

非線形分散波の数値計算

長尾昌朋*・後藤智明**・首藤伸夫***

1. 序

現在、津波の初期波形を正確におさえることができれば線形長波理論、浅水理論を用いた数値計算法で沿岸の津波の挙動をかなりの精度で再現できることが知られている。しかし、日本海中部地震津波のように短周期成分の卓越したフロントを持つ津波の再現には、鉛直方向の加速度を入れた運動の式（非線形分散波理論）を用いることが必要と思われるが、今のところ実用に供し得る方法は開発されていない。これは、非線形分散波理論の精度とその計算方法に問題が残されているからである。

非線形分散理論としては Boussinesq¹⁾, Korteweg-de Vries²⁾, Mei-Méhaut³⁾, Peregrine⁴⁾ あるいは角谷⁵⁾が有名である。これらは波高水深比と相対水深がともに小さくアーセル数が1のオーダーであると仮定して導かれている。一方、著者の一人が提案したアーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式⁶⁾は波高水深比が1のオーダーで相対水深が小さくアーセル数が大きいと仮定して導かれている。

本研究では、斜面からの反射を含む、一般的に使用しうる Peregrine の式と大アーセル数非線形分散波の方程式とを用いて数値計算を行ない、水理実験と比較することによって非線形分散波理論の基礎的な検討を行なう。

2. 実験方法

実験には図-1に示す長さ 10 m, 幅 30 cm, 深さ 45 cm の両面ガラス張水路を用いた。一端にピストン型造波装置を取り付け、孤立波を発生させた。造波板の速度を変えることによって任意の孤立波を発生できる。また、他端には勾配 1/20 の斜面を取り付け、ここで孤立波を変形させた。孤立波の空間波形の経時変化を測定するために水位の測定には 2 台の高速度サーボ式水位計 (WG1, WG2) を用いた。WG1 の位置は固定し、WG2 の位置は 5 cm 毎に動かして水位を測定した。WG1 の波形を基にして各測点での時間を調整した。

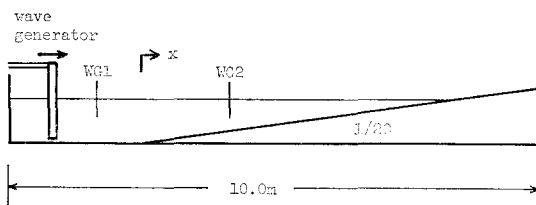


図-1 実験装置

表-1 実験データ

	斜面法先 ($x=0$ cm)			砕 波 点			
	水深 h_0 (cm)	波高 H_0 (cm)	波高水深比 ϵ_0	地点 x_b (cm)	水深 h_b (cm)	波高 H_b (cm)	波高水深比 ϵ_b
ケース 1	30	3.3	0.11	550	2.5	4.7	1.88
ケース 2	15	6.7	0.44	195	5.3	8.2	1.55

実験は斜面法先での波高水深比 ϵ_0 が 0.11 と 0.44 の 2 種類の場合を行なった。表-1 に実験データを示す。砕波形態は 2 種類とも巻き波砕波である。また、波高が最大となる点を砕波点とした。

3. 数値計算

(1) 計 算 法

最波を記述するパラメーターとしては、波高水深比 ϵ ($=H/h$), 相対水深 σ ($=h/L^2$) およびこれらのパラメーターを結びつけたアーセル数 Ur ($=\epsilon/\sigma$) が良く用いられる。

Peregrine の式は、波高水深比と相対水深がともに小さくアーセル数が1のオーダーと仮定する。第二次近似により次式を得る⁶⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [D\bar{u}] &= 0 \dots\dots\dots (1) \\ \frac{\partial}{\partial t} [D\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [D\bar{u}^2] + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} + h \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{u}$ は断面平均流速、 η は静水面からの水位変動、 h は静水深、 D ($=h+\eta$) は全水深、 g は重力加速

* 学生会員 東北大学大学院工学研究科

** 正 会 員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科

*** 正 会 員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

度である。正確には、移流項に静水深を用いるべきであるが従来全水深で計算されているので今回もそれに従った。

大アーセル数非線形分散波の方程式は、波高水深比が 1 のオーダーで相対水深が小さくアーセル数が大きいと仮定する。第一次近似により次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [D\bar{u}] = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [D\bar{u}] + \frac{\partial}{\partial x} [D\bar{u}^2] + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^3}{3} F_1 + \frac{D^2}{2} F_2 \right] - \frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{D^2}{2} F_1 + D F_2 \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$F_1 = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$F_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

計算は中央差分とし陰解法を使用する。計算点の配置はリープフロッグ法と同じように水位と流量を交互に配置した(図-2)。津波の計算には従来よりリープフロッグ法が用いられており、これらとの互換性を考えたからである。これにより計算点をそのままにして水深変化に

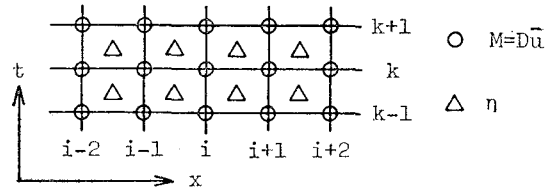


図-2 計算点の配置

応じて線形長波理論、浅水理論、非線形分散波理論へと支配方程式を連続的に変えるプログラムの作成が可能となる。また、沖側の境界条件に実験値を用い、直接実験結果と数値計算結果とを比較できるようにした。計算点の格子間隔はケース 1 では $\Delta x = 2.5$ cm, $\Delta t = 1/100$ sec, ケース 2 では $\Delta x = 1.25$ cm, $\Delta t = 1/200$ sec である。 Δx , Δt は無次元化すると各々同じような値になる。なお、計算時間は、大アーセル数非線形分散波の方程式を用いると 30 分程度、Peregrine の式を用いると 3 分程度である。

(2) 計算結果

図-3 に波形に関する実験結果と数値計算結果を示す。実験結果の波形が滑らかでないのは 5 cm 毎の測点

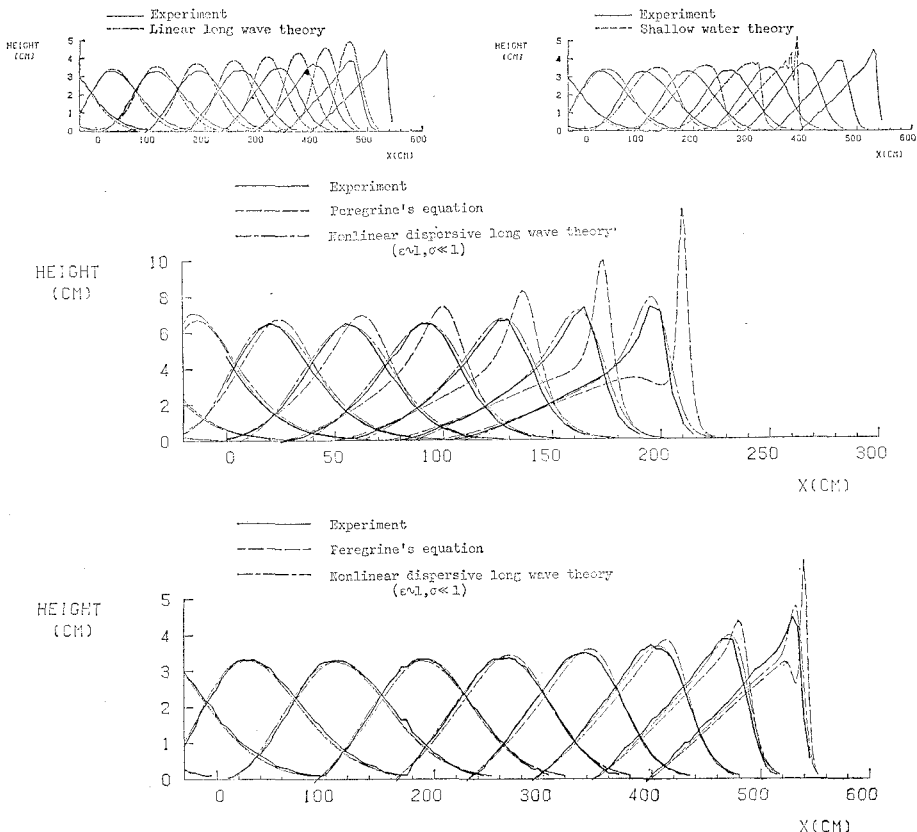


図-3 実験結果および数値計算結果

上段: $\epsilon_0 = 0.11$, 中段: $\epsilon_0 = 0.11$, 下段: $\epsilon_0 = 0.44$

での水位の経時変化を空間波形として示したからである。図-3 上段左に示すように線形長波理論では波形の変化が起こらず、波速も小さい。図-3 上段右に浅水理論の結果を示すが、計算した波は大きく前傾化し、波速も大きい。また、波先端に数値ギブス振動⁷⁾を生じやすい。図-3 中段および下段からわかるように Peregrine の式では波高水深比が小さいと精度良く計算できるが、波高水深比が大きいと波高を過大評価する。また、波の分裂も早目に進行する。大アーセル数非線形分散波の方程式では波高水深比が大きいでも精度良く計算できる。波速に関しても非線形分散波理論を用いると多少の誤差はあるが良く実験値に一致している。

図-4, 5 は波高と波速に関する数値計算の精度を数値計算結果と実験結果との比をとって改ためて示したものである。値が 1 に近づく程精度が良い。上で述べた事が再確認される。

図-6 に大アーセル数非線形分散波の方程式の運動量の式の各項の大きさを示す。各図とも各々最大値で基準化している。波高水深比が小さければ局所項と重力項が大きく、移流項と分散項は小さく無視できる。波高水深比が大きくなると移流項、分散項が大きくなり無視できなくなる。また、Peregrine の式の分散項は大アーセル数非線形分散波の方程式のそれに比べて小さいが、波高水深比が大きくなると特に差が大きくなる。これが、波高水深比が大きくなると波高を過大評価する原因であろう。

式 (4) の分散項では

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^3}{3} F_1 \right]$$

が大きく他の斜面の効果を含んだ項は勾配 1/20 程度の斜面では小さく無視できる。

大アーセル数非線形分散波の方程式を水平床上で第二次近似まで計算すると式 (4) に次の修正項が現われる。

$$\text{移流項: } + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D^4}{45} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \text{分散項: } & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{D^5}{45} \left\{ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} + \bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} - 5 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right\} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{45} D^5 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right) \right] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

図-6 にこれらの大きさを $O(\sigma^2)$ として示している。移流項ではこの修正項は小さく無視できる。分散項では波高水深比が小さいと修正項は小さいが、波高水深比が大きくなると修正項も大きくなりその値は第一次近似までのものと同程度になる。このような領域では支配方程式をより高次近似にする必要性が考えられる。

図-3 には表示していないが、数値計算では砕波を起こさず波形を計算しつづける。しかし、物理現象としてはこのようなことはありえない。従って、砕波に対する

検討を行ない適用限界を決定する必要がある。波頂における水表面での流速が波速を上回った時を砕波と見なす。水表面での流速はアーセル数が大きい場合の非線形分散波理論により次式で与えられる。

$$u_s = \bar{u} - \frac{D^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{D}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

一方、波速としては様々なものが考えられるがどの定義による波速を用いれば実際の砕波点を正しく表わせるかを調べたものが図-7 である。ただし、 c_1 は波頂の進行速度、 c_2 は波頂前面の静水面上の水の体積を同じにするような仮定の鉛直面の移動速度である。実験結果から数値計算での砕波条件を

$$\sqrt{gh} < u_s < \sqrt{g(h+\eta)}$$

の範囲で定めれば良いと考えられる。 $c = \sqrt{g(h+\eta)}$ と定

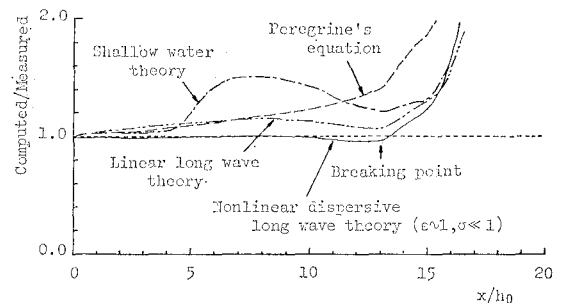
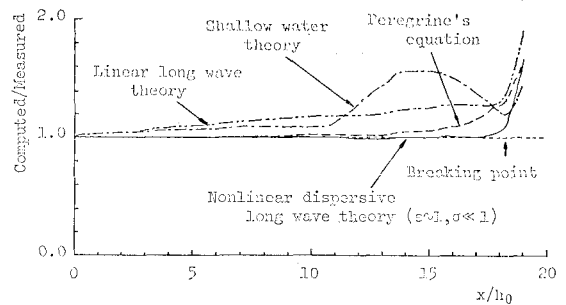


図-4 波高の精度
上段: $\epsilon_0=0.11$, 下段: $\epsilon_0=0.44$

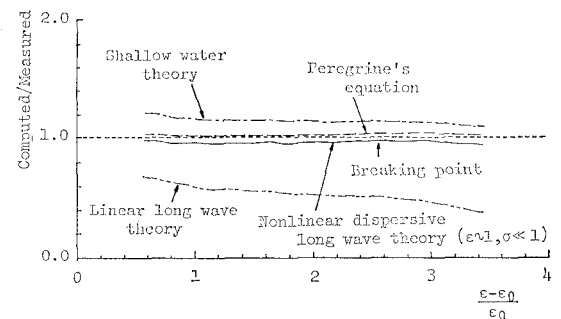


図-5 波高増幅に伴う波速の精度 ($\epsilon_0=0.44$)

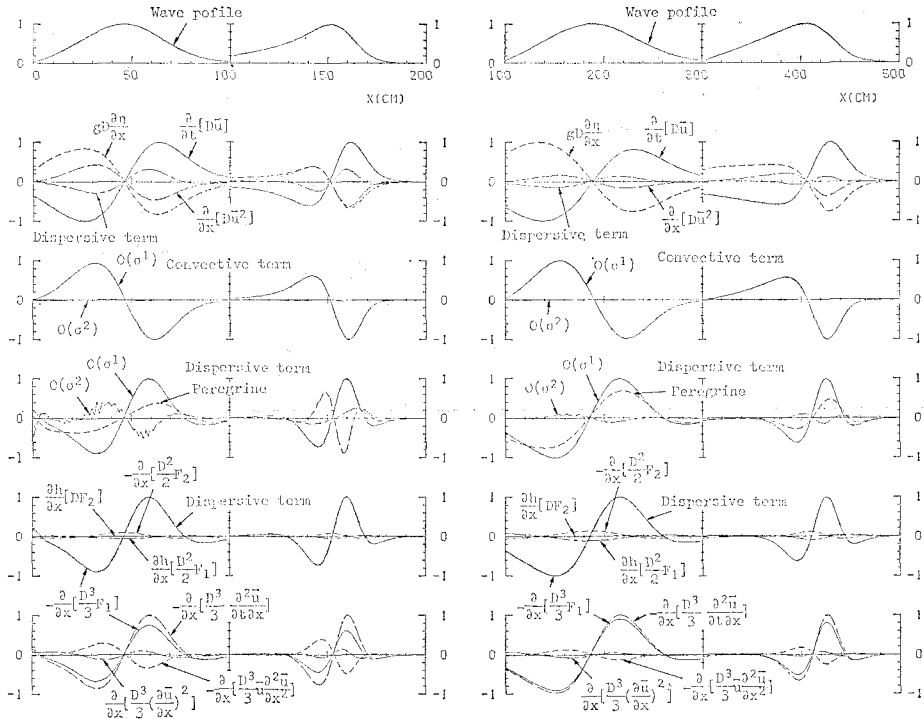
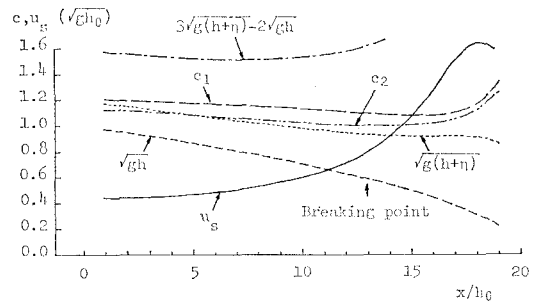
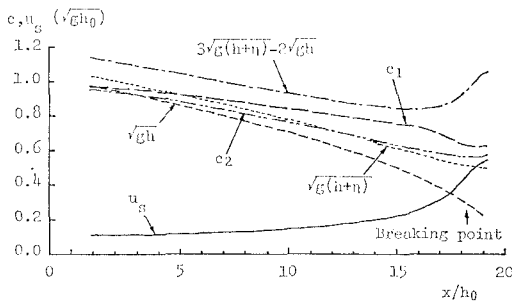


図-6 運動量の式の各項の比較

左: $\epsilon_0=0.11$ 斜面法先付近 ($\epsilon=0.17$) と碎波点付近 ($\epsilon=0.37$)右: $\epsilon_0=0.44$ 斜面法先付近 ($\epsilon=0.51$) と碎波点付近 ($\epsilon=0.93$)図-7 水面流速と波速との比較 (左: $\epsilon_0=0.11$, 右: $\epsilon_0=0.44$)

義した場合には、計算によって決定できる碎波点と実験の碎波点との差は水平距離にしてケース 1 で 7.5 cm, ケース 2 で 20 cm であった。今回は実験を 2 種しか行えなかったものでこのことは今後の課題としたい。

4. 結 び

本計算法により孤立波の斜面上での変形を安定に計算できる。今回のように波頂曲率の大きな波の計算では非線形分散波理論を用いる必要がある。Peregrine の式では波高水深比が小さいと精度良く計算できるが、波高水深比が大きくなると波高を過大評価してしまう。また、波の分裂も早目に起こってしまう。大アーセル数非線形分散波の方程式では波高水深比が大きくても精度良く計

算できる。この式の斜面の効果を含む項は勾配 $1/20$ 程度の斜面では小さく無視できる。さらにこの式の第二次近似式を水平床において導いたが、碎波点付近のように波高水深比が非常に大きくなると第二次近似の分散項の修正項が第一次近似の分散項と同程度の大きさとなり碎波点付近ではさらに高次近似の式を用いる必要性が考えられる。

波速として $\sqrt{gh} \sim \sqrt{g(h+\eta)}$ の間にあるものを選び、これと波頂での水粒子速度が等しいときに碎波であるとする方法により数値計算のための碎波点を決めることは現実的な計算手法である。ただし、具体的に c の形を決めるには、いまだし事例を増やす必要がある。 $c = \sqrt{g(h+\eta)}$ とした時には実験との差は水平距離にして 20

cm 以下の範囲におさまった。

謝 辞： この実験を行なうにあたり，東北大学工学部山路弘人技官より多くの助力を得た。また，この研究の一部は文部省科学研究費（代表者 首藤伸夫教授）によって行なわれた。ここに記して厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Boussinesq, M. J.: Essai sur la théorie des eaux courantes, Hemo. Acad. Science, 2^{ème} Sér, Tome 23, No. 1, 1877.
- 2) Korteweg, D. J. and G. De Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Vol. 39, 1895.
- 3) Mei, C. C. and B. LeMéhauté: Note on a equations of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol. 71, 1966.
- 4) Peregrine, D. H.: Long waves on a beach, J.F.M., Vol. 27, Part 4, 1967.
- 5) Kakutani, T.: Effect of an uneven botton on gravity waves, J. Phs. Soc. in Japan, Vol. 30, 1971.
- 6) 後藤智明: アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第351号/II-2, 1984.
- 7) Goto, C. and N. Shuto: Numerical simulation of Tsunami propagations and run-ups, Tsunamis: Their Science and Engineering, Terra Scientific Publishing Company, 1981.