

崩れつつ進行する波のポテンシャル成分と 渦度成分の分離方法について

日野 幹雄*・灘岡 和夫**・小谷野喜二***

1. はじめに

砕波帯内における波浪変形や砂移動の問題を取り扱うには、砕波帯内の流速場の構造を把握しておく必要がある。こうした要請と LDV 等の新しい流速計の登場を背景として、近年、砕波帯内の流速場の構造を実験的に明らかにしていこうとする気運が高まってきている。その結果、これまでのところ平均流や乱れ強度といった基本的諸量の空間分布構造については実験結果がかなり蓄積されてきており、mixing layer 等の通常の自由せん断乱流の構造との類似性についても議論されている。しかしながら、こういった数多くの実験的研究の蓄積にもかかわらず、これまでのところ砕波帯内の流速場の本質的特徴を描き出す段階までには至っていない。

砕波という現象を数学的な言葉を用いて表現すると、基礎式である Laplace の方程式と境界条件の全てを同時に満たすことの可能な速度ポテンシャルが存在しない状態の擬似的な波動であるというふうに言い表わせる。ここで“擬似的な波動”と述べたのは、ポテンシャル成分のみによる純粋ないわゆる“波動”と区別したかったためで、砕波の場合には、“波動”の要素以外に、砕波による境界条件の局所的破綻に伴って多量の非ポテンシャル成分（すなわち渦度成分）が発生することにより、いわば、“流れ”的要素が加わることになる。したがって、砕波帯内の波のように崩れつつ進行する波のもとの流速場の特徴を（通常の波動場との対比で）明確に把握するためには、この渦度成分が流速場全体に果たす役割を明らかにしておく必要がある。

このような目的のために、本論文では砕波帯内の流速場のポテンシャル成分と渦度成分への分離という考え方を導入し、そのための分離方法を具体的に提案している。分離にあたっては対象とする流速場に含まれるポテンシャル成分を算定する必要があるが、砕波帯内の流速場の場合には上述のように表面条件が部分的に満足されないため例えば Dean の流れ関数法¹⁾などを用いること

には原理的な難点がある。そのようなことから、ここでは、渦度がほぼゼロで事実上ポテンシャル成分のみとなっている測定点での流速記録を基準としてその Fourier 解析により場全体のポテンシャル成分を算定するという手法を用いた。

本手法は、まず砕波していない通常の波動場に適用され、上述のポテンシャル成分算定法の有効性が確かめられた。次いで、砕波帯内の流速場に適用して具体的に成分分離を行った例を示した。最後に、ポテンシャル流速成分を用いてそれに対応する表面波形を逆算する方法を示し、それを用いて、表面波形に対する渦度効果を明らかにした。

なお、本手法を砕波帯内の流速場の解析に適用した結果の一部が文献 2) に示されており、質量輸送や運動量輸送に対する渦度効果が明らかにされている。

2. 流速場の成分分離法

ベクトル解析の理論によれば、任意のベクトル場はかなり一般的な条件のもとで、ポテンシャル場とソレノイダル場に分離して表わすことができる。したがって、対象とする速度場を $\langle \mathbf{u} \rangle$ と記すと、

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}_p \rangle + \langle \mathbf{u}_e \rangle \dots\dots\dots (1)$$

と表わせる。ここに、 $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を意味し、添字 p と e はそれぞれポテンシャル成分とソレノイダル成分（渦度成分）を意味している。定義により、これらの流速成分は以下の式を満たす。

$$\text{rot} \langle \mathbf{u}_p \rangle = 0, \quad \text{div} \langle \mathbf{u}_p \rangle = \langle \theta \rangle \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{rot} \langle \mathbf{u}_e \rangle = \langle \omega \rangle, \quad \text{div} \langle \mathbf{u}_e \rangle = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\langle \theta \rangle$ と $\langle \omega \rangle$ はそれぞれ流速場 $\langle \mathbf{u} \rangle$ のわき出し量と渦度を示している。また、ポテンシャル流速成分 $\langle \mathbf{u}_p \rangle$ は、速度ポテンシャル Φ によって

$$\langle \mathbf{u}_p \rangle = \text{grad} \Phi \dots\dots\dots (4)$$

と書ける。式 (2) のわき出し量 $\langle \theta \rangle$ は今の場合ゼロと置けるから、式 (2) と (4) より、次の Laplace の式を得る。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

式 (1) の成分分離を具体的に行うには、式 (5) と実験データからポテンシャル流速成分 $\langle \mathbf{u}_p \rangle$ を具体的に算定

* 正員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 正員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

*** 東京工業大学（現、北海道開発局）

する必要がある。これには、Laplace の方程式を満たし、かつ、水表面境界条件式での二乗誤差を最小にするという条件のもとに流速場を算定する Dean の流れ関数法¹⁾を用いることが考えられる。実際、砕波帯内での流速場にこの Dean 法を具体的に適用した場合、他の波動理論よりも良好な結果を与えることが確かめられている³⁾。しかしながら、砕波帯内の流速場に Dean 法を適用することには次のような原理的な難点がある。すなわち、崩れつつ進行する波の場合、波頂前面での砕波によって表面条件が局所的に満足されなくなっており、そのため、Dean 法で基準とされている表面境界条件を使用することが、少なくとも考え方の上では妥当でなくなってくるからである。そこで本研究では、新たに以下に述べるような方法でポテンシャル流速成分を算定した。

式 (5) を底面境界条件^{注)}

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad \dots\dots\dots (6)$$

のもとで解くと次式で示す一般解を得る。

$$\phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{ikx} dk \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 h : 平均水深、 k : 波数、 x : 水平座標、 z : 鉛直座標 (平均水位をゼロとし上方に正)、 t : 時間である。

上式中の積分定数 $A(k, t)$ は、一種の (位相情報を含んだ) 非定常波数スペクトルであり、通常の波動の場合には残りの表面境界条件から決まる量であるが、砕波している場合には上述のような事情から表面境界条件を用いることはできない。本研究では、以下に述べるように、渦度 $\langle \omega \rangle$ がほぼゼロで事実上ポテンシャル成分だけとなっていると見なせる位置 ($z = z_0$) での流速記録の Fourier 解析によりこの $A(k, t)$ を算定するという手法を用いている。

式 (7) は、波数-周波数スペクトル $B(k, \omega)$ を用いることにより以下の様に表わせる。

$$\phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} B(k, \omega) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i(kx + \omega t)} d\omega dk \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここでは、 $B(k, \omega)$ が次の形を持つものと仮定する。

$$B(k, \omega) = E_1(\omega) \cdot \delta[k - k_1(\omega)] + E_2(\omega) \cdot \delta[k + k_2(\omega)] \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\delta[\cdot]$ はデルタ関数である。上式の右辺第 1 項は反射波成分に、第 2 項は入射波成分に対応しており、 $k_1(\omega)$ と $k_2(\omega)$ はそれぞれの分散関係を意味している。上式を式 (8) に代入すると次式を得る。

$$\phi(x, z, t) = \int_0^{\infty} E_1(\omega) \frac{\cosh k_1(z+h)}{\cosh k_1 h} e^{i(k_1 x + \omega t)} d\omega$$

$$+ \int_0^{\infty} E_2(\omega) \frac{\cosh k_2(z+h)}{\cosh k_2 h} e^{i(-k_2 x + \omega t)} d\omega \quad \dots\dots\dots (10)$$

次に、上式を有限 Fourier 級数近似して表わす。すなわち、上式中の E_1 , E_2 , k_1 , k_2 , ω を離散表示してそれぞれ E_{1n} , E_{2n} , k_{1n} , k_{2n} , ω_n ($n=0, 1, 2, \dots, N$) と記せば、

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{n=0}^N E_{1n} \frac{\cosh k_{1n}(z+h)}{\cosh k_{1n} h} e^{i(k_{1n} x + \omega_n t)} \Delta\omega \\ & + \sum_{n=0}^N E_{2n} \frac{\cosh k_{2n}(z+h)}{\cosh k_{2n} h} e^{i(-k_{2n} x + \omega_n t)} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここでは、ある特定の x 座標での (z, t) 面内での流速場を算定することを目的としているので、以下では $x=0$ として取り扱う。また、上式で $k_{1n}=k_{2n}=k_n$ と仮定すれば、上式は次式となる。

$$\phi = \sum_{n=0}^N (E_{1n} + E_{2n}) \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} e^{i\omega_n t} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (12)$$

同様に、 $\langle u_p \rangle$ と $\langle w_p \rangle$ は次のように表わせる。

$$\langle u_p \rangle = i \sum_{n=0}^N k_n (E_{1n} - E_{2n}) \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} e^{i\omega_n t} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\langle w_p \rangle = \sum_{n=0}^N k_n (E_{1n} + E_{2n}) \frac{\sinh k_n(z+h)}{\cosh k_n h} e^{i\omega_n t} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (14)$$

いま、

$$\left\{ \begin{aligned} F_{xn} &= i k_n (E_{1n} - E_{2n}) \frac{\cosh k_n(z_0+h)}{\cosh k_n h} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (15) \\ F_{zn} &= k_n (E_{1n} + E_{2n}) \frac{\sinh k_n(z_0+h)}{\cosh k_n h} \Delta\omega \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned} \right.$$

とおくと、 $\langle u_p \rangle$ と $\langle w_p \rangle$ は結局、次式の形で表現することができる。

$$\langle u_p \rangle = \sum_{n=0}^N F_{xn} \cdot \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n(z_0+h)} e^{i\omega_n t} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\langle w_p \rangle = \sum_{n=0}^N F_{zn} \cdot \frac{\sinh k_n(z+h)}{\sinh k_n(z_0+h)} e^{i\omega_n t} \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式中の係数 F_{xn} , F_{zn} は、 $z=z_0$ 地点での流速記録を Fourier 解析することにより算定することができる。

また、 n 次の波数成分 k_n (あるいはもっとさかのほれば k_{1n} と k_{2n}) は、例えば x 方向に適当な間隔で並んだ二台の流速計からの記録のクロス・スペクトルから算定することができる。ただし、今回ここで示す実験では、一台の流速計しか使用できなかったため、ここでは便宜的に波速 c の実測値から $k_n = \omega_n / c$ として計算している。このような取扱いは、波動場を保存波と仮定することを意味しており、本来ならば、砕波のように波高減衰を伴う波に対してこのような仮定を用いることには矛盾がある。しかしながら、同様な保存波の仮定を設けている Dean の流れ関数法を砕波直前の変形途中にあ

注) ここでは、水平床上の流速場を対象としているが任意形状底面の場合にも、著者ら⁴⁾が先に示した“共形変換法”により同様な取り扱いが可能である。

る波動場に適用した場合でもかなり良好な結果を与えることが知られている^{3),5),6)}。したがって、保存波の仮定を用いることは、少なくともここで行っているような同一断面内での局所的な流速場の算定に際してはそれほど大きな誤差を生じさせることはないものと考えられる。

3. ポテンシャル場の算定法の計算精度について

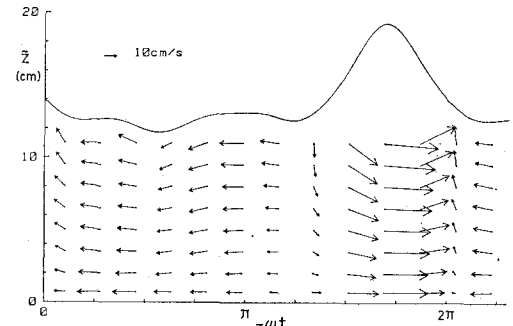
上述の成分分離方法を砕波帯内の流速場に対して具体的に適用する前に、その前提となるポテンシャル場の算定法の精度を事前にチェックしておく必要がある。そこでここでは、砕波していない通常の波動場に対して上述のポテンシャル場の算定方法を適用することによりその精度を検討した。ただし、通常の波動においても、粘性の存在によって底面境界と水表面境界で発生した渦度が流体内部に拡散することにより一種の渦度効果が現われ、Longuet-Higgins の conduction solution⁷⁾ によって表わされるような質量輸送^{注)}が発生するため、鉛直分布をもった定常流が存在する。そこで、ここでは各地点での流速の時間記録からその平均流速を差し引いたものをポテンシャル流速成分(軌道流速成分)として取扱った。

使用した実験データは、文献 2) で示した実験装置で得られたもので、文献 2) での実験条件のうち換算沖波々高を 8.9 cm に減らし、他の実験条件や測定断面等は同じにして行われた実験結果である。

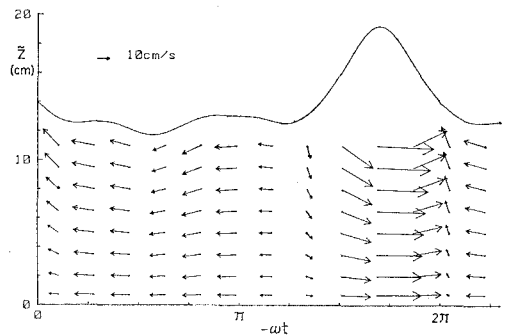
図一1 は、約 18 波分の流速データからその位相平均値を計算することによって得た流速ベクトルの軌道流速成分を示したものである。図中の記号 $\bar{z}$ は、底面から上方に正にとった鉛直座標である。これに対して図一2 は、 $\bar{z}=5$ cm での流速データに基づいて上述のポテンシャル成分算定法によって算定された流速ベクトルである。この場合の Fourier 係数の項数 N は、スペクトル解析の結果に基づいて、 $N=6$ としている。図一3 は、流速ベクトルの実測値と計算値の差をとったものであるが、部分的に有意な大きさの差が存在するものの、これを見ると計算値と実測値がほぼ一致していることがわかる。このことから、ここで示したポテンシャル場の算定法がほぼ満足し得る精度を持つことが確認された。なお、定形進行波に対しての Dean 法の計算結果も含めた比較は別の機会に報告する予定である。

ここで、Fourier 係数の項数 N の決め方について言及しておく。通常、Fourier 級数近似の精度を上げるにはその展開項数 N を増やせばよい。しかし、今の場合には式 (17) と (18) に含まれるファクター、 $\cosh k_n(z$

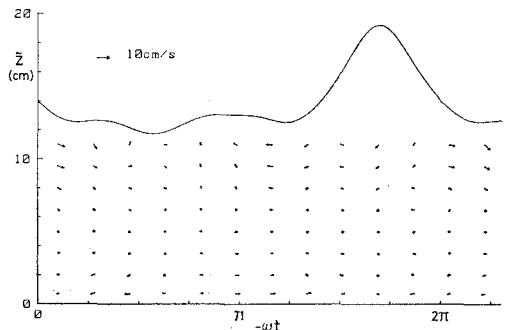
$+h)/\cosh k_n(z_0+h)$ と $\sinh k_n(z+h)/\sinh k_n(z_0+h)$ の値が、 n を増やしていくと、 $z > z_0$ に対して指数関数的に増大していくため、必要以上に N を大きくすると $z = z_0$ での流速データに含まれる誤差を増幅させ、かえって全体としての精度を下げる結果になる。したがって N の上限値は、 $z = z_0$ での流速データの S/N 比によって実際に規定されることになる。一方、現象によっては、水表面付近の流速場にかなり高次の成分が含まれる場合もあり、単に上述の S/N 比の観点のみから N の値を定めることには問題がある。逆に言うと、このことは現象の非線形性の程度と流速測定精度によって z_0 の下限



図一1 軌道流速ベクトルの実測値 (非砕波)



図一2 軌道流速ベクトルの計算値 (非砕波)



図一3 軌道流速ベクトルの実測値と計算値の差

注) ただし、この場合の質量輸送は二次のオーダーの現象であり、波動場のダイナミクスに直接影響を与えるほどの重要性は持たない。これに対して、砕波帯内の波動場の場合には砕波に伴って多量の渦度が生成され、それが流速場の構造を大きく支配する可能性がある。

が決まり、 z_0 の位置を任意に深くすることは出来ないことを意味している。

4. 成分分離の計算例

ここで成分分離の計算対象とした流速データは、文献2)で示されている実験データであり、図-4はその流速ベクトルの位相平均値 $\langle u \rangle$ を示したものである(平均波数=約45波)。この図の横軸は $-\omega t$ であるが、局所的な保存波の仮定を持ち込めばこれは kx と見なすこともできる。そこで、この $\langle u \rangle$ の空間微分をとることにより渦度 $\langle \omega \rangle$ を計算したものが図-5である²⁾。同図を見ると、 $\bar{z}=4\sim 6$ cmでの渦度はほぼゼロとなっていることがわかる。そこで、ここでは成分分離計算中の基準座標 z_0 として、 $z_0 = -9.82$ cm ($\bar{z}_0 = 5$ cm)を選んだ。

実際に $\langle u \rangle$ を分離した結果のうち、ポテンシャル成分 $\langle u_p \rangle$ を図-6に、渦度成分 $\langle u_e \rangle$ を図-7に示す。ただし、これらの計算結果は式(17)、(18)で $N=6$ として求めたものである。図-6に示してあるポテンシャル流速成分 $\langle u_p \rangle$ については、測定断面を通過する質量フラックス $\rho \int \langle u_p \rangle dz$ を一周期平均したものがゼロとなるように冲向き一様流速 $-U_0$ を加えてある。一方、閉じた水槽での実験結果であることから全質量フラックス $\int \langle u \rangle dz$ の時間平均値は必ずゼロとなっていなければならない。結果的に $\langle u \rangle - \langle u_p \rangle$ で計算される渦度成分の質量フラックス $\int \langle u_e \rangle dz$ の時間平均値も同様にゼロとなっている。その結果、図-7に示されているように、下層での $\langle u_e \rangle$ は冲向きの値を示している。

この渦度成分 $\langle u_e \rangle$ で特徴的なのは、上層の、特に crest 下部付近に、ポテンシャル成分に匹敵するほどのかなりの大きさの岸向きの流れが生じていることである。そしてこの岸向きの流れは trough 下部においても値はかなり小さくなるものの依然として存在している。このことは、上層付近に多量の岸向きの質量輸送が生じていることを意味している。この質量輸送は、通常の波動運動によるものと異なり、渦度を持ったいわば“流れ”としての質量輸送であって、その大きさも波動

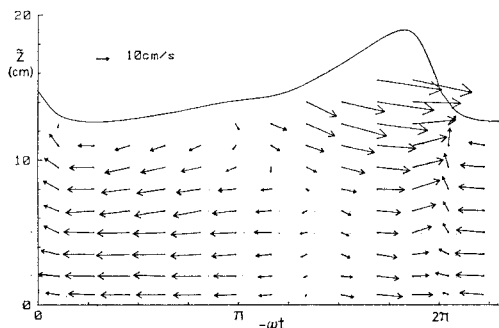


図-4 位相平均流速ベクトル $\langle u \rangle$ (碎波)

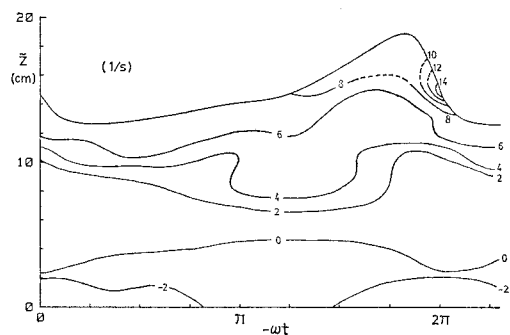


図-5 渦度 $\langle \omega \rangle$

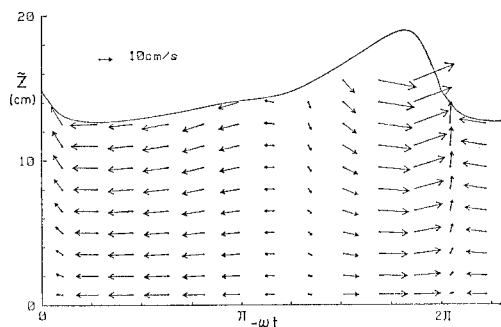


図-6 ポテンシャル成分 $\langle u_p \rangle$

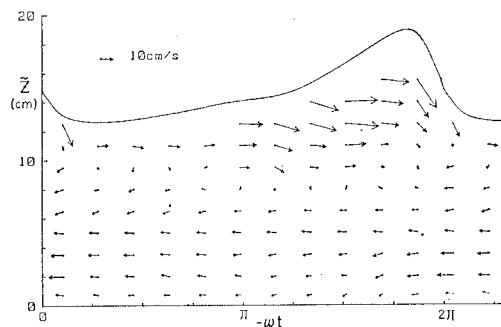


図-7 渦度成分 $\langle u_e \rangle$

成分(すなわちポテンシャル成分)から算定される質量輸送の数倍の値になる。文献2)で詳しく述べているように、図-7で $\langle u_e \rangle$ が岸向きの大きな値を示す領域は、大規模渦が存在する領域とほぼ対応している。すなわち、崩れつつ進行する波のもとでは、上層での大規模渦に伴って生成される渦度の効果によって波の進行方向に多量の過剰質量フラックスが発生する。

5. 表面波形の逆算および表面波形に対する渦度効果

Dean の流れ関数法などでは、実測表面波形をもとに、表面境界条件を介して内部の流速場が算定される。ここ

では逆に内部のポテンシャル流速成分が $z=z_0$ での実測流速に基づいて計算されているので、これから表面波形を逆算して求めることを考える。ただし、実際の表面波形は渦度成分を含んだ形で決まっているから、ポテンシャル成分のみから逆算される表面波形はあくまでも仮想的なものであり実測波形とは異なるはずである。ここではむしろ、その差から表面波形に対する渦度効果に関する情報を読み取ることを考える。

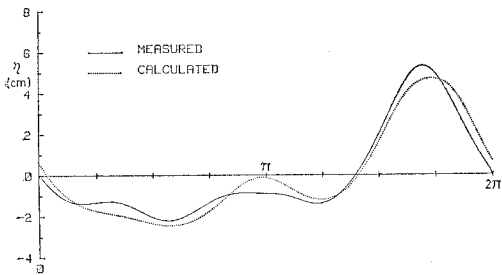
逆算表面波形 η は次のようにして算出された。表面境界条件としては、運動学的条件と力学的条件のどちらを用いてもよいが、反射波がある程度存在する場合、運動学的条件の中の $\hat{\eta}_x$ の項の評価が難しいという実際上の理由から、ここでは次の力学的境界条件を用いる。

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(u_p^2 + w_p^2) + g\eta = \text{const.} \quad (z=\hat{\eta}) \dots (19)$$

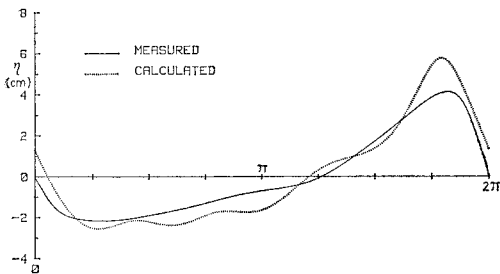
式 (19) 中の $z=\hat{\eta}$ における u_p , w_p の値は式 (17) と (18) からただちに求められ、 Φ_t は次式によって算定される。

$$\Phi_t|_{z=\hat{\eta}} = \sum_{n=0}^N i\omega_n \cdot F_{zn} \frac{1}{k_n \tanh k_n(z_0+h)} \cdot \frac{\cosh k_n(\hat{\eta}+h)}{\cosh k_n(z_0+h)} e^{i\omega_n t} \dots (20)$$

計算の手順としては、まず適当な位相（例えば zero-up cross 点）で $\hat{\eta}$ の値を仮定して式 (19) のベルヌイ定数



図—8 実測波形と逆算波形の比較（非砕波）



図—9 実測波形と逆算された仮想的な表面波形の比較（砕波）

を求める。そうすると他の位相での η はそのベルヌイ定数のもとで適当な反復計算によって求めることができる。得られた η は、その一周期積分値がゼロになるとは限らないので、ゼロになるまで初期位相の η を仮定し直して同様の計算を繰り返す。

図—8 は、この計算法の妥当性を検証するために、砕波していない場合の計算結果を示したものであるが、若干の差が見られるものの、全体としてはほぼ妥当な結果を与えていることがわかる。そこで次に、砕波の場合の算定結果を示したものが図—9 である。これを見ると実測波形は逆算波形に比べて波頂部分の値が小さくなっていることがわかる。（この位置水頭の差は流速に直すと約 57 cm/s である。）これは、もともと波の持っていた位置エネルギーが渦度成分の発生によって部分的に運動エネルギーに変換されるため、その結果、実測波形の波高が減少するものと考えられる。

5. おわりに

砕波帯内の流速場は、多分に“波”としての性質を保持しながらも、砕波による表面境界条件の局所的破綻によって、いわば“流れ”的な様相をも併せ持っている。本論文では、このような砕波帯内の流速場の特徴を解き明かす鍵が、砕波によって波頂前面部より生成される渦度にあると考え、その解析方法として、流速場をポテンシャル成分と渦度成分に分離する方法を示した。さらに、ポテンシャル成分から表面波形を逆算する方法を示し、表面波形に対する渦度効果を明らかにした。

参考文献

- Dean, R. G.: Stream function representation of nonlinear-ocean waves, J. Geophys. Res., pp. 4561~4572, 1965.
- 灘岡和夫・小谷野喜二・日野幹雄：二成分光ファイバー流速計を用いた砕波帯内流速場の特性の解明，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 50~54, 1985.
- 灘岡和夫・近藤隆道・田中則男：レーザードップラー流速計による砕波帯内の流速場の構造の解明，港湾技術研究所報告，Vol. 21, No. 2, pp. 49~106, 1982.
- Nadaoka, K. and M. Hino: Conformal mapping solution of a wave field on the arbitrarily shaped sea bed, Proc. 19th Conf. on Coastal Eng., pp. 1192~1208, 1984.
- 岩垣雄一・酒井哲郎：Stream Function Theory による斜面上の砕波の水粒子速度の表現について，第21回海岸工学講演会論文集，pp. 27~32, 1974.
- 日野幹雄・柏柳正之：Wave Set-down, Set-up および水粒子軌道速度の推定における Dean の流関数法の適用性，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 18~22, 1978.
- Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. Roy. Soc. London. A, Vol. 245, No. 903, pp. 535~581, 1953.