

有限要素法による波の変形に伴う底部波動境界層の解析

滝 川 清*・田 渕 幹 修**

1. はじめに

波の運動に伴ない底面近傍に発生・発達する流体場の変動特性を明らかにする事は、底質の移動現象を理解し正しく評価する為に不可欠の要素であり、これまで波動境界層に関する数多くの理論的・実験的成果が報告されている。しかしながら、波の変形、特に浅海域での海底変化に対応した波そのものの変形特性の解明および、これに対する境界層運動特性の解明など波運動の非線形性に起因した難しさの為に、これに関した研究¹⁾も少なく波の有限振幅性を考慮した十分な知見も得られていない様である。本報告では、まず、2次元の層流および乱流の境界層方程式を対象として有限要素法による解析を試み、任意の境界層外縁での流速条件を容易に取り扱える計算方法を示す。また、適用計算例として、斜面上を遡上変形する波を取り上げてこの変形解析²⁾を行いこの数値データをもとに本報告の計算方法を適用して、斜面勾配および波形勾配の変化による遡上波の変形と底面境界層の変動特性について検討を行う。

2. 基礎方程式と有限要素法による定式化

(1) 基礎方程式

底面に沿って波の進行方向に x 軸、鉛直上向に z 軸をとる、境界層内の速度成分をそれぞれ u, w とすると、2次元での運動方程式、連続式および境界層外縁での運動方程式はそれぞれ次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} + w_b \frac{\partial u_b}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots (3)$$

式 (3) の u_b, w_b は外縁での各方向流速成分である。また、式 (1) の右辺の摩擦応力は、いま、層流・乱流の場合とも取り扱える様に次式で表現できるものとする。

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu K(z) \frac{\partial u}{\partial z} = N_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \dots (4)$$

ここに、 N_z は渦動粘性係数であって、層流の場合には $K=1$ として与えられる。

(2) 線形境界層方程式の解析

式 (1) および式 (3) で非線形項 $u(\partial u/\partial x), w(\partial u/\partial z)$ および $u_b(\partial u_b/\partial x), w_b(\partial u_b/\partial z)$ を無視すると境界層の支配方程式は線形の次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \dots (5)$$

また、境界条件は境界層厚さを δ として

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=\delta} = u_b \quad \dots (6)$$

である。式 (5) に対して、いま重み関数を W_* として残差方程式を立てると次式を得る。

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta W_* dz + \int N_z \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta W_*) dz - \left[N_z \frac{\partial u}{\partial z} \delta W_* \right]_0^\delta \quad \dots (7)$$

いま、解析領域である z 軸方向の線分を区分して各節点間の要素について節点値による直線近似を用いるとし、

$$u = \phi^T \mathbf{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = \phi^T \dot{\mathbf{u}} \\ W_* = \phi^T \mathbf{W}_*, \quad -(\partial P/\partial x) \equiv P_b = \phi^T \mathbf{P}_b \quad \dots (8)$$

として Galerkin 法を適用すると次式の様に離散化された式となる。

$$\delta W_*^T \int \phi \phi^T dz \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{P}_b) + \delta W_*^T \int N_z \phi_z \phi_z^T dz \cdot \mathbf{u} - [\delta W_*^T N_z \phi \phi_z^T]_0^\delta \mathbf{u} = 0 \quad \dots (9)$$

ただし、 $\phi_z = \partial \phi / \partial z$ である。これから解くべき連立方程式は次式で表現できる。

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{P}_b) + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad \dots (10)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \int \phi \phi^T dz = \frac{l}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

l : 要素間の長さ

$$\mathbf{K} = \int N_z \phi_z \phi_z^T dz - [N_z \phi \phi_z^T]_0^\delta$$

$$\equiv \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{N_z}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

* 正会員 工博 熊本大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

$$K_2 = \frac{N_0}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{N_0}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

N_0 , N_0 は $z=\delta$ および $z=0$ での N_z の値を意味し各マトリックスの座標は底面から順に取るものとする。

時間項に関しては差分を適用すれば良いが、ここでは次の方法を提案する。

$$\dot{u} = 2(u - u_0)/\Delta t - \dot{u}_0 \dots\dots\dots(12)$$

ここに添字 0 は時間きざみを Δt として、時刻 $t - \Delta t$ での値を意味する。これを用いると、式 (10) から $M\dot{u}_0 = -Ku_0 + M(P_b)_0$ であることに注意して、全体系の差分表示は結局次式で与えられる。

$$\{2/\Delta t \cdot M + K\}u + \{K - 2/\Delta t \cdot M\}u_0 = M\{P_b + (P_b)_0\} \dots\dots\dots(13)$$

解析としては、初期条件と式 (6) の境界条件の下で外縁での圧力項 P_b , $(P_b)_0$ を与えれば良い。

(3) 非線形境界層方程式の解析

この場合の方程式は式 (1) から式 (4) で示され、境界層近似により u および w を未知量とする方程式となる。また、境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \text{ で } u=w=0 \\ z=\delta \text{ で } u=u_b, \quad w=w_b \end{array} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

とする。前節と同様に W_* を重み関数とし Galerkin 法を適用するものとして残差方程式は式 (1), 式 (2) を対象として次式となる。

$$\begin{aligned} & \delta W_*^T \iint \phi \phi^T dx dz \dot{u} + \delta W_*^T \iint \phi \phi^T (u \phi_x^T \\ & + w \phi_z^T) u dx dz + \delta W_*^T \iint \phi \phi^T dx dz P_b \\ & + \delta W_*^T \iiint N_z \phi_z \phi_z^T dx dz \\ & - \int [N_z \phi_z \phi_z^T]_0^\delta dx \} u = 0 \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\delta W_*^T \left\{ \iint (\phi \phi_x^T u + \phi \phi_z^T w) dx dz \right\} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

いま、水深方向に 2 次元の解析領域を三角形要素群に分割して、1 つの要素の節点を i, j, m とすると $\phi^T = [\phi_i, \phi_j, \phi_m]$ として例えば ϕ_i は $\phi_i = (a_i + b_i x + c_i z)/2\Delta$, Δ は三角形の面積

$$a_i = x_j z_m - x_m z_j, \quad b_i = z_j - z_m, \quad c_i = x_m - x_j \dots\dots\dots(17)$$

であって、 ϕ_j, ϕ_m はこれらの回転順列で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \phi_x^T = [b_i, b_j, b_m]/2\Delta = B^T \\ \phi_z^T = [c_i, c_j, c_m]/2\Delta = C^T \end{array} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

である。さて、式 (15) の線形化に際しては次の Newton-Raphson 法を適用する。すなわち、ある時刻 t での第 n 近似解を用いて第 $n+1$ 近似解を次式で表現し

$$u_{n+1} = u_n + du, \quad w_{n+1} = w_n + dw \dots\dots\dots(19)$$

これを用いて、例えば式 (15) の左辺第 2 項の被積分量に関し次の様に取り扱う。

$$\begin{aligned} & \phi \phi^T (u \phi_x^T + w \phi_z^T) u = \phi \phi^T (u_n \phi_x^T + w_n \phi_z^T) (u_n + du) \\ & + \phi \phi_x^T u_n \phi_x^T du + \phi \phi_z^T u_n \phi_z^T dw \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

他の項に対しても同様の手順を行うと式 (15) 式 (16) は線形化され次式で表現できる。

$$\begin{aligned} & M\dot{u} + H_1(u_n + du) + H_2 du + H_3 dw + MP_b \\ & + K(u_n + du) = 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$L_1(u_n + du) + L_2(w_n + dw) = 0 \dots\dots\dots(22)$$

ここで各マトリックスは以下の通りである。

$$M = \iint \phi \phi^T dx dz = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \iint \phi \phi^T (u_n \phi_x^T + w_n \phi_z^T) dx dz \\ &= M(u_n B^T + w_n C^T) \end{aligned}$$

$$u_n^T = [u_i, u_j, u_m], \quad w_n^T = [w_i, w_j, w_m]$$

$$H_2 = \iint \phi \phi_x^T u_n \phi_x^T dx dz = B^T u_n M$$

$$H_3 = \iint \phi \phi_z^T u_n \phi_z^T dx dz = C^T u_n M$$

$$\begin{aligned} K &= \iint N_z \phi_z \phi_z^T dx dz - \int [N_z \phi_z \phi_z^T]_0^\delta dx \\ &= K_1 - K_2 \end{aligned}$$

$$K_1 = N_z C C^T \Delta$$

$$K_2 = - \left(\frac{l^2}{2} B C^T \right) \Big|_{z=0} - \left(\frac{l^2}{2} B C^T \right) \Big|_{z=\delta}$$

$$L_1 = \iint \phi \phi_x dx dz = A B^T \Delta$$

$$A^T = [a_i, a_j, a_m]/2\Delta$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \iint \phi \phi_z^T dx dz = A C^T \Delta \\ &\dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

時間項に関しては式 (12) で示したと同様の差分を適用するが、式 (13) の全体系の差分を行うと、この場合式が複雑化し取り扱いが面倒となるので、ここでは時間項 $\dot{u}$ のみの差分を考えて、これに式 (19) の関係を導入して次式で計算する。

$$\dot{u} = 2(u_n + du - u_0)/\Delta t - \dot{u}_0 \dots\dots\dots(24)$$

以上より、解くべき連立方程式 (21), (22) は du, dw を未知量とする方程式となる。計算手順は、適当な初期条件と境界条件式 (4) の下でこれを解き du, dw を求め得られた結果から式 (19) によって解の収束を図り、収束解を次の時間ステップの第 1 近似解として用い以後同様の計算を行えば良い。先節で示したと同様に境界層外縁での u_b, w_b は任意に与えられるので考える状態に対応した境界層内部の流速場を容易に求めることができる。粘性流体の計算に対し、ここでは、いわゆる直接法による解法を試みたが、波動底面境界層など鉛直速度成分が小さい場合、より高精度の計算が要求されるので解の安定性を保つためには十分な分割要素の選定や時間きざみが重要となる。

3. 適用計算例

(1) 計算方法の検証と検討

図-1 は解析方法の検証の為に計算した1例であって線形かつ層流の境界層に対して外縁流速 u_b を微小振幅波理論より与えて計算した場合である。境界層厚さは Shear-Wave の1波長 $\delta = 2\pi/\sqrt{\sigma/2\nu}$ を取り解析範囲とした。また時間きざみ Δt は、せん断波速 $c_s = \delta/T$ に対する C-F-L 条件を満足するように $\Delta t \leq \Delta z/c_s$ (Δz は境界層の分割幅) として計算する必要がある、ここでは $\Delta z = \delta/10$, $\Delta t = T/20$ (T は波の周期) とした。図-1 (a) は、流速分布 u/u_{om} ($u_{om} = \sigma H/2 \sinh kh$) を示したものであるが、初期条件として、各点で $u(t=0)=0$, また $u_b(t=0)=u_{om}$ を与えた時の1周期間での位相変化である。実線が計算結果、破線が理論解である。初期条件としては最も悪い条件であるが、この条件でも8~9周期目で破線の理論解と一致する。(b) 図は、定常に達した状態でのせん断力分布 τ/τ_{om} ($\tau_{om} = \sqrt{2\rho\nu\sigma/2\nu}(2u_{om})$) であり理論解と一致していることが示される。

図-2 は、乱流境界層を対象に、野田³⁾の提案した渦

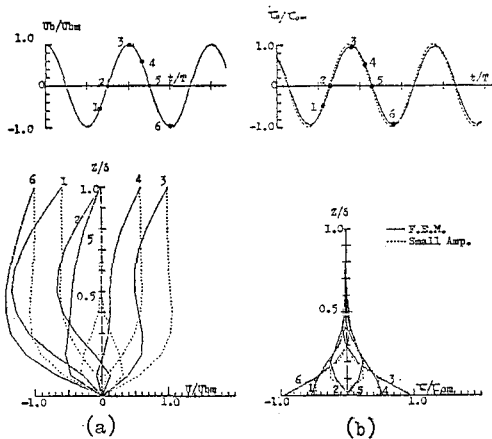


図-1 正弦波による層流境界層の流速およびせん断応力分布

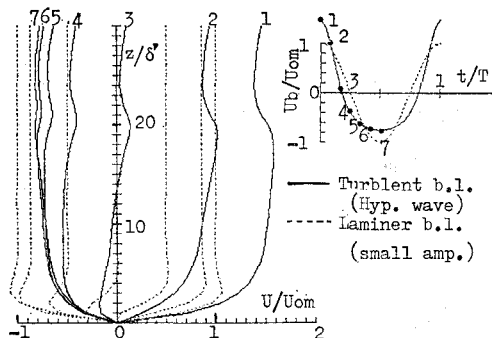


図-2 Hyperbolic 波による乱流境界層の流速分布

動粘性係数の3層分布モデルを仮定し、外縁流速として Hyperbolic 波 ($T=2.5$ s, $h=35$ cm, $H=8.8$ cm) を入力した場合である。ここに $\delta' = \sqrt{\nu/\sigma}$ である。波の有限振幅性によって岸向に偏った分布となり、また、層流境界層と異った分布形となることが分る。なお、この場合に外縁流速として正弦波を与えると野田が示した解と一致した結果が得られている。また、2次元の境界層に対する本計算方法の検証の例として図には示していないが、 $w=0$, $dw=0$ として鉛直流速を無視した平面上で正弦波入力に対する計算結果より正弦波の理論解とはほぼ一致する事により確かめた。

(2) 傾斜面上での波の変形と底部境界層の解析

波の変形に伴う底面境界層流体場を求める為に本解析の2次元解析方法を適用した。計算のケースは次表に示す通り勾配 $i=1/20$, $1/30$ の各場合につき、沖波波形勾配の異なるそれぞれ3ケース計算した。週上波の変形計算は文献2で示した解析方法を用い底面上での流速変動データを収録し、これを境界層外縁での条件として使用したものである。境界層の計算に際しては、 $w_b=0$ であるのでここでは鉛直流速を無視して計算することとし、境界層は層流であるとして境界層厚さ δ を層流解による値を採用して解析範囲とした。

図-3 は水深減少に伴う底面上での水平流速の全振幅 $\hat{u}_b/c_0$ (c_0 は沖波波速) を計算データより図示したものである。斜面を週上する内部流速場は、破波直前まで精度よく計算できている事は既に発表した⁴⁾が、底面の流速に関しても図中に示す磯部⁴⁾による結果とよく一致

表-1 計算ケース

Case	i	h _i (cm)	T(sec)	2E(cm)	H ₀ /L ₀	h _b (cm)	H _b (cm)	Type
1			1.0	6.5	0.0617	14.6	10.2	S
2	1/30	40.0	1.5	9.6	0.0293	14.3	11.7	S+P
3			2.5	16.4	0.0079	14.5	12.5	P
4			1.0	6.7	0.0735	16.1	10.8	S
5	1/20	35.0	1.5	11.7	0.0272	13.7	12.5	P
6			2.5	17.4	0.0083	13.4	11.3	P

S ; Spilling breaker , P ; Plunging breaker

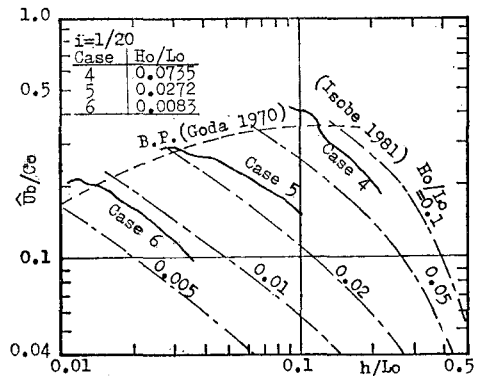


図-3 水深減少に伴う水平水粒子速度の全振幅の変化

している事が確かめられた。

図-4 は、これ等の計算データをもとに境界層内部の解析計算を行ったもので、Case 4 と Case 6 の各場合の砕波点近傍における水平流速とせん断応力の変動を示したものである。(b) の H_0/L_0 が小さく Plunging 砕波の場合では水深の減少に伴って波の有限振幅性が著しくなり、外縁での流速 u_b/c_0 および底面でのせん断応力 τ_0/τ_{0m} も岸向に偏った大きな変動をするようになる。逆に (a) Case 4 は Spilling 砕波であるが、境界層外縁での u_b/c_0 は砕波点近傍まで正弦的な変動を呈し、せん断応力分布もほぼ対称的な形となるが流速分布は u_b/c_0 の変動でも分るように、むしろ沖向に偏る分布である。

図-5 は、斜面上での水面変動 η およびその底面上で境界層外縁に作用する水平流速 u_b の変動を岸方向 (+) 沖方向 (-) に区別し、岩垣⁹⁾と同様に各位相での 2 乗値の総和をとり、岸向成分の割合を計算した結果である。

$$E_{0n} = \Sigma(\eta_+)^2 / \{\Sigma(\eta_+)^2 + \Sigma(\eta_-)^2\} \dots\dots\dots(25)$$

$$U_{0n} = \Sigma(u_+)^2 / \{\Sigma(u_+)^2 + \Sigma(u_-)^2\} \dots\dots\dots(26)$$

で定義している。

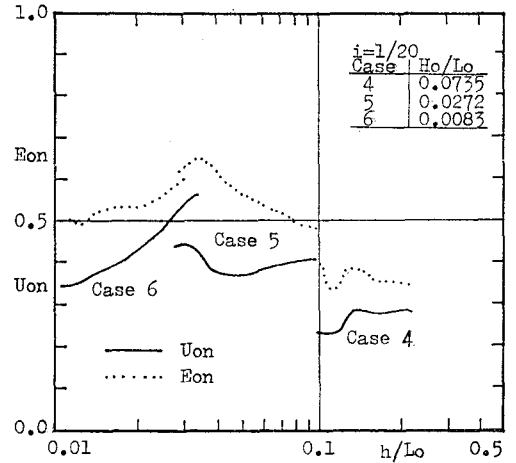
図-6 は、底面せん断応力 τ_0 に対しても同様に定義したもので

$$T_{0n} = \Sigma(\tau_{0+})^2 / \{\Sigma(\tau_{0+})^2 + \Sigma(\tau_{0-})^2\} \dots\dots\dots(27)$$

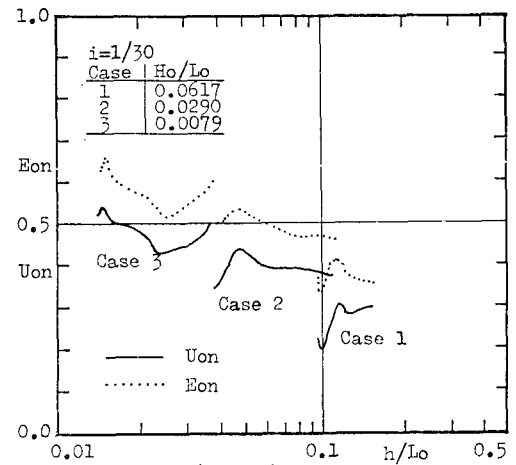
$$I_{0n} = I_+^2 / (I_+^2 + I_-^2) \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $I_+ = \int_{t_1}^{t_2} (\tau_{0+}) dt$, $I_- = \int_{t_1}^{t_2} (\tau_{0-}) dt$ であって、 τ_0 の岸、沖方向への力積を意味する。図-5、図-6 より、 E_{0n} は水深の減少と共に岸向の傾向が大きくなるが、 H_0/L_0 が大きい場合はむしろ沖向の傾向を示す。また、 U_{0n} は E_{0n} と同様の傾向であるが E_{0n} に比べて各ケー

スとも沖向の比率が高くなり、 H_0/L_0 が小さくなると 0.5 に近づく。しかし、Case 6 のように水深の減少と共に沖向の傾向が強くなる場合もある。図-6 のせん断応



(a) $i=1/20$



(b) $i=1/30$

図-5 水面変動と底面流速の岸向成分の割合

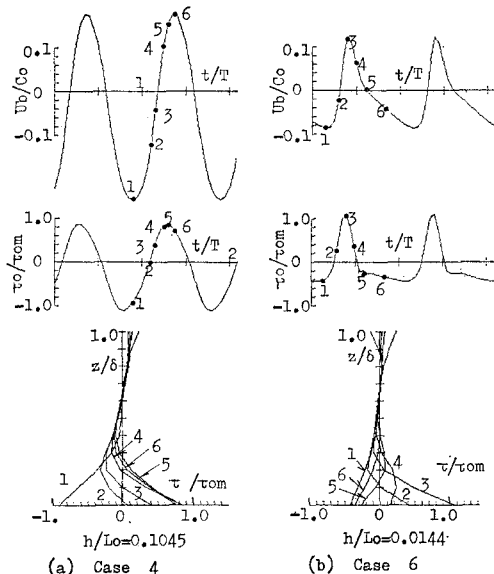


図-4 斜面上での流速とせん断応力の変動

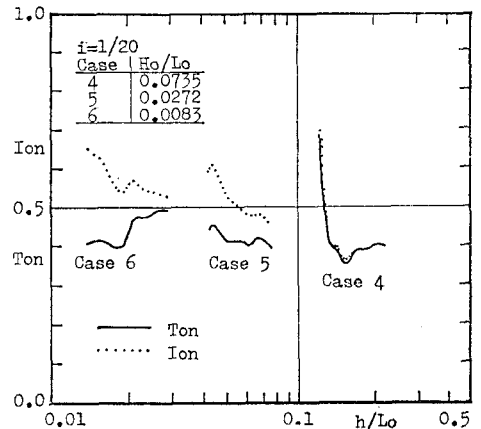


図-6 底面せん断応力の岸向成分の割合

力に関して, T_{0n} は H_0/L_0 が比較的小さい場合, 水深変化に余り左右されずほぼ平均的な値となるが H_0/L_0 が大きい場合, 砕波点に近づき急な岸向の変化をする. また I_{0n} の値は, H_0/L_0 が大きく, Case 4 のように正弦的変動を呈する場合, T_{0n} と同じ値を取るが, H_0/L_0 が小さい場合には, 水深の減少と共に時間変動の波形の非

対称性が出現し, その結果岸向き成分が大となる. なお, 岸・冲向成分の 2 乗値の総和に対する割合は, 変動の 1 周期内での平均的卓越方向を意味するもので直接に底質移動の方向性を議論するものでなく, むしろ式 (28) の定義による力積の割合を用いて底質移動の傾向を調べる方が妥当の様に思われるが, これらの点に関しては, 今回計算の精度も含めて検討する必要がある.

図-7 は, Case 4 および Case 6 の場合, 底面境界層内での流速の空間分布 (u/c_0) の時間変化と, 図中のある時間でせん断応力分布 ($\tau/\rho g H_0$) を示したものである. Case 4 の H_0/L_0 が大きい場合には, 波前面での水平流速の方向変化が急であり, 平均的に境界層内部での冲向流速成分が大であり, 何らかの原因で浮遊した物質があると冲向に移動する傾向にあることが分る. また, Case 6 の H_0/L_0 が小さい場合には流速分布は波峰前後の長い区間にわたって平均的に岸向の分布であることが分る.

4. あとがき

本研究は, 波動の底面境界層に関して, 波運動の有限振幅性を容易に取り扱える有限要素法による解析方法を示し, その検証を行うとともに, 斜面上を遡上し変形する波に伴う底面境界層の特性について計算例をもとに若干の検討を加えた. 今後, 底質の移動機構と関連してさらに詳細な検討を進めて行きたい.

最後に, 本研究の端緒から御指導を賜った京都大学工学部 岩垣雄一教授ならびに貴重な資料とご助言を載いた浅野敏之助手に謝意を表します.

なお, 本研究は昭和 59 年度文部省科学研究費による研究の一部である事を付記し謝意を表する.

参 考 文 献

- 1) 裏 義光・辻 俊一・岩垣雄一: 底面近傍の流体場におよぼす波の有限振幅性の影響について, 第 31 回海岸工学講演会論文集, pp. 54~58, 1984.
- 2) 滝川 清・岩垣雄一・中川政博: 有限要素法による斜面上の波の変形と内部機構の解析, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 20~24, 1983.
- 3) 野田英明: 波動による乱流境界層の発達, 第 16 回海岸工学講演集, pp. 23~27, 1969.
- 4) 磯部雅彦, 堀川清司: 砕波帯付近における流速場の浅水変化に関する研究, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 5~9, 1981.
- 5) 岩垣雄一・裏 義光: 砕波帯を含む固定斜面上の波動場の特性に関する実験的研究, 第 27 回海岸工学講演会論文集, pp. 35~39, 1980.

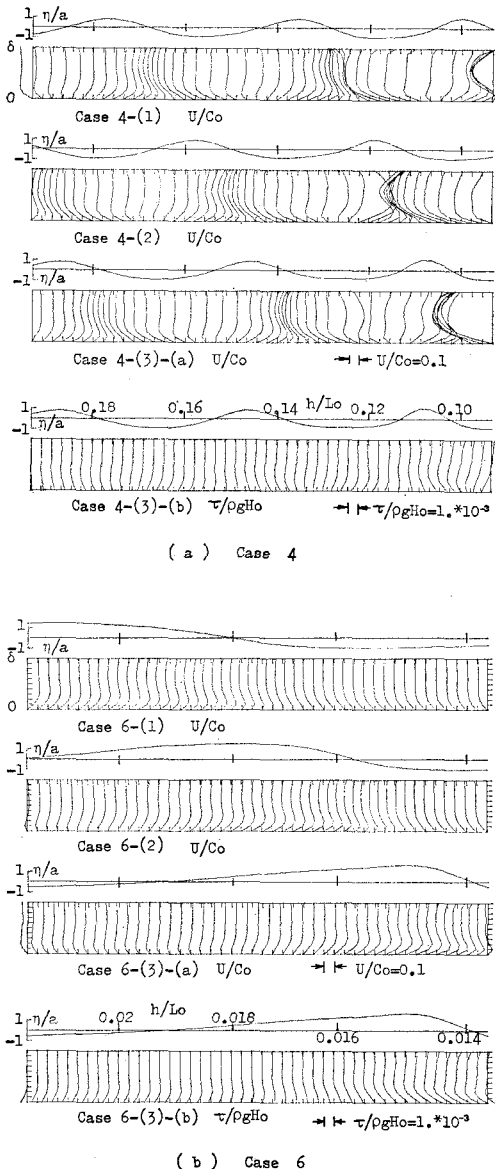


図-7 底面境界層内流速の時間変動