

乱流モデルによる砂漣上の振動流境界層の 数値シミュレーション

佐藤 慎司*, 上原 啓史**, 渡辺 晃***

1. 緒 言

砂漣上においては強い乱れをともしう剝離渦の形成と放出により複雑な振動流境界層が形成されており、砂漣上での砂移動やエネルギー逸散などの諸現象を理解するためにはその境界層の特性を十分に把握しておくことが重要である。砂漣上の流れの場合は高濃度の浮遊砂を含む流れであるが、その解析にはまず第一近似として固定床条件下での流れを考察する必要があるであろう。このような立場の研究としては、Sleath¹⁾、沢本²⁾、佐藤³⁾、田中・首藤⁴⁾の層流解析や、Longuet-Higgins⁵⁾、沢本⁶⁾による乱流場を対象とした解析などがあり、現実の砂漣の形成条件に近い条件における流速場まで解析が可能となりつつある。しかし浮遊砂の運動機構を解明するうえでは乱れの構造に関する情報も重要であり、これらに関しては未だ不明確な部分が多い。

本研究では、近年急速に進歩しさまざまな流れに応用されている乱流モデルを用いることにより、砂漣上の振動流境界層流れを乱れまで含めて数値計算する方法を示し、その結果を過去の実験結果と比較することにより境界層内の流速場および応力場の特性について考察を加える。さらに計算結果にもとづいて、個々の粒子の運動を追跡するという立場から水粒子の輸送および浮遊砂雲の移動・沈降過程のシミュレーションを試みる。

2. 乱流モデルと数値計算の方法

乱流の理論的な解析では多くの場合、レイノルズ応力を何らかの方法で評価し、基礎方程式系を閉じた系とすることが問題となる。その解決の手段として実験結果をもとに経験式が導入され、さまざまなモデルが提案されてきた。それらのなかでも特に、代表的な乱流統計量の輸送を表す方程式を運動量方程式と組み合わせることにより閉じた偏微分方程式系を構成する方法が、近年の大型計算機の発達とともに進歩を遂げ実用に供される段階になってきた。これらの方法を用いて Rodi⁷⁾ らは、噴

流、境界層流れや後流など多様な流れの計算を行っており、また林・篠田⁸⁾は平板上の振動流境界層流れへの適用性を検討している。

本研究ではこれらの乱流モデルのなかで、現在もっともひろく用いられており定常流に対してその適用性の広さが確かめられているいわゆる $k-\epsilon$ モデル⁷⁾を用いて解析を行うことにする。このモデルは、運動量方程式に乱流エネルギー k ($\equiv u_i'^2/2$, u_i' は乱れ流速成分) および乱流エネルギー逸散率 ϵ ($\equiv \nu \overline{\partial u_i' / \partial x_j}^2$, ν は動粘性係数) に対する輸送方程式を加え、渦動粘性係数 ν_t を $\nu_t = c_\mu k^2 / \epsilon$ (c_μ は無次元定数) で評価することにより閉じた方程式系を構成するものである。乱流モデルとしてはさらに進んだものとして、応力モデルや Large Eddy Simulation などもあるが、モデルにあらわれる普遍定数が少なくてすみことや計算時間が比較的短くてすみことなどの理由から $k-\epsilon$ モデルを選ぶことにした。

二次元的な砂漣上の流れを対象とすることとし、平均流に対する運動方程式のかわりにこれと等価な渦度方程式を用いて解析を行う。砂漣面における境界条件の取り扱いを簡単にするために任意の砂漣形状を表現できる直交曲線座標系を導入すると、その座標系 (X, Z) における基礎方程式系は以下ようになる。

$$JF^2\phi = \zeta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{D\zeta}{Dt} = F^2[(\nu + \nu_t)\zeta] - 2J \left(\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - 2 \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial X \partial Z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X \partial Z} + \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial Z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial Z} \right] + \frac{1}{J} (G - \epsilon) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial Z} \right] + \frac{1}{J} \left(c_1 \frac{G\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{G}{\nu_t} = 2J \left[\left(\frac{\partial}{\partial X} \left(J^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - J \frac{\partial J^{-1/2}}{\partial Z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial X} \right]^2$$

* 正 会 員 工 修 東京大学助手 工学部土木工学科

** 学生会員 東京大学大学院工学系研究科

*** 正 会 員 工 博 東京大学教授 工学部土木工学科

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left(-J^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + J \frac{\partial J^{-1/2}}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right\}^2 \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} \left(J \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(J \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) \right\}^2 \quad \dots\dots (6)$$

ただし,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X}$$

であり, ϕ と ζ はそれぞれ平均流速場に対する流れ関数と渦度, J はデカルト座標系 (x, z) から直交曲線座標系 (X, Z) への変換のヤコビアンである. また, $c_1, c_2, c_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon$ は普遍定数であり, ここでは Rodi⁷⁾ らが定常な完全乱流の実験結果をもとに決定した値 ($c_1=1.44, c_2=1.92, c_\mu=0.09, \sigma_k=1.0, \sigma_\epsilon=1.3$) をそのまま用いることにした. 直交曲線座標系としては任意形状の砂漣を表現しうる写像関数として佐藤³⁾, 田中・首藤⁹⁾ が用いたものと同じものを採用した. 計算の対象とする実験条件で観察された砂漣形状と写像関数によって表現された形状との比較例を図-1に示す.

計算領域は隣接する砂漣頂間一波長の区間とし, 計算格子は佐藤³⁾ と同一のものをを用いた. 側方境界では周期的条件を課し, 上方境界では次式で表わされる条件を課した.

$$Z=\delta \quad \phi=U_0(t)\delta, \quad \zeta=\frac{\partial k}{\partial Z}=\frac{\partial \epsilon}{\partial Z}=0 \quad \dots\dots (7)$$

ここに, δ は計算領域の高さであり, $U_0(t)$ は断面平均流速である.

底面上では次式で表わされるように ϕ に対する運動学的条件ならびに ϕ と k に対する粘着条件を課した.

$$Z=0 \quad \phi=\frac{\partial \phi}{\partial Z}=k=0 \quad \dots\dots (8)$$

エネルギー逸散率 ϵ に対する境界条件としては, 林・篠田⁸⁾ は底面で 0 となる条件を課しているが, ϵ の定義を考えると ϵ は底面付近で 0 でないある有限な値をとるものと考えられる. そこで本研究では底面付近の乱れに対して経験的な関係を導入することにより ϵ の境界条件を記述することにする. すなわち, 底面近傍での渦動粘性係数 ν_t は乱れの強さと底面からの距離 l を用いて

$$\nu_t \propto \sqrt{k} l \quad \dots\dots (9)$$

と表わされるとき, 上式の比例定数の値を渦動粘性係数の測定値が豊富な定常乱流の実験結果から定めること

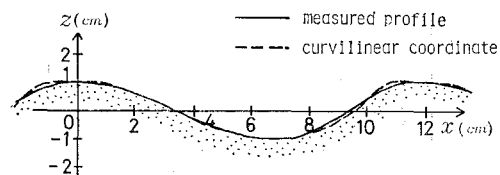


図-1 実測砂漣形状 (実線) と写像関数で表わされる形状 (破線)

にした. これを ϵ に対する境界条件に書き改めると,

$$Z=Z_p \quad \epsilon_p = \frac{c_\mu^{3/4} \sqrt{k_p}}{\kappa l_p} \quad (\kappa=0.4 \text{ はカルマン定数}) \quad \dots\dots (10)$$

となる. ここに, 添字 p は底面に一番近い格子点での値を意味している.

計算開始時の初期値としては, ϕ と ζ には平板上の層流解を与え, k と ϵ には実験結果をもとにして境界条件をみたす適当な関数形を与えた. これらの初期値からはじめて, 佐藤³⁾ と同様に陰解法により基礎式系を数値積分した. 計算の精度を保ちつつ計算時間を節約するために, 図-2 に示すように 1 ステップごとに ϕ, ζ の方程式と k, ϵ の方程式とを交互に解くこととし, 周期的な解が得られるまで計算を繰り返した. 各段階における収束計算は SOR 法で行い, 収束判定は相対誤差でほぼ $1/1000$ とした. 時間ステップは試行錯誤により $\Delta t = T/400$ (T は振動流の周期) としたが, 計算開始時には不安定を防ぐためさらに細かくとった.

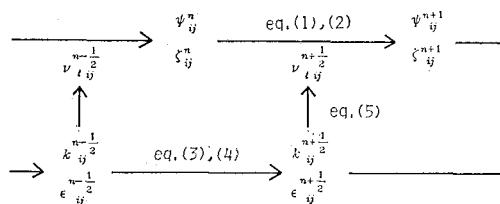


図-2 数値計算の方法

3. 数値計算の結果

ここでは浜本⁹⁾ の実験条件に対応する非対称砂漣上の非対称振動流場の計算結果を示し考察を加える. 砂漣の形状は図-1 に示したように, 波長 12 cm, 波高 2 cm で砂漣頂の左側斜面が急峻な非対称なものである. また主流条件は, 周期 $T (=2\pi/\omega)$ が 4 秒で流速波形が図-3 に示すようにストークス波の第 3 次近似解で表わされる非対称なものである. また流速場の測定結果によると, 境界層内の流れはほぼ全周期にわたって乱流とみなしてよい. なお本論文では位相の原点を左向き最大流速時にとる.

図-4 は計算された底面付近の流速場の位相変化を示

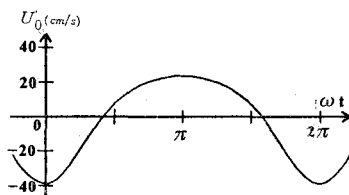
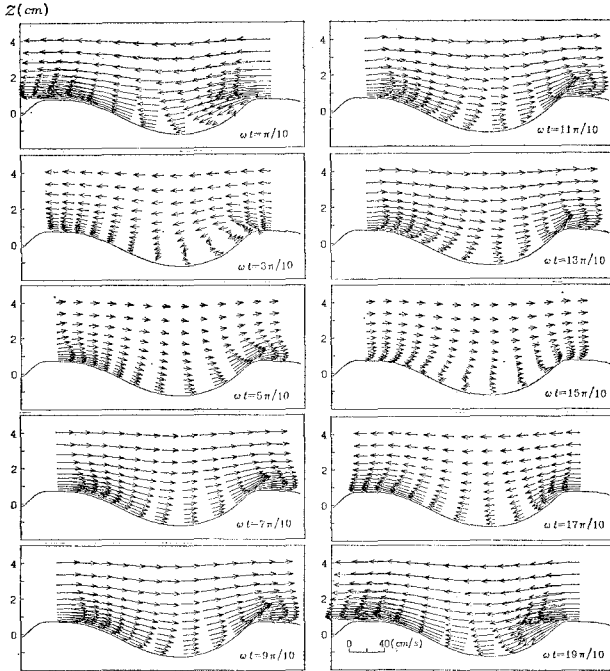
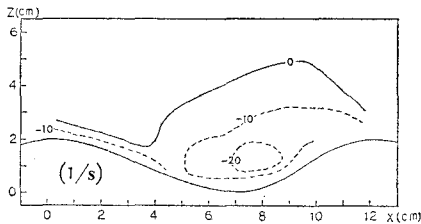


図-3 主流部の流速波形

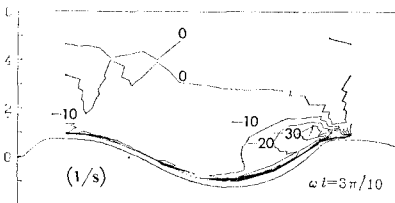


図—4 平均流速場の位相変化

したものである。急斜面上での剝離渦の形成や底面付近の位相の先走りなど実験で観察される特徴的な現象が再現されている。ただし、流線の剝離が始まる位相は実験では $\omega t=0$ 付近であるのに対して計算では $\omega t=\pi/10$ 付近であり剝離開始の位相が遅れており、さらに渦の大きさも小さめとなっている。図—5 は $\omega t=3\pi/10$ における等位相平均渦度の分布をほぼ同位相の実験結果とともに示したものである。等渦度線の形状は互いに似ているが、計算結果においては高渦度の領域が底面近傍に集中



(a) 実験値⁹⁾



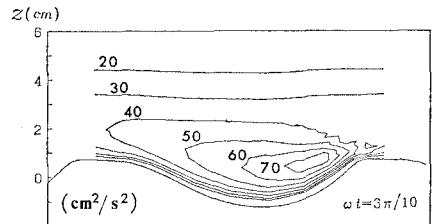
(b) 計算値

図—5 等位相平均渦度の分布

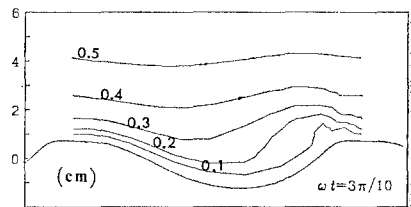
している。これは、今回の計算で用いた格子間隔が比較的粗いにもかかわらず底面に粘着条件を課したことや ϵ の境界条件を式 (10) で与えたことなどが原因であり、そのために底面近傍の渦度の拡散が抑えられたものと考えられる。

図—6 は $\omega t=3\pi/10$ における乱流エネルギー k 、乱れの特性距離 $L (=c_\mu k^{3/2}/\epsilon)$ および渦動粘性係数 ν_t の分布を示したものである。乱流エネルギーは渦の形成領域で大きく、緩斜面上では小さくなっており、実験結果による分布とはほぼ一致している。ただしその絶対値については、実験においては乱れの定義法が問題となるため直接の比較はできない。次に乱れの特性距離をみると、渦の形成領域で小さくなっており、これはこの領域でスケールの小さい乱れが多いことと対応しているものと思われる。また渦動粘性係数は一般に底面からの距離にほぼ比例して増大し、再び漸減してゆくが、剝離点付近では小さめの値をとる。

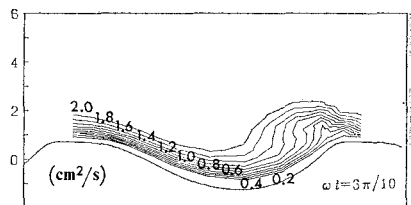
最後に、各点での流速値を一周期にわたって平均することによって得られるオイラー的な定常流速場を示したのが図—7である。底面付近で右方向から穏れが卓越することや、急斜面上で砂漣頂へ向かう



(a) 乱流エネルギー

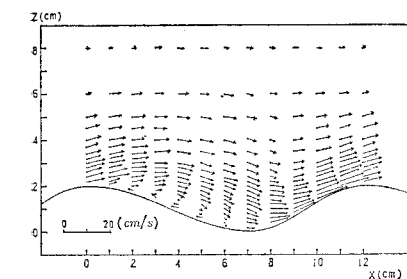
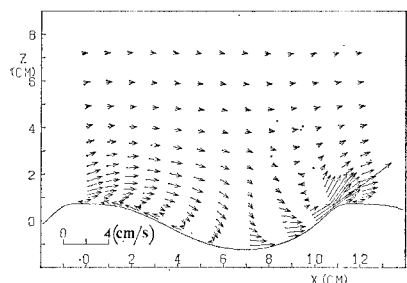


(b) 乱れの特性距離



(c) 渦動粘性係数

図—6 乱流エネルギー、乱れの特性距離および渦動粘性係数の分布

(a) 実験値⁹⁾

(b) 計算値

図-7 定常流速場

強い流れがみられることなど全体的な流況は再現されているが、その絶対値は計算結果の方がかなり小さい。剥離がはじまる位相と渦の形成領域の微妙な違いが原因と考えられる。

以上述べてきたように、本計算法は底面における境界条件の設定などに検討の余地を残しているものの平均流速場や乱れエネルギー分布などの再現性は良く、局所性を考慮した乱流場の解析を行う上で有力な計算法である。

4. 砂漣上における粒子の運動のシミュレーション

水粒子や底質の移動機構を把握するためにはラグランジュ的な立場にたつ解析を行うことが必要である。ここでは計算結果にもとづいて、乱れの効果をもとり入れた

粒子の輸送過程のシミュレーションを試みる。

まず平均流のみによる水粒子の輸送を考える。図-8は左向き最大流速時 ($\omega t = 0$) に破線の領域内に分布していた水粒子の運動をルンゲ・クッタ法を用いて追跡し、それらの一周期後の位置を示したものである。底面近傍の水粒子が一周期後に右方向へ輸送されていることは層流解³⁾を用いた計算例と同様であるが、輸送量・輸送距離とも今回の計算例の方が大きい。

次に乱れ成分を簡単なモデルでとり入れることにより、粒子の輸送における乱れの果たす役割について考察する。乱流場における粒子の運動を解析した例としては、Hino¹⁰⁾、Hall¹¹⁾の研究などがあるが、ここでは最も簡単なモデルで乱れを評価することとし、単純なモンテカルロ法とマルコフ過程を応用したモデルの2例を試みることにする。それぞれのモデルにおける乱れの評価は式 (11)、式 (12) で与えられる。

$$u_i^{(n)} = \sqrt{2k/3} r_i \dots\dots\dots (11)$$

$$u_i^{(n)} = \alpha u_i^{(n-1)} + \sigma_r r_i \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 r_i は平均 0、標準偏差 1 のガウス分布に従う乱数であり、式 (12) にあらわれる係数 α 、 σ_r の値は、乱れの特性量の変化はゆるやかであると仮定することにより k と ε の計算結果から評価することにした。

図-9は左向き最大流速時に砂漣頂上約 1 cm の点 (☆印) を出発した 100 個の水粒子の流速反転直後の位相における位置を軌跡の例とともに示したものである。ただし計算の都合上、砂漣面に衝突した水粒子についてはその場所で計算を中止している。それぞれのモデルで粒子群の平均的な位置はほぼ同じであるが、拡散の程度は乱れに時間的な相関を考慮したマルコフ過程モデルの方が大きく、より現実に近い運動をシミュレートしているものと思われる。

最後に同様の手法により浮遊状態における砂粒子の運動のシミュレーションを試みる。砂粒子の運動方程式としては、林・大橋¹²⁾が用いた式で Basset 項を省略した次式を用いることにした。

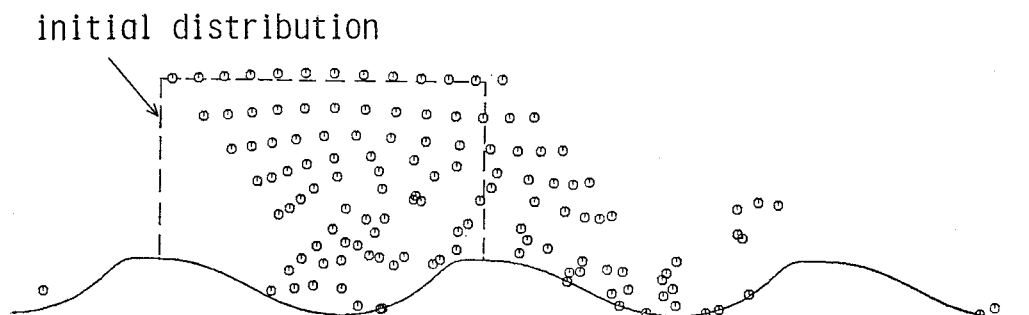
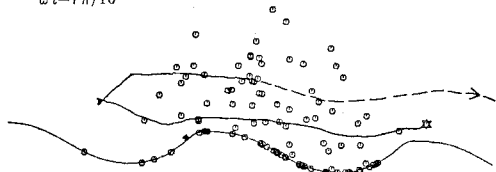


図-8 平均流による水粒子の輸送

$\omega t = 7\pi/10$ 

(a) 単純なモンテカルロ法

 $\omega t = 7\pi/10$ 

(b) マルコフ過程モデル

図-9 乱れを含んだ水粒子の輸送

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho} + C_M\right) \frac{\pi}{6} D^3 \frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{2} C_D \frac{\pi}{4} D^2 (u_s - u) |u_s - u| + C_M \frac{\pi}{6} D^3 \frac{du}{dt} + \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) \frac{\pi}{6} D^3 g \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 u_s , u は砂粒子および水粒子の密度、 ρ_s , ρ はそれぞれの密度、 D は砂の粒径、 $g=(0, -g)$ は重力加速度ベクトルであり、流体力係数の値としては Reynolds 数の広い範囲にわたって適用できる Rubey¹³⁾ の表現式を用い、 $C_M=1/2$, $C_D=2+24\nu/(|u_s-u|D)$ とした。図-10 は上式の流速値にマルコフ過程モデルによって評価される流速をそのまま用いた例で、流れが左向きである期間 ($0 < \omega t < 4\pi/10$) に砂漣頂上約 1 cm の点を出発した合計 100 個の砂粒子 ($D=0.2$ mm, $\rho_s/\rho=2.65$) の流速反転後の位相における位置と軌跡例を示しており、浮遊砂雲の形成とその移動過程がシミュレートされている。流速の値に平均流速および単純なモンテカルロ法による評価値を用いた例ではどちらも浮遊状態が維持される粒子の数が少なく、顕著な浮遊砂雲はみられなかつ

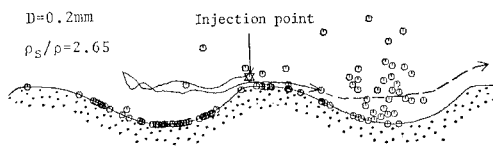
 $\omega t = 7\pi/10$ 

図-10 砂粒子の輸送

た。ここで述べた計算例は、乱流の構造や粒子に働く外力に対して多くの仮定を含んでおり実験結果と定量的な比較を行うには至っていないが、浮遊砂雲の形成と移動において組織的な乱れが重要な役割を果たしていることを示している。

5. 結 言

本研究では乱流モデルを用いることにより従来解析が困難であった砂漣上の振動流乱流境界層を数値計算する手法を示した。さらに計算結果をもとに乱れの効果を含んだ粒子の運動のシミュレーションを行い、組織的な乱れが粒子の輸送に大きな役割を果たしていることを示した。振動流中における乱れの実測データを蓄積し用いたモデルの妥当性を検討することおよび、移動床条件下での底質の連行を考慮した解析を検討し、底質移動の定量的な解釈を行うことが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Sleath, J. F. A.: Stability of laminar flow at seabed, Proc. ASCE, Vol. 100, No. WW 2, pp. 105~122, 1974.
- 2) 沢本正樹: 砂漣上の粘性振動流の Oseen 近似, 土木学会論文報告集, 第 331 号, pp. 95~101, 1983.
- 3) 佐藤慎司・三村信男・渡辺 晃: 砂漣上の振動流境界層に関する研究, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 189~193, 1983.
- 4) 田中 仁・首藤伸夫: 波状曲面上の一方向流を伴う振動流に関する実験, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 301~305, 1984.
- 5) Longuet-Higgins, M. S.: Oscillating flow over steep sand ripples, J. Fluid Mech., Vol. 107, pp. 1~35, 1981.
- 6) 沢本正樹: 波形底面上の剝離のある振動流の計算, ながれ, 4, pp. 43~53, 1985.
- 7) Rodi, W.: Turbulence models and their application in hydraulics—a state of the art review, Univ. Karlsruhe, SFB 80/T/127, 1978.
- 8) 林 泰造・篠田 薫: 往復流乱流境界層に関する基礎的研究, 第 23 回水理講演会論文集, pp. 41~48, 1979.
- 9) 浜本健一・三村信男・渡辺 晃: 砂漣上の振動流境界層に関する実験的研究 (2), 第 29 回海岸工学講演会論文集, pp. 254~258, 1982.
- 10) Hino, M.: Digital computer simulation of turbulent phenomena, Trans. JSCE, No. 123, pp. 33~43, 1965.
- 11) Hall, C. D.: The simulation of particle motion in the atmosphere by a numerical random-walk model, Q.J.R. Met. Soc., 101, pp. 235~244, 1975.
- 12) 林 泰造・大橋正和: 流体中を沈降する粒子の乱流特性について, 第 24 回水理講演会論文集, pp. 7~12, 1980.
- 13) Rubey, W. W.: Settling velocities of gravel, sand and silt particles, American J. of Sci., Vol. 25, No. 148, pp. 325~338, 1933.