

傾斜海浜上におけるソリトンとその変形

安田孝志*・三島豊秋**・土屋義人***

1. 緒 言

海岸波浪のソリトンモード表示に関するこれまでの研究においては、水深およびその変化率が重要なパラメータであるにも拘わらず、一様水深が仮定され、海底地形の影響は無視されて来た。こうした扱いは、海底地形の変化が緩やかな浅海域における特定観測点での時間波形のみを対象とする限りでは許されるが、海岸波浪の傾斜海浜上における伝播やそれに伴う巨視的特性の空間変化を記述する場合には問題となって来る。特に、異なった観測点での波形記録から、各ソリトンモードへのエネルギー配分を決定するソリトンスpekトルの標準形を見出し、海岸波浪の巨視的記述を行なうには、傾斜海浜上におけるソリトン解を導き、これを基に水深およびその変化率をパラメータとしたソリトンスpekトルの表示法を確立し、各観測点における海底形状のソリトンスpekトルに及ぼす影響を補正することが必須となる。

斜面上の孤立波（ソリトン）の変形に関する研究はこれまで数多くなされて来たが、その理論的研究は解析解の誘導に優れた特色を持つ斜面上の KdV 方程式が角谷によって導かれるに及んで急速に進むようになり、最近では、この問題はせつ動を受けた KdV 方程式のソリトン解の誘導問題として一般化され、逆散乱法や広田の方法によって解析解も導かれている¹⁾。

本研究では、角谷によって導かれた斜面上の KdV 方程式の解析解を矢嶋の方法¹⁾によって求め、一様な傾斜面上における分散波を含んだソリトンモード解を示すと同時に、一様水深場から一様傾斜海浜場に伝播して来たソリトンの浅水化に伴う変形特性を明らかにする。

2. 斜面上の KdV 方程式の双 1 次形式

ここでは、反射波が無視出来る程度の傾斜面上でのソリトンを扱うことから、角谷によって導かれた次式の斜面上の KdV 方程式を基礎方程式として用いる。

$$\eta_c + \frac{3}{2\epsilon c^3} \eta \eta_\xi + \frac{c}{6} \eta_{\xi\xi\xi} + \frac{h_\tau^*}{4c^2} \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \epsilon^{1/2} \left(dx^*/c - t^* \right), \quad \tau = \epsilon^{3/2} x^*, \\ z'/h_0 &= \eta, \quad x^* = x/h_0, \quad t^* = t\sqrt{g/h_0}, \\ c &= \sqrt{h^*}, \quad h^* = h(\tau)/h_0, \quad \epsilon = (h_0/L)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり、また、 x ；水平座標、 t ；時間、 z' ；平均水面周りの水位変動、 h_0 ；初期水深 $h(0)$ 、 h ； τ に依存する各地点ごとの水深、 L ；海岸波浪の代表波長、および g ；重力の加速度である。ここで、次式の変換

$$\eta = c^4 u/9, \quad X = \int c d\tau/6 \quad \dots\dots\dots (3)$$

を式 (1) に適用すれば、角谷の式は次式のように書換えられる。

$$u_X + uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} + 9h_\tau^* u/4h^* = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに、広田にならって次式の変換

$$u = 12(\log F)_{\xi\xi} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を行ない、 ξ で積分すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} &12(FF_{X\xi} - F_X F_\xi + F_{\xi\xi\xi}) \\ &- 12(4F_\xi F_{\xi\xi\xi} - 4F_\xi^2 \xi) \\ &+ 27h_\tau^* FF_\xi/h^* + CF^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 C は X の任意関数であるが、 η は局在波の条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ ； $\eta \rightarrow 0$ を満たすとするれば、 $C=0$ と置くことができる。式 (6) を次式の双 1 次形演算子

$$D_\xi^m = (\partial/\partial\xi - \partial/\partial\xi')^m|_{\xi=\xi'} \quad \dots\dots\dots (7)$$

によって整理すると、傾斜海浜上の KdV 方程式の双 1 次形式が次式のように導かれる。

$$[D_X D_\xi + D_\xi^3] FF = -9h_\tau^* FF_\xi/2h^* \quad \dots\dots\dots (8)$$

3. 傾斜面上のソリトン解

3.1 ソリトン解の誘導

一様水深場におけるソリトン解は、式 (8) において $h_\tau^* = 0$ とすることによって導かれ、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 + \exp(-2\phi_0), \\ \phi_0 &= K_0(\xi - 4K_0^3 X) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 K_0 ；一様水深場のソリトンの振幅 A_0 と次式の関係にある任意定数である。

* 正 会 員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科
** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科
*** 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

$$K_0 = \sqrt{3A_0}/2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

矢嶋¹⁾にならない, 水深変化の効果は非線形および分散の効果より小さく, また, ソリトン分裂のような現象は生じないものとし, 緩斜面上のソリトン解を次式のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} F &= \{1 + \exp(-2\phi)\}(1+G) \\ \phi &= K\left(\xi - \int V dX\right) + \psi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに, K ; 一様水深場において K_0 に一致する X の関数, V ; ソリトンの波速に関する X の関数, G および ψ ; X および ξ の関数である. また, dK/dX , dV/dX , G および ψ は水深変化の項 h^* と同程度のオーダーであるとする. 式 (11) を式 (8) に代入し, 水深の変化率のオーダーで整理すれば, その 0 次および 1 次ごとにそれぞれ次式が導かれる.

$$4K^2 - V = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{aligned} G_{X\xi} + G_{\xi\xi\xi} + 12K^2G_{\xi\xi} \operatorname{sech}^2\phi \\ = -\{K_X\phi + K\psi_X - 12K^2\psi_{\xi\xi} + 4K\psi_{\xi\xi\xi} \\ + K\psi_{\xi}(16K^2 - V)\} \operatorname{sech}^2\phi \\ + (K_X\phi + \psi_{X\xi} + 9h_X^*K/4h^* + \psi_{\xi\xi\xi\xi}) \\ \times (1 - \tanh\phi) \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

ついで, ϕ に対して任意関数 $\alpha(X)$ を含む次式の関係

$$\phi = \alpha(X)(\phi^2 + 3\phi)/2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

を仮定し, さらに, 座標系を (X, ξ) から (X, ϕ) へ変換すると同時に, 次式の近似

$$\left. \begin{aligned} \partial/\partial\xi &\simeq K\partial/\partial\phi \\ \partial/\partial X &\simeq -4K^3\partial/\partial\phi + \partial/\partial X \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(15)$$

および式 (12) を用いれば, 式 (13) は次式のように書換えられる.

$$\begin{aligned} KG_{X\phi} + K^4\{G_{\phi\phi\phi\phi} - 4(1-3\operatorname{sech}^2\phi)G_{\phi\phi}\} \\ = -\phi(K_X + 8\alpha K^4) \operatorname{sech}^2\phi \\ + (K_X + 9h_X^*K/4h^* - 4\alpha K^4)(1 - \tanh\phi) \\ + K\{\alpha_X(\phi^2 + 3\phi)(1 - \tanh\phi)/2\} \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここで, K および α に対して次式の関係

$$\left. \begin{aligned} K_X + 8\alpha K^4 &= 0, \\ K_X - 4\alpha K^4 + 9h_X^*K/4h^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

を仮定し, $X=0$ における K を K_s と表せば, K および α はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} K &= K_s/(h^*)^{3/2}, \\ \alpha &= 3h_X^*/16K^3h^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

のように表され, G を決定する偏微分方程式

$$\begin{aligned} G_{X\phi} + K^3\{G_{\phi\phi\phi\phi} - 4(1-3\operatorname{sech}^2\phi)G_{\phi\phi}\} \\ = \{\alpha_X(\phi^2 + 3\phi)(1 - \tanh\phi)/2\} \quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

が導かれる.

以上より, 緩斜面上のソリトン解は式 (1) の解として次式のように与えられる.

$$\begin{aligned} \eta &= (4K_s^3/3h^*)\{\operatorname{sech}^2\phi + \alpha(2\phi + 3)\operatorname{sech}^2\phi \\ &\quad - \alpha(1 - \tanh\phi) + G_{\phi\phi}\} \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

上式の右辺の括弧内の第 1 および第 2 項は波形の前傾化を含んだ緩斜面上のソリトンモード, 第 3 項は 'plateau' と呼ばれる分散波, および第 4 項は式 (19) に支配される 'tail' と呼ばれる分散波成分をそれぞれ表し, 斜面勾配をゼロとした場合には, 式 (20) は次式の一様水深場のソリトン解に一致する.

$$\eta = A_0 \operatorname{sech}^2\phi_0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

これから, 緩斜面上では, 水深変化によるせつ動のために, 一様水深場におけるソリトンに波形の前傾歪みだけでなく, 'plateau' および 'tail' から成る分散波も加わり, ソリトンの振幅の変化のみでは説明出来ない波形の変化が生じることがわかる. したがって, こうした波形の前傾歪みや分散波の影響の程度を明らかにすることなく, ソリトンの浅水変形を Rayleigh の仮定に基づいて扱ったり, 斜面上の波浪を一様水深場でのソリトンを基準モードとして表示することには問題があると言える.

3.1 分散波 (tail) の表示

式 (20) の第 4 項の分散波 $G_{\phi\phi}$ は, 式 (19) の解として与えられる. $G_{\phi\phi}$ はソリトンの後方において寄与すると考え, 式 (19) を ϕ で微分すると, 式 (19) は次式のように漸近近似出来る.

$$\begin{aligned} G_{X\phi\phi} + K^3(G_{\phi\phi\phi\phi} - 4G_{\phi\phi\phi}) &= \alpha_X(1 - \tanh\phi) \\ \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここで, 階段関数 $H(X)$ を用いて次式の近似

$$\alpha = \alpha H(X), \quad 1 - \tanh\phi \simeq 2\{1 - H(X)\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

を行い, さらに, $\partial/\partial X$ および $\partial/\partial\phi$ を不連続点での微分を含む広義の微分演算子 $\mathcal{D}_X$ および $\mathcal{D}_\phi$ で置換え,

$$f = G_{\phi\phi} \quad \dots\dots\dots(24)$$

と置けば, 式 (22) は次式のように書換えられる.

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_X + K^3(\mathcal{D}_\phi^3 - 4\mathcal{D}_\phi)]f \\ = 2\{\alpha\delta_{(X)} + \alpha_X H(X)\} \{1 - H(\phi)\} \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

ここに, $\delta_{(X)}$ は Dirac のデルタ関数である. f で表される分散波は水深変化によって生じると考えられることから, f としては式 (25) の特殊解のみを考えればよく, 次式のように導かれる.

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} dw dX' d\phi' [H(X - X')\{1 - H(\phi')\} \\ &\quad \times \{\alpha\delta_{(X')} + \alpha_X H(X')\} \exp\{iK^3(w^3 - 4w) \\ &\quad \times (X - X') + iw(\phi - \phi')\}] \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ついで, 次式のような近似

$$\phi + 4K^3 \simeq K\xi \quad \dots\dots\dots(27)$$

を行い, 座標系を (X, ϕ) から (X, ξ) へ変換し, ξ に関する積分を実行すれば,

$$\sigma = Kw, \quad y = \xi/X^{1/3} \quad \dots\dots\dots(28)$$

とすることにより, 式 (26) は次式のようになる.

$$f = \alpha - \frac{2\alpha_{(0)}}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\sin(\sigma y + \sigma^3)}{\sigma}$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^X dX' d\sigma [\alpha_X \sin\{\sigma\xi + \sigma^3(X-X')\}] \quad \dots\dots\dots(29)$$

一様な傾斜海浜 (h_τ 一定) を仮定したときの ‘tail’ f は、オーダー的に $K=$ 一定と考えることにより、次式で表示される。

$$f = \frac{3h_\tau^*}{32h^*K^3} - \frac{3h_\tau^*}{16\pi K^3} \int_0^\infty d\sigma \frac{\sin(\sigma y + \sigma^3)}{\sigma} + \frac{3(h_\tau^*)^2}{16\pi K^3} \int_0^\infty \int_0^\tau d\tau' d\sigma \left[\frac{1}{h^{*2}\sigma} \sin\{\sigma\xi\} + \frac{\sigma^3}{6} \int_{\tau'}^\tau \sqrt{h^*} d\tau' \right] \quad \dots\dots\dots(30)$$

4. 緩斜面上におけるソリトンの変形

4.1 緩斜面上のソリトンの境界条件

ここでは、一様水深場において A_0 の振幅を持つソリトンが一様勾配 ($\tan\theta$) の緩斜面上を伝播するときの変形を扱うため、次式のように水深が変化する海浜を考える。

$$h_\tau^* = \begin{cases} 0 & ; \tau < 0 \\ \text{const} & ; \tau > 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(31)$$

上式により明かなように、 $\tau=0$ において海浜が屈曲しており、しかも、式 (20) および (21) はそれぞれ一様な緩斜面上および水深におけるものであるため、式 (21) を $\tau=0^+$ における式 (20) の境界条件としてそのまま用いることが出来ない。

そこで、式 (1) から導かれる最低次の積分量である運動量に着目し、これを $\tau=0^+$ において接続させることにより式 (20) の境界条件とする。これより、前述の局在波の条件を用いれば、次式に示す K_s に関する3次方程式が導かれる。

$$K_s^3 - \sqrt{3}A_0K_s/2 + 16h_\tau^*/27 = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

カルダノの公式を用いれば、 A_0 と K_s の関係は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_s &= \sqrt{A_0}\gamma(\lambda), \\ \gamma(\lambda) &= (a+b)^{1/3} + (a-b)^{1/3} + \sqrt{3}/6, \\ a &= \sqrt{3}/72 + 27\lambda/32, \\ b &= \sqrt{3}\sqrt{\lambda}/32 + 729\lambda^2/256 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここに、 $\lambda = -h_\tau^*/A_0^{3/2}$ である。いま、 $\tau \rightarrow 0^+$ の極限において斜面勾配もゼロになるものとすれば、 $\gamma = \sqrt{3}/2$ となり、 K_s は簡単に次式で表される。

$$K_s = \sqrt{3}A_0/2 \quad \dots\dots\dots(34)$$

以下では、式 (34) を $\tau=0$ における境界条件として用いる。

4.2 振幅および曲率の浅水変化

前述したように、式 (20) の右辺第1および第2項は傾斜海浜上でのソリトンを示す。いま、ソリトンの波峰に着目しているとすれば、

$$\left. \begin{aligned} \phi &\simeq \vartheta \{1 + \alpha(\vartheta+3)/2\}, \\ \vartheta &= K \left(\xi - 2 \int_0^\tau K^3 c d\tau/3 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(35)$$

のように近似でき、 α の1次オーダーで表したソリトンは次式で与えられる。

$$\eta_s \simeq (4K_s^2/3h^*) \{1 + \alpha(2\vartheta+3)\} \times \text{sech}^2 \vartheta \{1 + \alpha(\vartheta+3)/2\} \quad \dots\dots\dots(36)$$

ソリトンの振幅は、 $\vartheta=0$ での η_s に等しいと考えれば、次式によって表わされる。

$$A \simeq (4K_s^2/3h^*)(1+3\alpha) \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここで、式 (34) を用い、一様水深場におけるソリトンの振幅 A_0 に対する比として式 (37) と書換えれば、振幅の浅水変形が λ をパラメータとして次式で表される。

$$A/A_0 = \{1 - 3\sqrt{3}\lambda h^*\}/h^* \quad \dots\dots\dots(38)$$

孤立波や海岸波浪の浅水変形に関する実験および観測結果との比較を行う場合、式 (38) には ‘plateau’ などの分散波の影響が含まれていないため、これを含めた峯高 η_0 についての浅水変形の表示を導く必要がある。ソリトンの位相速度は ‘plateau’ とは一致しているが、‘tail’ とは異なっているため、緩斜面上での一定距離の伝播後には ‘tail’ の η_0 への影響は無視出来るようになり、 η_0 の浅水変化は次式で与えられる。

$$\eta_0/A_0 = [\text{sech}^2 \phi_0 - \sqrt{3}\lambda h^* \{(2\phi_0+3)\text{sech}^2 \phi_0 - (1-\tanh \phi_0)\}]/h^* \quad \dots\dots\dots(39)$$

ここに、 ϕ_0 は次式によって決定される変数である。

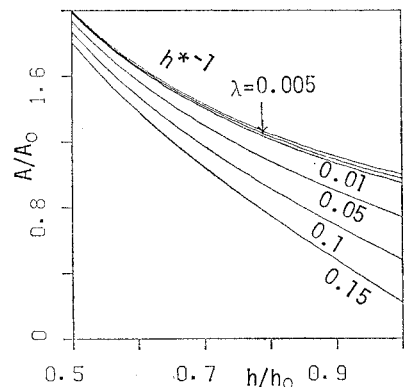
$$3\sqrt{3}\lambda h^* + 2\{1 - \sqrt{3}\lambda h^*(2\phi_0+3)\} \tanh \phi_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(40)$$

ソリトンの波峰における曲率の浅水変化は、式 (36) より、次式のように導かれる。

$$\rho/\rho_0 = \{1 - 3\sqrt{3}\lambda h^*\}^2/h^{*4} \quad \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 ρ_0 は一様水深場でのソリトンの曲率である。

図—1 は式 (38) によって与えられるソリトンの振幅の浅水変化を種々の λ に対して示したものであり、図中に比較のための水深の -1 乗則による振幅の変化を示



図—1 ソリトンの振幅の浅水変化

す。一様水深場から緩斜面への進入直後に‘plateau’および‘tail’から成る分散波が発生するため、ソリトンの振幅は一度減少した後に増大して行く傾向にあることがわかる。この傾向は、 λ が増すに従って著しくなり、分散波の発生を考慮していない-1乗則と大きく異なっていくが、逆に λ の値が0.01程度になると、-1乗則との相違は無視出来るようになることがわかる。

図-2は、式(39)によって与えられる峯高 η_0 の浅水変化を示したものである。この場合には、‘plateau’の影響も考慮されているため、斜面上への進入直後に生じる急減衰も小さく、結果的には、却って Rayleigh の仮定に基づく-1乗則に近くなっている。

図-3は、Street ら²⁾によって提案された孤立波の波高変化に関する実験式による結果との比較を示したものであり、図中の×印は碎波点を示す。波高変化の傾向に相違はあるものの、両者はほぼ対応しているものと判断される。

図-4は、式(31)によって計算したソリトンの波峯での曲率 ρ の浅水変化を一様水深場での曲率 ρ_0 に対する比として示す。この場合には入による影響は小さく、波峯での曲率から見たソリトンの波形変化に及ぼす斜面勾配の影響は小さいことがわかる。

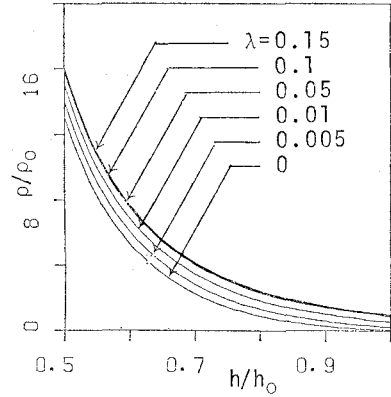


図-4 ソリトンの波峯の曲率の浅水変化

4.3 波形の前傾化の浅水変化

ソリトンの前傾は式(36)における $2\alpha\theta$ の項によって引起される。そこで、ソリトン幅パラメータとして知られる $\phi=-1$ の位相での $2\alpha\theta$ の値によって、ソリトンの前傾化の程度を評価する。ソリトンの前傾化を表わす指標を $\mu=2\alpha\theta$ とすれば、式(35)を用いることにより、指標 μ は次式で定義される。

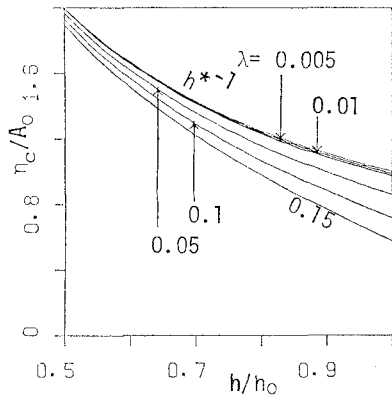


図-2 ソリトンの峯高の浅水変化

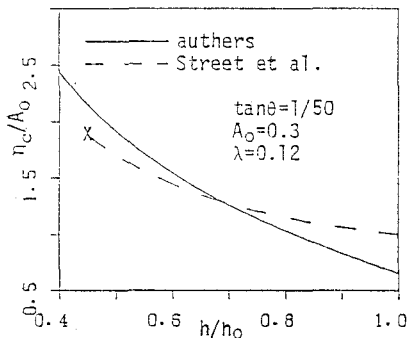
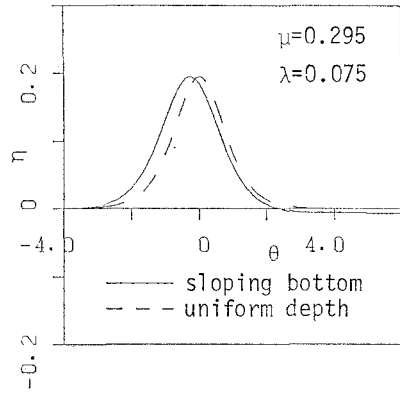
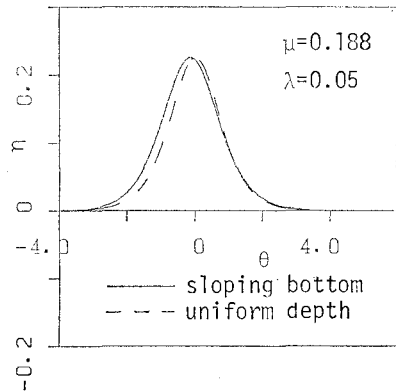


図-3 Street らの実験式との比較

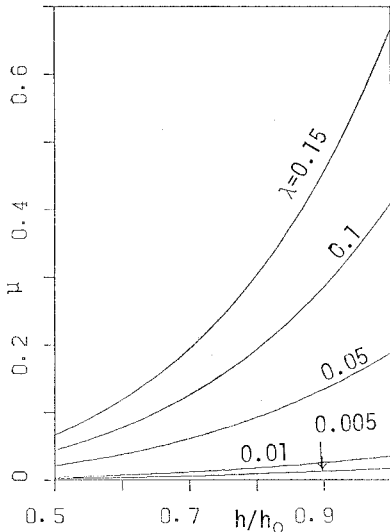


(a)



(b)

図-5 一様水深場と緩斜面上のソリトンの波形の比較

図—6 前傾指標 μ の浅水変化

$$\mu = \sqrt{\{2 - 3\sqrt{3}\lambda h^{*3}\}^2 + 8\sqrt{3}\lambda h^{*3}} - 2 + 3\sqrt{3}\lambda h^{*3} \quad \dots\dots\dots(42)$$

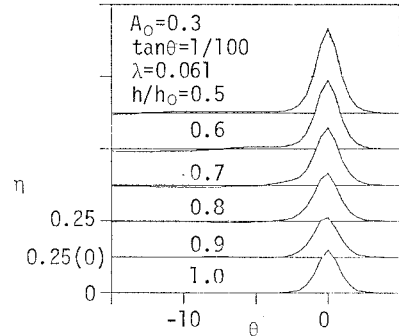
図—5 は、式 (42) によって定義された μ と式 (20) による波形の前傾との対応を見るため、一樣水深場と傾斜海浜上での $h/h_0=0.99$ ソリトンのにおける波形との比較を示したものである。これから、波形の前傾指標として μ が適切であることがわかる。

図—6 は、前傾化指標によって浅水化に伴うソリトンの前傾化の変化を示したものである。波形の前傾化は入の値が増すに従って著しくなるが、いずれの場合も斜面上への進入直後に最も前傾が大きくなり、その後は浅水化に伴って一様に減少していることがわかる。これは、前述の 図—4 に示した浅水化に伴う曲率の急増によって前傾が抑えられるためと考えられ、このときのソリトンの波形変化は崩れ波型砕波に至る浅水変形に対応したものと考えられる。

4.4 分散波の影響

前述の式 (20) によって示されるように、斜面上ではソリトンに随伴して必ず分散波が生じるが、斜面上への進入直後では ‘plateau’ と ‘tail’ が互いに打消し合うため、ソリトンへの影響は現れない。しかしながら、一定距離の伝播後には ‘plateau’ と ‘tail’ の位相がずれ、これらの影響が陽になって来る。

図—7 は $\lambda=0.061$ について式 (20) による波形の浅水変化を示したものである。 $h/h_0=0.9$ において分散波の影響が最も強く現れているが、無視出来る程度の影響



図—7 分散波を伴うソリトンの波形の浅水変化

であり、しかも、これよりも浅水化が進むと相対的に分散波の影響は弱くなるため、 $\lambda=0.061$ 程度では分散波の影響は無視出来るものと判断される。

5. 結 言

矢嶋の手法によって導かれた斜面上の KdV 方程式のソリトン解を基に、一樣水深場から緩斜面上に進入して来たソリトンの浅水変形特性について検討を行い、 $\lambda = \tan\theta/A^{3/2}$ がこのときのパラメータとなることを示した。その結果、斜面勾配の影響を受けたソリトンは ‘plateau’ および ‘tail’ から成る分散波を励起することによって安定化するため、Rayleigh の仮定に基づく水深の -1 乗則による結果とは異なり、ソリトンの振幅は分散波の励起に伴って急減少した後に増大に転じる浅水変化を示すことがわかった。しかしながら、Rayleigh の仮定とは逆に、分散波を含めた場合の見掛けのソリトンの峯高の浅水変化は、却って水深の -1 乗則に近くなり、見掛けの峯高の浅水化を扱う実験式との比較も良好になることを見出した。また、ソリトンの波形の歪みを波峯の曲率および前傾化によって評価し、勾配が $1/50$ 以下の緩斜面上では曲率の効果によって前傾が抑えられ、前傾よりも波形の尖鋭化が進むことがわかった。分散波のソリトンの波形に及ぼす影響は $\tan\theta/A^{3/2}$ が 0.05 以下であれば無視出来る程度であり、一樣水深場のソリトンモードが斜面上においても安定と考えて問題のないことが明らかとなった。

参 考 文 献

- 1) Yajima, N.: Application of Hirota's method to a perturbed system, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 51, No. 4, 1982, pp. 1298~1302.
- 2) Street, R. L. and F. F. Camfield: Observations and experiments on solitary wave deformation, Proc. 10th Conf. on Coastal Eng., 1966, pp. 284~301.