数である。したがって、 $\Delta(z) \neq 0$ であるが、前述の trapped modes の固有周波数のうち、ダンピング η が微小な周波数 ξ に対しては、シル上での波高が極めて

はポテンシャル理論により Longuet-Higgins のシル-モデルを検討し、線形長波理論では現われないエネルギー漏出がシル外縁より生じ、その結果、極端な波高増大が抑制されることを示している。

図-3 は、ダンピング η がかなり大きい場合の固有周波数を図-2 と同様に描いたものである。これらのモードにおけるエネルギー減衰は急速であり、定在的なモードとなりえないと考えられる。数値計算結果によると、これら固有周波数の個数 l は次式で与えられる。

$$l = [(n+1)/2] \dots (16)$$

ここに、 $[\]$ は Gauss の記号である。

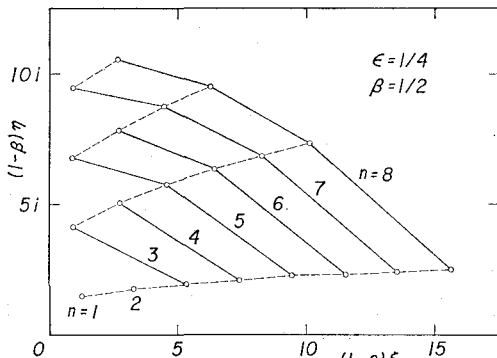
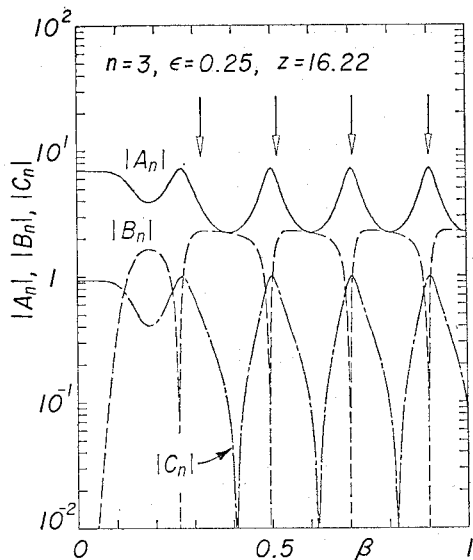


図-3 Trapped modes の固有周波数 (高ダンピング)

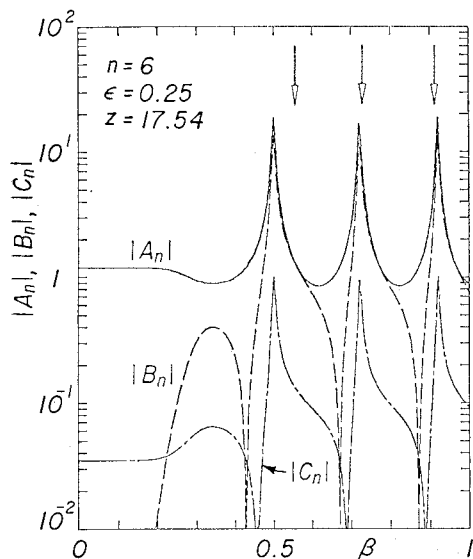
大きくなる事が判る。

図-5 は、係数 $|A_n|$, $|B_n|$, および $|C_n|$ に対するトラッピング効果およびシルと島のスケール β の影響を例示するものである。ただし、 z としては、表-1 に与えられた trapped modes の固有周波数のうち、比較的ダンピング η の小さいものの実部を用いている。

伝達係数 $|A_n|$ は $\beta=1/2$ で当然極大となるが、それ以外の β に対しても極大点が存在し、その位置は矢印で示された近似式 (13) の第1式による trapped modes に対する β とよく一致している。 $n=3$ の場合は、 $|A_n|$ の



(1) $n=3, \epsilon=0.25, z=16.22$

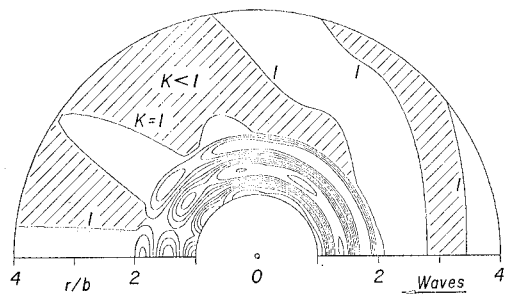


(2) $n=6, \epsilon=0.25, z=17.54$

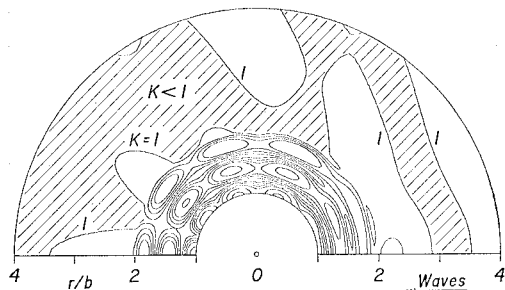
図-5 円形島周辺での波高係数 $|A_n|$, $|B_n|$, および $|C_n|$ に対するスケールパラメータ β の効果

極大点の位置で $|B_n|=0$, $|C_n|=1$ となり、島からの反射波によるシル上での波高増幅作用が小さい場合に相当する。 $n=6$ の場合には、すべての係数が同一の β において極大となり、エネルギー・トラッピング効果が大きいことを示している。いずれの場合にも散乱係数 $|C_n|$ が極大となる幅は狭く、trapped modes の β から少しはずれると $|C_n|$ は急激に減少する特性をもっているが、trapped modes の波が来襲すると、シル上での波高がかなり増大するであろうことが判る。

円形島周辺の定常状態での波高比 $K=|z|$ の等波高線を trapped modes に対して示すと図-6 および 7 のようになる。図-6 (1) $n=3$ の場合は図-5 (1) に対応するもので、 B_n の効果が小さいので、島の前面から背後に等波高線が長く連なっている。 $n=5$ のときには、シル上で short-crested waves がかなり発達している。最大波高比は $n=3, 5$ に対してそれぞれ $K=6, 8$ である。次に、図-7 はシル上での水深が浅く、シルの規模が大きい場合 ($\epsilon=1/8, \beta=0.3$) で、図-6 と比べるとシル上での short-crested waves の発達は明瞭で、波が十分トラップされていることが判る。 $n=3$ の場合には島の前面より背後の波高が大きくなっている。一方、 $n=5$ のときは、シル上全域ではほぼ均一な波高増幅効果が認められ、最大波高比は $K=70$ となっている。さらに、波のエネルギーが short-crested waves の峯の位相から外海に向かって放射状に漏出する様相が明瞭に現われている。ステップ状の海底地形での波高増幅率は $2/(1+\epsilon)$ である

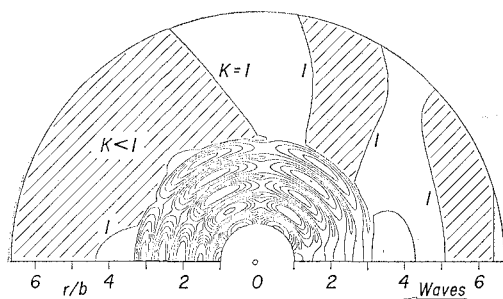
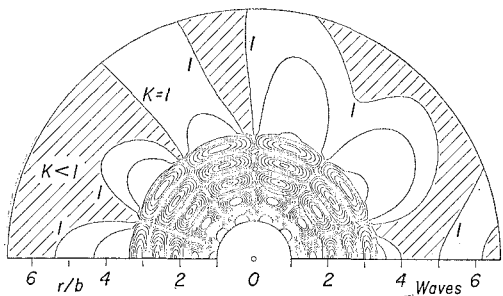


(1) $n=3, z=16.22; K=1, 2, 3, 4, 6$



(2) $n=5, z=16.72; K=1, 2, 3, 4, 6, 8$

図-6 円形島周辺での等波高線; $\epsilon=1/4, \beta=0.5$

(1) $n=3, z=20.86; K=1, 2, 4, 6, 8, 10, 15, 20$ (2) $n=5, z=22.29; K=1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70$ 図-7 円形島周辺での等波高線; $\varepsilon=1/8, \beta=0.3$

ことから、図-6 および 7 に示されている波高比はかなり大きな値である。

4. 結 言

以上、外洋に点在する島付近の海底地形モデルとし

て、円形島を天端水深が一定のシルが取り囲んでいる場合を考え、シル上での波のトラップ現象の存在、および trapped modes の固有周波数は島とシルのスケールおよび水深比に依存することを示した。また、trapped modes の周波数をもつ波が来襲するときには、シル上での波高がかなり大きくなることを例示した。これらの波高分布は定常状態に対するものであり、津波来襲時には定常状態に達するほどの十分な時間とエネルギー供給が無いかも知れない。しかし、万一このような悪条件が重なった場合を想定して、その時の波高分布特性を把握しておくことは防災対策上重要であろう。

最後に、本研究にあたり終始温かい御指導・御鞭撻をいただいた京都大学防災研究所 土屋義人教授に対し、深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 昭和 58 年 5 月 26 日 日本海中部地震津波に関する論文および調査報告、東北大学工学部津波災害実験所研究報告、第 1 号、267 pp., 1984.
- 2) 羽鳥徳太郎：歴史津波——その挙動を探る——、イルカぶっくす、海洋出版、125 pp., 1977.
- 3) 寺本俊彦編：海洋物理学 I、東京大学出版会、248 pp., 1974.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: On the trapping of wave energy round islands, Jour. Fluid Mech., Vol. 29, pp. 781~821, 1967.
- 5) Renardy, Y.: Trapping of water waves above a round sill, Jour. Fluid Mech., Vol. 132, pp. 105~118, 1983.
- 6) 筒井茂明：シルを有する円形島周辺での長波の Trapping 第 39 回年講概要集、土木学会、II-116, pp. 231~232, 1984.