

有限振幅進行波の新しい理論解に関する研究

田 渕 幹 修*・滝 川 清**

1. ま え が き

波形勾配が大きく非線形干渉を無視できないような水面波を調べる一方法として、著者らは先にモードの異なる基本波および干渉波の速度ポテンシャルの振幅を関係づけるモード結合方程式を導いた¹⁾。その応用例の一つとして有限振幅定形進行波（3次近似解）を示したが、これは、非線形連立方程式であるモード結合方程式より成分波の速度ポテンシャルを求めるとき、 ka (k, a は後述)の次数の低いものから順次決めてゆく、実質的に摂動法と同等の方法をとったもので、得られた解の適用範囲は Stokes の3次近似解とほぼ一致するものであった²⁾。

ところでモード結合方程式は、次数にこだわらずに全体的に解を見通せる特長を有するものであるが、先にとった解法は必ずしもこれを生かしたものだとはいえない。今回は、モード結合方程式が、各成分波の振幅について既に解けており、またその非線形項は数値計算上の簡単な工夫で対処できる事に注目し、表現上の再検討を行って ka の4次のオーダーの解を求めた。得られた解は、長波の波形を正弦波の重畳で表わそうとする為の限界はあるが、2次波峯の影響を5%程度認める時、長波領域でアーセル数が120以下の、また浅海波と深海波では砕波点を含む全領域の波に対して適用できる。

本報告では、式の誘導過程を主に示し、最後に計算例と簡単な考察を行う。

2. 基礎式とモード結合方程式

静水面上に x 軸、鉛直上方に z 軸をとり、水深 h は一定、もしくはその勾配の影響を無視しうる程度に x 軸方向の変化率が小さい値をとるものとする。非圧縮・完全流体の非回転2次元運動を考えると、速度ポテンシャル Φ が存在し、流体域で成立すべき基礎式は次の連統方程式 (Laplace 方程式) と圧力方程式で示される。

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Phi_t + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 p は圧力、 g は重力の加速度、 ρ は流体の密度で、下付添字はその変数による偏微分を表わす。

また、水底および水面における境界条件はそれぞれ次のように与えられる。ただし ζ は水面変動量。

$$z=h \text{ で } \Phi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$z=\zeta \text{ で } \Phi_t + g\zeta + (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)/2 = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$z=\zeta \text{ で } \zeta_t + \zeta_x \Phi_x - \Phi_z = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

式 (1) および式 (3) は線形で、これを満足する速度ポテンシャルは次のようにおける。

$$\begin{aligned} \Phi &= -g\gamma t + \sum_j \frac{\cosh k_j(h+z)}{\cosh k_j h} (\phi_j e^{i\theta_j} + \phi_j e^{-i\theta_j}) \\ \theta_j &= k_j x - \sigma_j t, \quad (i = \sqrt{-1}) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 ϕ_j, ϕ_j は成分波の複素振幅で k_j は成分波の wave number, σ_j は angular frequency である。また、全ての成分波は x の正の方向に進行する場合を考える。

γ は、平均水面と静水面が一致すべきであるとの条件、すなわち ζ の平均値を 0 とおいて決まる定数で、ここでは、平均水面の昇降 (set-down, set-up) や質量輸送を補う流れについては考慮しない。

水面変動量 ζ は式 (4) より次のように表わせる。

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_z^2) \right\} \Big|_{z=\zeta} \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式に式 (6) を代入、これに含まれる ζ を自己代入によって所要のオーダー内から消去すると次式を得る (4重総和以上省略)。

$$\begin{aligned} \zeta &= \gamma + i \sum_j -(\sigma_j/g) M_j \\ &+ \sum_{jk} \left\{ \left(\frac{1}{g^2} \sigma_j \sigma_k k_k \beta_k + \frac{1}{2g} k_j k_k \right) M_j M_k \right. \\ &+ \left(-\frac{1}{2g} k_j k_k \beta_j \beta_k \right) P_j P_k \\ &+ i \sum_{jkl} \{ -(\sigma_j \sigma_k \sigma_l p_{jkl}^{(3)}) + \sigma_j k_k k_l p_{jkl}^{(3)} \} M_j M_k M_l \\ &+ (\sigma_j p_{jkl}^{(3)}) M_j P_k P_l \} \\ &+ \dots \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに $P_j = \phi_j e^{i\theta_j} + \phi_j e^{-i\theta_j}$, $M_j = \phi_j e^{i\theta_j} - \phi_j e^{-i\theta_j}$,

$$\beta_j = \tanh k_j h,$$

$$p_{jkl}^{(3)} = (2k_k k_l \beta_k \beta_l + k_j^2)/(2g^3)$$

* 正会員 熊本大学講師 工学部環境建設工学科

** 正会員 工博 熊本大学講師 工学部土木工学科

$$p_{jk}^{(3,2)} = (k_j \beta_j + k_k \beta_k + k_l \beta_l) / (2g^2)$$

$$p_{jk}^{(3,3)} = k_k^2 k_l \beta_l + k_k k_l^2 \beta_k + k_j k_k k_l \beta_j \beta_k \beta_l / (2g^2)$$

次に、水面における運動学的境界条件である式 (5) よりモード結合方程式を導く。式 (5) に式 (6) を代入、また式 (8) を代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_j (\sigma_j^2 - g k_j \beta_j) (\phi_j e^{i\theta_j} + \phi_j e^{-i\theta_j}) \\ = i \sum_{jk} \{ Q_{jk}^{(2,1)} \phi_j \phi_k e^{i(\theta_j + \theta_k)} + Q_{jk}^{(2,2)} \phi_j \phi_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \\ + Q_{jk}^{(3,1)} \phi_j \phi_k e^{-i(\theta_j + \theta_k)} \} \\ + \sum_{jkl} \{ Q_{jkl}^{(3,1)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j + \theta_k + \theta_l)} \\ + Q_{jkl}^{(3,2)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_l)} \\ + Q_{jkl}^{(3,3)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j - \theta_k - \theta_l)} \\ + Q_{jkl}^{(3,4)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(-\theta_j - \theta_k - \theta_l)} \} + \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 $Q_{jk}^{(2,1)} = -Q_{jk}^{(2,1)} = -D_{jk}^{(2,1)}$ 、 $Q_{jk}^{(2,2)} = -D_{jk}^{(2,2)}$

$$+ D_{jk}^{(2,1)}, \quad Q_{jkl}^{(3,1)} = Q_{jkl}^{(3,4)} = -D_{jkl}^{(3,1)} - D_{jkl}^{(3,2)},$$

$$Q_{jkl}^{(3,2)} = -D_{jkl}^{(3,1)} + D_{jkl}^{(3,1)} + D_{ikl}^{(3,1)} - D_{jkl}^{(3,2)} - D_{jkl}^{(3,2)} - D_{ikl}^{(3,2)},$$

$$Q_{jkl}^{(3,3)} = D_{jkl}^{(3,1)} + D_{jkl}^{(3,1)} - D_{ikl}^{(3,1)} - D_{jkl}^{(3,2)} - D_{jkl}^{(3,2)} - D_{ikl}^{(3,2)},$$

$$D_{jk}^{(2,1)} = \sigma_j \sigma_k^2 (k_k \beta_k + k_j \beta_j) / (g - 2\sigma_k k_j k_k) \\ + \sigma_j (k_k^2 - k_j k_k \beta_j \beta_k)$$

$$\begin{aligned} D_{jkl}^{(3,1)} = & -\sigma_j \sigma_k \sigma_l^2 \{ 2k_j k_k \beta_j \beta_k + 4k_k k_l \beta_k \beta_l \\ & + 2(k_j^2 + k_l^2) \} / (2g^2) - \sigma_j \sigma_k \{ 2k_k^2 k_l \beta_l \\ & + 2k_j k_k k_l \beta_j \beta_k \beta_l - k_l^2 \beta_l \} / (2g) \\ & + \sigma_j \sigma_l k_k k_l \{ 4k_j \beta_j + 4k_k \beta_k + 4k_l \beta_l \} / (2g) \\ & + \sigma_l^2 k_j k_k (2k_j \beta_j + k_l \beta_l) / (2g) \\ & + k_j k_k k_l (2k_k \beta_k - 3k_l) / 2, \end{aligned}$$

$$D_{jkl}^{(3,2)} = -\sigma_j^2 k_k k_l (2k_k k_l + k_j \beta_j \beta_k \beta_l) / (2g) \\ + k_j k_k k_l^2 \beta_j \beta_k / 2$$

式 (9) に $e^{-i\theta_n}$ を乗じ時空間平均をとると、左辺は $\overline{e^{i(\theta_j - \theta_n)}} = 1$ ($j=n$) または 0 ($j \neq n$)、 $\overline{e^{i(-\theta_j - \theta_n)}} = 0$ の関係より $j=n$ の時のみ残り、総和記号ははずれる (上付バーは平均操作を表す)。また、右辺は整合条件 (共鳴干渉条件) を満足する項のみ残り。たとえば、2 次の第 1 項についてみると、

$$\overline{e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_n)}} = \begin{cases} 0 & (\theta_n \neq \theta_j + \theta_k) \\ 1 & (\theta_n = \theta_j + \theta_k) \end{cases}$$

より $\theta_n = \theta_j + \theta_k$ となるような成分波 j と成分波 k の組み合わせの時のみ値があり、これらの成分波のみが ϕ_n に関係していることになる。 k_j および σ_j は正の値をとるとすると、 $\overline{e^{-i(\theta_j + \theta_k + \theta_n)}}$ の項で整合条件を満足する組み合わせはありえないのでこの項を落とし、式 (9) を書き直すと次式となる。

$$\begin{aligned} (\sigma_n^2 - g k_n \beta_n) \phi_n \\ = i \sum_{jk} \{ Q_{jk}^{(2,1)} \phi_j \phi_k e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_n)} \\ + Q_{jk}^{(2,2)} \phi_j \phi_k e^{i(\theta_j - \theta_k - \theta_n)} \\ + \sum_{jkl} \{ Q_{jkl}^{(3,1)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j + \theta_k + \theta_l - \theta_n)} \} \end{aligned}$$

$$+ Q_{jkl}^{(3,2)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_l - \theta_n)}$$

$$+ Q_{jkl}^{(3,3)} \phi_j \phi_k \phi_l e^{i(\theta_j - \theta_k - \theta_l - \theta_n)}$$

$$+ \dots \quad (n=1, 2, 3) \dots \dots \dots (10)$$

式 (9) に $e^{i\theta_n}$ を乗じると同様に ϕ_n に関する式が得られる。

3. 定形進行波の 4 次近似解の誘導

(1) 速度ポテンシャルと分散関係式

基本波として速度ポテンシャルの振幅が ϕ_1 および ϕ_1 、位相が $\theta_1 (= kx - \sigma t)$ の波を考えると、整合条件を満足する次のような成分波が現われる。

基本成分波 $\phi_1 e^{i\theta_1}$ 、 $\phi_1 e^{-i\theta_1}$ 、 $\theta_1 = kx - \sigma t$

共鳴干渉による成分波

$$\phi_2 e^{i\theta_2}, \quad \phi_2 e^{-i\theta_2}, \quad \theta_2 = 2\theta_1$$

$$\phi_3 e^{i\theta_3}, \quad \phi_3 e^{-i\theta_3}, \quad \theta_3 = 3\theta_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

ここでは、共鳴干渉により現われる成分波として、その波数と周波数いずれも基本波のそれを整数倍した、波速の等しい拘束波を考えていることになる。これら各成分波を関係づける式として式 (10) および ϕ_n についての同様の式から、考える成分波の数に等しいだけの方程式が得られる。 ϕ_n についてこれを示すと次のようである。

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - g k \beta_1) \phi_1 &= Q_{11}^{(3,2)} \phi_1^2 + i Q_{11}^{(3,2)} \phi_2 \phi_1 + \dots \\ (4\sigma^2 - 2g k \beta_2) \phi_2 &= i Q_{11}^{(3,1)} \phi_1^2 \\ &+ (Q_{12}^{(3,2)} + Q_{21}^{(3,2)}) \phi_1 \phi_2 + \dots \\ (9\sigma^2 - 3g k \beta_3) \phi_3 &= Q_{11}^{(3,1)} \phi_1^3 + i (Q_{12}^{(3,1)} + Q_{21}^{(3,1)}) \phi_1 \phi_2 \\ &+ (Q_{13}^{(3,1)} + Q_{31}^{(3,1)}) \phi_1 \phi_3 + \dots \\ (16\sigma^2 - 4g k \beta_4) \phi_4 &= i (Q_{13}^{(3,1)} + Q_{31}^{(3,1)}) \phi_1 \phi_3 + \dots \end{aligned} \dots \dots \dots (11)$$

ϕ_n についても同様の式が得られる。

ϕ_1 および ϕ_1 は、基本波の水位変動を

$$\zeta_0 = a \cos(kx - \sigma t) \dots \dots \dots (12)$$

とすると、式 (8) の 1 次の項との比較により次のように決まる。

$$\phi_1 = -\phi_1 = -i \frac{g}{2k\sigma} (ka) \dots \dots \dots (13)$$

これと式 (11) より、 ϕ_n (ϕ_n も同様) は基底 $(ka)^n$ のオーダーとなっていることが分る。

まず、式 (11) の第 1 式は、同式中の ϕ_2 を ϕ_1 で表わし、式全体を ϕ_1 でくくると、 ϕ_1 に関する式と全く同じになり、これが分散関係を与える。 ϕ_1 でくくるため分散関係式は式 (11) の表示より 1 次だけオーダーが下り、 $(ka)^4$ のオーダーまで求めるには、式 (11) の第 1 式は 5 次の項まで示す必要がある。ここでは、式 (11) でのオーダーの統一と、Stokes 波との対応を考え $(ka)^2$ まで求める (3 次の項は現われない)。結果は次のようであ

る。

$$\begin{aligned}
 0 = & 1 - \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) \beta_1 \\
 & + \left\{ \frac{1}{8} (3 + 6\beta_1^2) - \frac{1}{A^{(2)}} \beta_1 (\beta_1 + 2\beta_2) \right\} (ka)^2 \\
 & - \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{1}{8} \beta_1 (20 + \beta_1^2) \right. \\
 & + \frac{1}{2A^{(2)}} (\beta_1^3 - 9\beta_1 - 6\beta_2) \left. \right\} (ka)^2 \\
 & + \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{1}{8} (3 + \beta_1^2) \right. \\
 & - \frac{1}{2A^{(2)}} (9 - 3\beta_1^2 + \beta_1 \beta_2 (3 - \beta_1^2)) \left. \right\} (ka)^2 \dots (14)
 \end{aligned}$$

ここで $A^{(2)}$ は ϕ_2 を決める時現われるもので、一般的に次式で示される。

$$\begin{aligned}
 A^{(n)} = & n \{ n - (gk/\sigma^2) \beta_n \} \\
 & + (n^2/4) \{ 2 + n^2 + 2\beta_1^2 + 4n\beta_1\beta_n \\
 & - (gk/\sigma^2) (6n\beta_n + 14\beta_1 + n\beta_1^2\beta_n) \\
 & + (gk/\sigma^2)^2 (3 + \beta_1^2) \} (ka)^2 \dots (15)
 \end{aligned}$$

次に、式 (11) の第 2 式以降より、 ϕ_2 , ϕ_3 等は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{k\sigma}{g} \phi_2 = & - \frac{k\sigma}{g} \phi_2 = - \frac{i}{2} \{ (g_{21})(ka)^2 + (g_{22})(ka)^4 \} \\
 \frac{k\sigma}{g} \phi_3 = & - \frac{k\sigma}{g} \phi_3 = - \frac{i}{2} (g_3)(ka)^3 \\
 \frac{k\sigma}{g} \phi_4 = & - \frac{k\sigma}{g} \phi_4 = - \frac{i}{2} (g_4)(ka)^4 \dots (16)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 (g_{21}) = & - \{ 2\beta_1 - (gk/\sigma^2)(3 - \beta_1^2) \} / (2A^{(2)}) \\
 (g_3) = & - 3 \{ [1 + 2\beta_1^2 - (gk/\sigma^2)\beta_1(4 - \beta_1^2) + (gk/\sigma^2)^2 \\
 & \times (1 - \beta_1^2)] + 8(g_{21})\{\beta_1 + 2\beta_2 - (gk/\sigma^2) \\
 & \times (3 - \beta_1\beta_2)\} \} / (8A^{(3)}) \\
 (g_{22}) = & - [\{ 2\beta_1(5 + 3\beta_1^2) - 10(gk/\sigma^2)(1 + 3\beta_1^2) \\
 & + 3(gk/\sigma^2)^2\beta_1(5 - \beta_1^2) \} / 6 + 3(g_{31})\{\beta_1 + 3\beta_3 \\
 & - (gk/\sigma^2)(3 + \beta_1\beta_3)\}] / (2A^{(2)}) \\
 (g_4) = & [\{ -2\beta_1(5 + 3\beta_1^2) + (gk/\sigma^2)(7 + 12\beta_1^2 - 3\beta_1^4) \\
 & - 6(gk/\sigma^2)^2\beta_1(1 - \beta_1^2) \} / 12 - (g_{21})\{6 + 2\beta_1^2 \\
 & + 8\beta_1\beta_2 - 2(gk/\sigma^2)(3\beta_1 + 5\beta_2 - 2\beta_1^2\beta_2) \\
 & + (gk/\sigma^2)^2(3 - \beta_1^2 - 2\beta_1\beta_2) - 4(g_{21})^2\{4\beta_2 \\
 & - (gk/\sigma^2)(3 - \beta_1^2) - 6(g_{31})\{\beta_1 + 3\beta_3 \\
 & - (gk/\sigma^2)(3 - \beta_1\beta_3)\} \}] / A^{(4)}
 \end{aligned}$$

これらの結果より次のような事がいえる。まず、 ϕ_n および ϕ_n は虚数 (式 (12) で $\sin$ 波を考えると実数) のみで表わされることにより、定形波は常に対称であること。 (gk/σ^2) は線形理論による深海波の波長と、任意水深および波形勾配の時の波長の比で、波形勾配が小さいときは $gk/\sigma^2 \approx \tanh kh$ で示されるが、これと (ka) の積 $(gk/\sigma^2)(ka)$ は深海波で ka 長波で a/h となり、摂動法における微小パラメーターに対応していること。ま

た、 $\beta_n (= \tanh nkh) \approx nkh$ と近似できるような長波領域では $A^{(n)}$ が $(ka)^2$ 、上述の結果を使うと $(a/h)^2$ のオーダーとなり、 ϕ_n の次数が実質的に小さくなること等々。

式 (13) および式 (16) を式 (6) に代入すると、虚数部は消えて速度ポテンシャルは次式となる。ただし、式 (6) 右辺の第 2 項のみを示す。

$$\begin{aligned}
 \frac{k\sigma}{g} \phi = & \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} (ka) \sin \theta \\
 & + \{ (g_{21}) + (g_{22})(ka)^2 \} \frac{\cosh 2k(h+z)}{\cosh 2kh} (ka)^2 \sin 2\theta \\
 & + (g_3) \frac{\cosh 3k(h+z)}{\cosh 3kh} (ka)^2 \sin 3\theta \\
 & + (g_4) \frac{\cosh 4k(h+z)}{\cosh 4kh} (ka)^4 \sin 4\theta \dots (17)
 \end{aligned}$$

(2) 水面変動量と波高

式 (13) および式 (16) を式 (8) に代入し整理すると $\sin$ の項は消えて水面変動量 ζ は次式となる。

$$\begin{aligned}
 k\zeta = & \{ 1 + (f_{12})(ka)^2 \} (ka) \cos \theta \\
 & + \{ (f_{21}) + (f_{22})(ka)^2 \} (ka)^2 \cos 2\theta \\
 & + (f_3)(ka)^3 \cos 3\theta + (f_4)(ka)^4 \cos 4\theta \dots (18)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 (f_{12}) = & (g_{21})\{\beta_1 + 2\beta_2 - (gk/\sigma^2)(1 + \beta_1\beta_2)\} \\
 & + \{ 3 + 6\beta_1^2 - (gk/\sigma^2)\beta_1(11 + \beta_1^2) \} / 8 \\
 (f_{21}) = & 2(g_{21}) + \{ 2\beta_1 - (gk/\sigma^2)(1 - \beta_1^2) \} / 4 \\
 (f_{22}) = & 2(g_{22}) + 3(g_{31})\{3\beta_3 + \beta_1 - (gk/\sigma^2) \\
 & \times (1 + \beta_1\beta_3)\} / 2 + (g_{21})\{3 + \beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2 \\
 & - (gk/\sigma^2)(4\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_1^2\beta_2)\} \\
 & + \{ 2\beta_1(5 + 3\beta_1^2) / 3 - 6(gk/\sigma^2)(1 + 3\beta_1^2) \\
 & + 3(gk/\sigma^2)^2\beta_1(1 - \beta_1^2) \} / 12 \\
 (f_3) = & 3(g_3) + (g_{21})\{\beta_1 + 2\beta_2 - (gk/\sigma^2) \\
 & \times (1 - \beta_1\beta_2)\} + \{ 1 + 2\beta_1^2 - (gk/\sigma^2)\beta_1 \\
 & \times (1 - \beta_1^2) \} / 8 \\
 (f_4) = & 4(g_4) + 3(g_3)\{\beta_1 + 3\beta_3 - (gk/\sigma^2) \\
 & \times (1 + \beta_1\beta_3)\} / 2 + (g_{21})^2\{4\beta_2 - (gk/\sigma^2) \\
 & \times (1 - \beta_1^2)\} + (g_{21})\{(3 + \beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2) / 2 \\
 & - (gk/\sigma^2)\beta_2(1 - \beta_1^2)\} + \{ 2\beta_1(5 + 3\beta_1^2) / 3 \\
 & - (gk/\sigma^2)(1 - \beta_1^2) \} / 16
 \end{aligned}$$

また γ は、静水面と平均水面が一致するものとするとき次式となる。

$$\begin{aligned}
 k\gamma = & - \frac{1}{4} \left\{ 2\beta_1 - \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) (1 + \beta_1^2) \right\} (ka)^2 \\
 & - \left[(g_{21})^2 \left\{ 4\beta_2 - \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) (1 + \beta_1^2) \right\} \right. \\
 & + \frac{1}{2} (g_{21}) \left\{ 3 + \beta_1^2 + 4\beta_1\beta_2 - \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) \right. \\
 & \times (4\beta_1 + 4\beta_2 - \beta_1^2\beta_2) \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{8} \left\{ \frac{2}{3} \beta_1(5 + 3\beta_1^2) - 2 \left(\frac{gk}{\sigma^2} \right) (1 + 3\beta_1^2) \right.
 \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{gk}{\sigma^2}\right)\beta_1(1+\beta_1^2)\left\}(ka)^4 \dots\dots\dots(19)\right.$$

次に、水面変動の極大値（峰高） $\zeta_{\max}$ および極小値 $\zeta_{\min}$ は位相 θ がそれぞれ 0 および π のとき起るので式 (18) より次式となる。

$$k\zeta_{\max}=(ka)+(f_{21})(ka)^2+\{(f_{21})+(f_3)\}(ka)^3 \\ +\{(f_{22})+(f_4)\}(ka)^4 \dots\dots\dots(20)$$

$$k\zeta_{\min}=-(ka)+(f_{21})(ka)^2-\{(f_{12})+(f_3)\}(ka)^3 \\ +\{(f_{22})+(f_4)\}(ka)^4 \dots\dots\dots(21)$$

また、波高 H は $\zeta_{\max}$ と $\zeta_{\min}$ の差として

$$kH=2(ka)+2\{(f_{12})+(f_3)\}(ka)^3 \dots\dots\dots(22)$$

または

$$\frac{H}{2a}=1+\{(f_{12})+(f_3)\}(ka)^2 \\ \dots\dots\dots(23)$$

水深がゆるやかに変化するときの波高の変化は、断面積分量としてのエネルギー・流束の平均値は水深が変わっても一定であるとして求められる。この平均的エネルギー・流束は次式となる。

$$\frac{\sigma k^2}{\rho g^2}\bar{W}=\frac{1}{4}\left(\beta_1+\frac{kh}{\cosh^2 kh}\right)(ka)^2 \\ +\frac{1}{8}[3\beta_1+8(g_{21})+(f_{21})(1+\beta_1^2 \\ +1/\cosh^2 kh)+4(g_{21})^2(\beta_2 \\ +2kh/\cosh^2 2kh)](ka)^4 \dots\dots(24)$$

浅水係数は、上式の $\bar{W}$ とその深海表示 $\bar{W}_0$ が等しくなるような、 ka およびその深海表示 ka_0 を求め、式 (22) を用いて計算することができる。なお gk/σ^2 の値も kh と ka に関係するので式 (14) を連立させて解く必要がある。

4. 計算例および適用範囲の検討

本理論解のように、波形を正弦波の重ねて表示した場合、波形の妥当性が問題となり、その意味で計算上の 2 次波峯の発生が適用限界の 1 つの目安とされる。

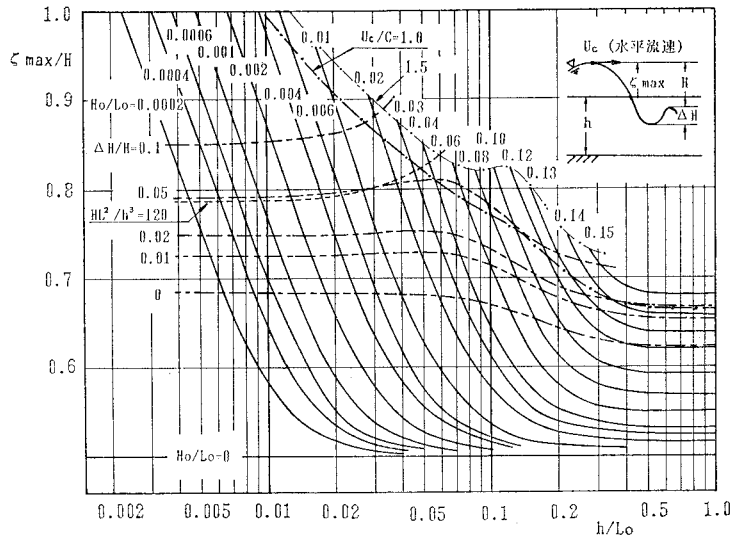
図—1 は峰高の計算結果とともに、この 2 次波峯の発生限界およびその程度を数値的に調べた結果を示した。また、砕波限界として、峰における水平流速 u_0 と波速 c の比が 1 となる線を記入している。

2 次波の発生は、深海波で波形勾配

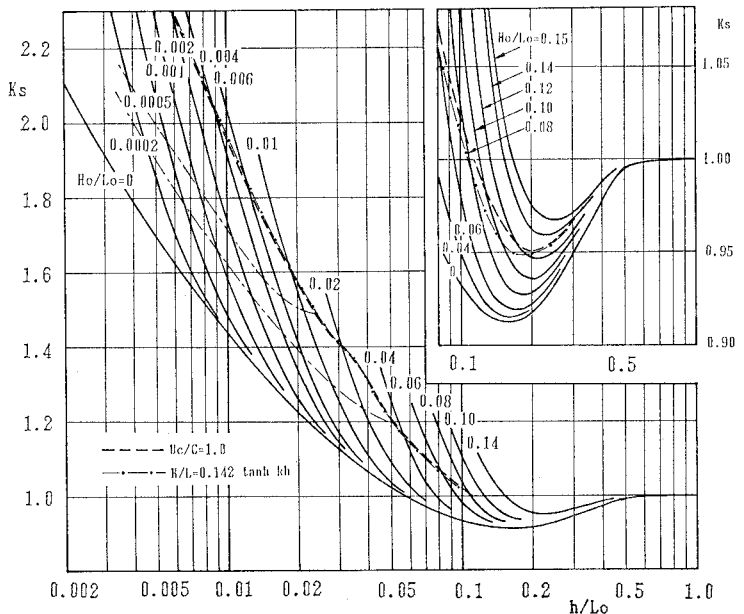
が約 0.12、長波領域で Ursell 数 (HL^2/h^3 , L ; 波長) が約 50 となっている。しかし、波形勾配を大きくする時の 2 次波の増大傾向はゆるやかで、2 次波の波高 ΔH と、式 (22) で定義した波高との比が 5% となるものが長波領域で Ursell 数が約 120、浅海および深海域では砕波限界を越えている。

なお、同図では峰高が発散しているように見えるが、これは $\eta_{\max}$ が過大なのではなく、分母の H が 2 次波の発生により小さく見積もられている為である。 $\eta_{\max}/H$ が 1 となるのは、2 次波のピークが平均水面に達していることを示している。

図—2 は、浅水係数 K_s を示したものである。また同



図—1 水深変化に伴う波の峰高の変化



図—2 浅水係数 K_s

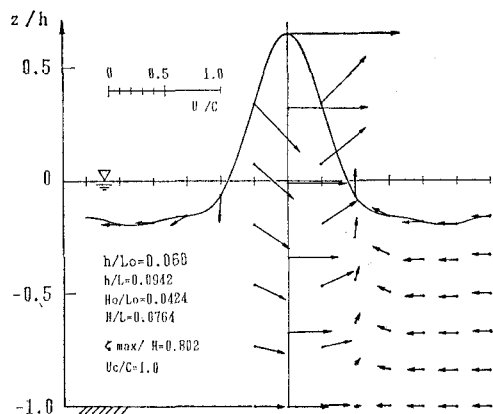


図-3 水面波形と流速分布の計算例

図中に、 $u_0/c=1$ と、浜田による碎波限界式 $H/L=0.142 \tanh kh$ を示した。両者はよく一致しており、流速に関する本理論解の妥当性を示唆するものである。なお浅水係数 K_s は、2次波の発生している範囲で既述のように H が過小となっている為 $\Delta H/H$ の値程度小さくなっている。この $\Delta H/H$ の値が 0.05 および 0.1 の線を、図中に一点鎖線で示している。

図-3 に水面波形と流速分布の計算例を示した。この例では、 $u_0/c=1$ すなわち碎波点で、また、 $\Delta H/H=0.455$ 、 $HL^2/h^3=91.5$ となっている。

5. あとがき

水の波の共鳴干渉という観点から非線形の基礎式をモード結合方程式に書き換え、これを用いて有限振幅定形進行波の4次近似解を導いた(分散関係式と平均的エネルギー流束の式は実質的に3次近似解に相当)。波速等の適用性に関する詳細な検討は今後の課題であるが、水面波形についての簡単な検討では Ursell 数 (HL^2/h^3) が 120 以下の波に対しては2次波峯の影響が5%以下で適用できることが分った。なお水面波形は式(8)から分るように速度ポテンシャルのオーダーとは別に多項表示も可能で、長波域では省ける項が多いことも今めて今後検討する必要がある。

このような課題はなお残っているが、本理論解、少くともその解析手法は一般の波の範囲で長波から深海波までを統一的に取り扱うことが可能といえよう。

最後に本研究遂行に当り熱心な協力を得た本学海岸研究室学生及び卒業生、特に山崎善章、斉藤敬、富高彰一、福島智弘、土居陽介の諸君に深甚の謝意を表するものである。

参考文献

- 1) 田淵幹修・滝川 清: 浅海波浪の非線形干渉について, 第28回海講演文集, pp. 94~98, 1981.
- 2) 田淵幹修 他: 有限振幅波の一理論解, 昭和57年度西部支部研究発表会講演概要集, pp. 114~115, 1983.