

波向線座標における放物型方程式を用いた 屈折・回折の計算法

磯 部 雅 彦*

1. 序 論

水深が変化する領域に構造物が設置される場合などでは、屈折と回折を同時に考慮して波動場を求める必要がある。このために、伊藤・谷本^{1),2)}の数値波動解析法、Berkhoff³⁾の緩勾配方程式、さらに、渡辺・丸山⁴⁾の非定常緩勾配方程式が提案されているが、いずれも多くの計算時間を必要とする。これに対し、緩勾配方程式の近似式として、Radder⁵⁾や Tsay・Liu⁶⁾によって放物型方程式が導かれている。緩勾配方程式が楕円型の偏微分方程式であるため繰り返し計算を必要とするのに比較すると、放物型方程式では沖側から順に解が求められるので、計算時間が非常に少なくて済む。従って、成分波の重ね合わせによって不規則波の屈折・回折の計算を行なうような場合に、非常に有利である。また、ラディエーションストレスの計算や碎波減衰モデルの導入も容易になると考えられる。しかし、放物型方程式の精度が良いのは、座標軸が波の進行方向に近い場合に限られる⁷⁾。従って、防波堤と入射波向とのなす角が大きような場合には、従来の方法を用いることができない。この研究においては、波向線と波峯線に近い直交曲線座標を導入し、放物型方程式を導く。これにより、より一般的な場合に放物型方程式が適用できるようにして、応用性を高める。

2. 理論式の誘導

(1) 基本的な考え方

既に導かれている2種の放物型方程式のうち、Radder⁵⁾によるものでは、デカルト座標系が用いられている。従って、屈折等によって波向が場所的に変化する場合には、座標軸と波向線がずれる領域ができてしまうため精度が低下する。Tsay・Liu⁶⁾によるものでは、スネルの法則に従う直交曲線座標系が用いられているため、屈折による波向変化があっても精度はよい。しかし、構造物とは無関係に座標系が決定されるため、構造物と入射波向との交差角が大きの場合のしゃへい領域における計算精度に問題が生ずる。さらに交差角が90°以上にな

れば、計算領域が急激に増大するため、計算不可能となる。

屈折と回折が同時に起こる場合でも、通常は波がホイヘンスの原理に従って進むのが観察される。そこで、この原理に基づいて座標系を決定することにし、これを波向線座標系と呼ぶことにする。図-1を例にとると、港内に直接入射する波向線については通常の屈折計算によるものであり、しゃへい領域については防波堤先端から放射線状に出る波向線が屈折したものとなる。このような波向線とそれに対応する波峯線とを2組の座標軸とするのである。波向線座標系において放物型方程式を導くと、局所的にはほぼ単一の進行波（あるいは波向の近い進行波の重ね合わせ）と見なせる限り、波の場を精度よく計算することができるはずである。

(2) 波向線座標系の決定

図-2に示す直交曲線座標系 (ξ, η) を考え、直交曲線座標系であることに注意して以後の微分積分操作を行なう⁸⁾。 ξ と η のスケールは任意であるが、スケールファクターをそれぞれ h_ξ および h_η とすれば、 $h_\xi d\xi$ および $h_\eta d\eta$ は微小区間 $d\xi$ および $d\eta$ の長さを表わす。ここで、 ξ 軸が波向線と一致するためには、 ξ 軸の方向

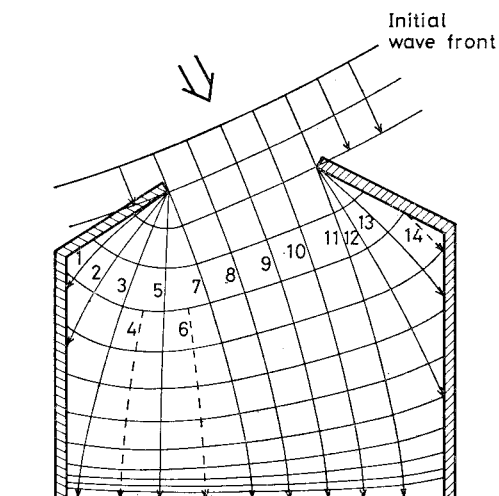


図-1 波向線座標系の一例

* 正会員 工博 横浜国立大学助教授 工学部建設学科

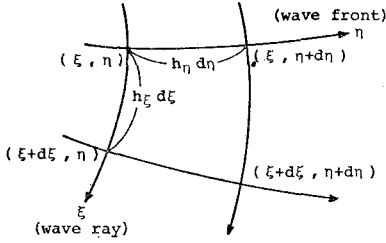


図-2 直交曲線座標系

角 α が通常の屈折における波向線方程式⁹⁾,

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{1}{K} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots(1)$$

を満足するようにすればよい。ここに、 K は波数であるが、実際の水深から分散関係式によって計算されるものを用いると波向線同志が交差する場合もある。そこで、Tsay・Liu⁶⁾と同様、交差しないように修正された仮の水深に対応するものをとる。たとえば、浅瀬がある場合の計算では、その凸部を取り除いた水深を仮の水深とすればよい。なお、 ξ のスケールは任意であるから、波数を K とした場合の位相に等しくなるように決めるとわかりやすい。この場合 $h_\xi = 1/K$ となる。

実際に ξ 軸に沿った点の座標 (x, y) を求めるには、

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{d}{d\xi} (x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \dots\dots\dots(2)$$

と式(1)を組み合わせて解けばよい。ただし、図-1のように構造物によるしゃへい領域が生ずる場合には、構造物先端から新たな放射状の波向線を出すようにする。また、 η 軸は $\xi = \text{const.}$ となる線として決定される。

(3) 放物型方程式の誘導

水深変化が緩やかな場合の微小振幅波の屈折・回折を支配する方程式として、基礎方程式を水深方向に重み付き積分することにより、緩勾配方程式が得られる^{9),10)}。

$$\nabla(GF\phi) + k^2 G\phi = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $G = cc_g$ (c : 波速, c_g : 群速度), k は実際的水深から分散関係式によって定まる波数であり、 ∇ は水平2方向の微分演算子を表す。 ϕ は水面変動の複素振幅であり、これを用いると水面変動と速度ポテンシャル ϕ は、

$$\zeta = \phi e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi = \frac{g}{i\omega} \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \phi e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots(5)$$

と表わされる。ここに、 ω は角周波数、 g は重力加速度、 d は実際的水深、 z は水面を基準とした鉛直上向の座標、 t は時間である。

式(3)を直交曲線座標系 (ξ, η) によって表わせば、

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(G \frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right\} + k^2 G \phi = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる。式(6)は ξ と η に関する2階微分を含む楕円型偏微分方程式であるが、Radder⁵⁾と同様な手続きにより、 ξ の2階微分を含まない放物型偏微分方程式に近似する。

まず、式(6)より、

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = - \frac{1}{G h_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (G h_\eta)}{\partial \xi} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \left\{ \frac{1}{G h_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + k^2 \right\} \phi \quad \dots\dots\dots(7)$$

である。ここで、 ϕ が局所的に ξ 軸の正方向と負方向に進む進行波 ϕ^+ と ϕ^- との和によって表わされると仮定する。すなわち、

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\phi^\pm \sim a^\pm \exp \left(\pm i \int k h_\xi d\xi \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

である。式(8)および(9)より、

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = i k \phi^+ - i k \phi^- \quad \dots\dots\dots(10)$$

となるが、式(8)および(10)を ϕ^+ について解けば、

$$\phi^+ = \frac{1}{2} \phi + \frac{1}{2 i k} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。式(11)を ξ 方向に微分し、式(7)を代入して整理すれば、

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi^+}{\partial \xi} = - \frac{1}{2 i k} \left\{ \frac{1}{G h_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + k^2 \right\} \phi^+ + \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 i k^2} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{1}{2 i k} \frac{1}{G h_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (G h_\eta)}{\partial \xi} \right\} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots(12)$$

を得る。式(12)の右辺に式(8)および(10)を代入し、 ϕ^+ および ϕ^- について整理した後、 ϕ^- は ϕ^+ に比べて小さいものとして無視し、 ϕ^+ を改めて ϕ と書き直せば、

$$\frac{1}{G h_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + 2 i k \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left\{ \frac{i}{G h_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (k G h_\eta) + 2 k^2 \right\} \phi = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。ここで、未知関数の変化を緩やかにするため、

$$\phi = \phi \exp \left(i \int K h_\xi d\xi \right) \quad \dots\dots\dots(14)$$

とおけば、式(13)は、

$$\frac{1}{G h_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + 2 i k \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \left\{ \frac{i}{G h_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (k G h_\eta) + 2 k (k - K) \right\} \phi = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。

式(13)および(15)は、 ϕ あるいは ψ に関する放物型方程式であり、沖側での η 軸に沿って入射波の条件が与えられれば、 ξ 軸方向の勾配が計算できることか

ら、順に岸側の解が求められる。なお、 (ξ, η) 座標系がデカルト座標系と一致する場合には、ここで導いた式は Berkhoff ら¹¹⁾に用いられたものと一致する。

放物型方程式の誘導法や用いられる仮定は複数考えられ、それぞれ微小項の部分が若干異なる結果が得られる。たとえば、式 (9) における振幅 $a^\pm$ を波向線の幅 h_η とエネルギー的に関連づけ、 $1/\sqrt{h_\eta}$ に比例するとおいても放物型方程式が得られる。しかし、回折効果を考えると式 (9) の方がよいようである。また、Tsay・Liu⁶⁾によるものでは、浅瀬における浅水係数に若干の誤差が生ずることが理論的に確かめられる。他にも 2, 3 試みたが、実際の数値計算で最も精度が高いのがここで求めたものであった。

(4) 放物型方程式の物理的解釈

Berkhoff ら¹¹⁾にならって放物型方程式の物理的意味を明らかにする。まず、 ϕ を振幅 a と位相 ε とに分離し、

$$\phi = ae^{i\varepsilon} \dots\dots\dots(16)$$

とおいて、式 (15) に代入すれば、実数部と虚数部から、

$$\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = k - K - \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2akGh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(a^2 k G h_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a^2 \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} G h_\xi \right) \right] = 0 \dots\dots\dots(18)$$

を得る。式 (17) を書き改めると、

$$\left(K + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right)^2 = k^2 + \left\{ k - \left(K + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) \right\}^2 + \frac{1}{aGh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) \dots\dots\dots(19)$$

となる。

式 (19) の左辺は波数ベクトルの絶対値の自乗を表わしており、式 (17) を見ると式 (19) の右辺第 2 項はほぼ 0 となるため、式 (19) は屈折問題において位相 (波向) を定める eikonal 方程式に似ていることがわかる。ただし、右辺第 3 項の影響で、波峯線方向に波高が上に凸になると、見かけ上波数が小さくなり (水深が深くなり) 波向線が広がる。このため、波向線が交差することはない。

式 (18) に $G = \omega c_0 / k$ を代入すれば、この式がほぼエネルギー保存の式となっていることがわかる。しかし、1 番目の () 内で波向に対する ξ 軸の方向余弦が抜けている。従って、方向余弦を 1 とおけない程に ξ 軸と波向がずれてしまうと、放物型方程式の精度は低下する。

(5) 境界条件

完全反射の境界条件として、境界に対する法線方向の

ϕ の微分を 0 とする。式 (14) によって ϕ に変換すれば、

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + iK\phi \right) \tan \delta = 0 \dots\dots\dots(20)$$

となる。ここに、 δ は ξ 軸から η 軸方向へ測った境界線の方角角である。しゃへい領域では ξ 軸がほぼ境界に沿うため、反射領域でのみ δ の絶対値が有意になる。

式 (20) の () のうち、第 1 項は第 2 項に比べて通常小さい。また、半無限堤による反射領域での回折係数を数値計算したところ、第 1 項を無視する方がむしろ厳密解に近い値が得られた。そこで以後の計算では、

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - iK\phi \tan \delta = 0 \dots\dots\dots(21)$$

を用いることとした。この理由は完全に明らかでないが、式 (18) に含まれるエネルギー保存式に対する誤差を式 (21) の誤差が補う結果になっているようである。

3. 数値計算の方法

与えられた一定の位相差 4π に対し、波向線座標を決定するために式 (1) および (2) を解くには、Runge-Kutta 法を用いた。放物型方程式 (15) の計算には完全陰形式差分法および Crank-Nicholson 法を試みたが、格子間隔を粗くした場合にも比較的精度が高いことから、最終的には Crank-Nicholson 法に決定した。これに対応し、境界条件式 (21) の差分でも、既知の波峯線と未知の波峯線に対する重みを 0.5 ずつとした。

概略の計算手順を以下に示す。

- 1) スネルの法則によって計算を開始する波峯線と、その上での ϕ の値を定める。
- 2) 式 (1) および (2) により、波向線を 1 ステップ岸側へ進め、次の波峯線およびそこでの波向角を計算する。この際、端部からしゃへい領域が広がる場合には、図—1 中の 1, 2, 3, 5 あるいは 12, 13 のように新たに放射状の波向線を加える。また、波向線の間隔が広がり過ぎたら、図—1 中の 4, 6 あるいは 14 のように波向線を内挿、外挿する。
- 3) 放物型方程式 (15) を解き、新たな波峯線上での ϕ を計算する。
- 4) 計算したい領域を覆うまで 2) と 3) を繰り返す。

数値計算のプログラムでは、一般性をもたせるため、地形、波の進行方向に対する左右の境界、および入射波の周期・波向・(波高)を入力することにより、解が求められるようにした。

4. 計算結果

(1) 解析解との比較

一様勾配斜面上における波の屈折による波高変化を計算し、スネルの法則と比較したものが図—3 である。入

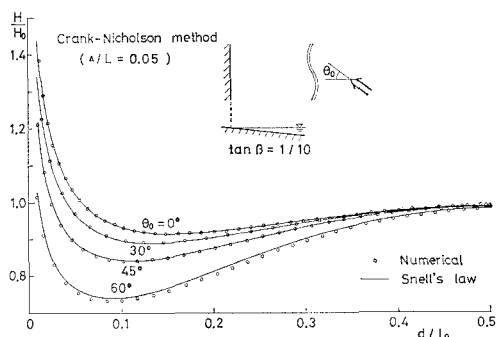


図-3 屈折による波高変化の計算結果

射角が大きくても精度は良好であることがわかる。

一様水深部に設置された半無限堤に対して波が直角に入射する場合の回折係数 K_d を計算した。格子間隔は波向線・波峯線方向ともに d とし、波長に対する値を変化させて計算した結果が、図-4 において Sommerfeld の解¹²⁾と比較されている。格子間隔を粗くしても、しゃへい領域での精度はよい。しかし、A-B 部の波高の細かな振動については、 $d/L=0.05$ としてもなお振動周期が若干ずれてしまう。ただし、重ね合わせ法によって不規則波を扱うような場合には、波高分布が平滑化されてしまうので、問題はないと考えられる。図-5 は、入射角を変化させた場合に、半無限堤の裏側に沿った回折係数を Sommerfeld の解と比較したものであるが、計算精度は良好である。

図-6 中の白抜きの点は、半無限堤前面の反射領域における回折係数の計算値を表す。実線で示す Sommerfeld の解と比較すると、(a) に見られるように入射角が 30° 以下ならば堤体前面では精度がよいものの、堤体から離れた場所での精度は悪くなることが (b) からわかる。そこで、図中の黒塗りの点は、まず入射波に対して

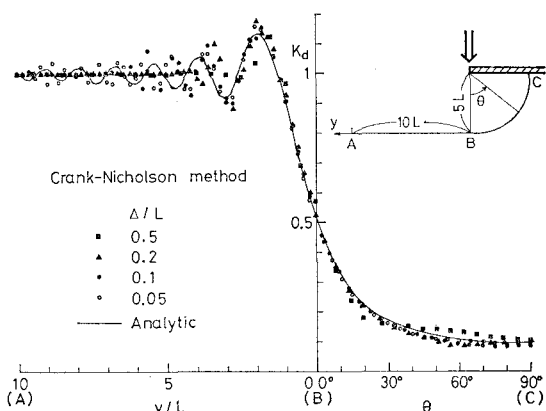


図-4 半無限堤による回折の計算精度と格子間隔の関係

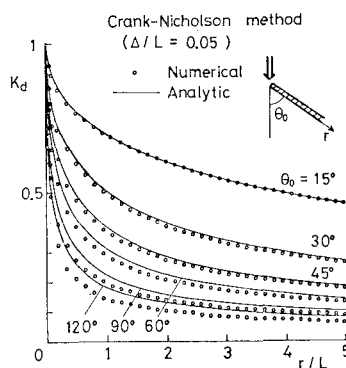


図-5 半無限堤背後の回折係数の計算結果

90° の方向に仮想的な半無限堤を考えて回折計算を行ない、実際の半無限堤のところで反射するものとして鏡像点の解を重ね合わせる方法で試算した結果である。堤体沿いの波高分布については精度の向上が見られないものの、堤体から離れたところでの計算精度がよくなることからわかる。従って、直立壁に囲まれた港内のように多重反射が起こる場合を除き、ここでの放物型方程式の適用範囲が拡張され得ることを示唆している。なお、仮想的な堤体の方向は 90° 程度以上ならば結果に大きな差はな

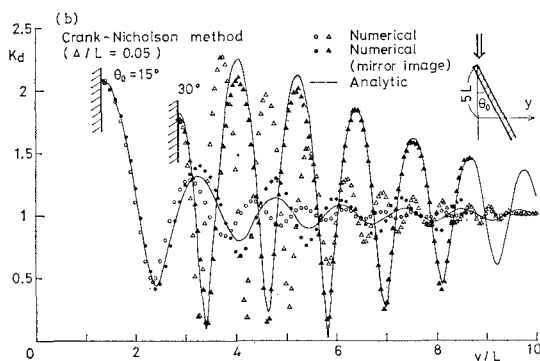
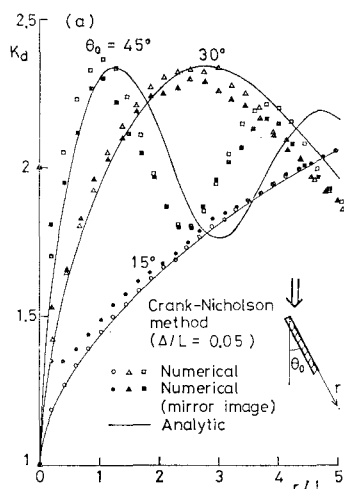


図-6 半無限堤前面の反射領域における回折係数の計算結果

い。

(2) 実験結果との比較

図-7 は、斜面上に防波堤を設置した場合の波高分布を調べるための実験装置である。周期 $T=0.83$ s, 入射波高 $H_I=9.1$ cm, 入射角 $\theta_I=18^\circ$ とした場合の沿岸方向の波高分布が図-8 に示されている。実線で示す計算値との一致は良好である。Tsay・Liu⁶⁾ に示されている実験結果も含めて計算値と比較したところ、しゃへい領域での回折係数の計算精度は良好であった。しかし、入射波の通過領域における波高の振動が若干ずれたり、反射領域での波高変化が小さくなったりした。これは、図-4 および 6 において解析解と比較した場合と同様である。

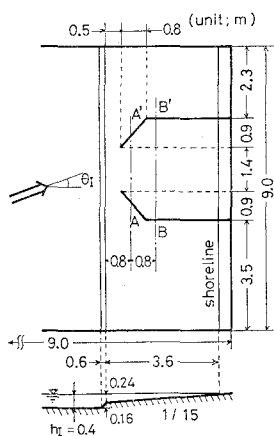


図-7 実験装置

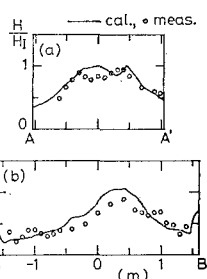


図-8 防波堤間の波高分布の計算例

また、Berkhoff¹¹⁾ による浅瀬背後の波高分布についても、計算結果との比較を行なった。底面勾配は 1/50 で、もともと水深約 33 cm であった場所に最大厚さ 20 cm の浅瀬が作られている。斜面に対する入射角が約 20° と小さいため、Berkhoff らの論文に示されている放物型方程式の計算結果と本研究での計算結果はほぼ一致した。また、計算結果は実験結果とも概ね一致するものの、横方向（沿岸方向）の波高分布において、波高が極小になる位置が若干ずれてしまう。これについては、有限振幅性を考慮することにより、計算精度が向上することが、Kirby・Dalrymple¹³⁾ によって報告されている。

5. 結 論

ホイヘンスの原理に従う波向線と波峯線に基づく直交曲線座標系を波向線座標系と呼ぶことにし、この座標系において屈折・回折計算を行なうための放物型方程式を

誘導した。これを一般的な条件で数値計算することができ、プログラムを作成した。計算結果を解析解（スネルの法則、Sommerfeld の解）および実験結果と比較したところ、波高分布の細かな変動には若干のずれが生じるものの、かなり良い精度で計算結果が得られることがわかった。また、反射領域での精度を上げるためには、鏡像を利用した計算法の修正をすればよいことがわかった。今後、碎波減衰なども含めたモデルの拡張が可能であると思われる。

なお、この研究について横浜国立大学の泉官尊司助手と有益な討論を行なった。実験は当時学生であった大中晋君、杉浦淳君、吉村信次君によって行なわれたものである。また、五洋建設株式会社から研究費を得た。ここに記して感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——，第 18 回海岸工学講演会論文集，pp. 67～70, 1971.
- 2) 伊藤喜行・谷本勝利：波向線交差領域での波の屈折——数値波動解析法の応用 (2)——，第 19 回海岸工学講演会論文集，pp. 325～329, 1972.
- 3) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp. 471～490, 1972.
- 4) 渡辺 晃・丸山康樹：屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法，第 31 回海岸工学講演会論文集，pp. 103～107, 1984.
- 5) Radder, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 95, pp. 159～176, 1979.
- 6) Tsay, T.-K. and P. L.-F. Liu: Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation, J. Geophys. Res., Vol. 87, pp. 7932～7940, 1982.
- 7) 橋本 宏：放物型方程式による屈折・回折の数値計算，第 29 回海岸工学講演会論文集，pp. 115～119, 1982.
- 8) たとえば、矢野健太郎・石原 繁：ベクトル解析，第 14 章，裳華房，350 p., 1964.
- 9) たとえば、堀川清司編：海岸環境工学——海岸過程の理論・観測・予測手法，第 1 編，4.2 節，東京大学出版会，582 p., 1985.
- 10) Mei, C. C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, 3.5, John Wiley and Sons, Inc., New York, 740 p., 1983.
- 11) Berkhoff, J. C. W., N. Booy and A. C. Radder: Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., Vol. 6, pp. 255～279, 1982.
- 12) たとえば、石原藤次郎・本間仁編：応用水理学，中 II，2・9・7，丸善，536 p., 1958.
- 13) Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple: Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, Coastal Eng., Vol. 8, pp. 219～232, 1984.