# 波動解に対する 2, 3 の考察

## ——微分摂動法の応用——

京藤敏達*・西村仁嗣**・椎貝博美***

## 1. 緒　言

微分摂動法は微分方程式を解析する一つの手法であり，助変数による微分を摂動の基本とするものである．本論文では特にこの方法を応用して流体力学の各種方程式の相似解，あるいは厳密解を求めることを考える．まず媒介パラメータを用いて独立変数および従属変数を変換し，摂動方程式[1]を求める一般的な手法を説明する．この手法に関連して，Bluman・Cole の拡張された相似解導出法[2]の意味を明確にする．また，Helmholtz 方程式を例にとり，その相似解が有する不変曲面を求める．

次に，ある方程式の厳密解が存在し，その摂動パラメータに関する関数形が与えられる場合に，同一の解によって満たされるべき簡単化された方程式を微分摂動法によって導く方法[3]を示す．この理論の最も単純な適用例として，Navier-Stokes 方程式および2次元の Lagrange 方程式の一部の解が満たす線形偏微分方程式が導かれる．

## 2. 相　似　解

### 2.1 変数変換と微係数の微分

独立変数 $x$, $y$ およびこれらの関数 $\varphi(x,y)$ を媒介パラメータを用いて，$X$, $Y$ および $\phi$ に変換する．

$$\left.\begin{array}{l} X=X(x,y,\varphi,\varepsilon) \\ Y=Y(x,y,\varphi,\varepsilon) \\ \phi=\phi(x,y,\varphi,\varepsilon) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上式で $\varphi(x,y)$ が具体的に与えられているならば

$$\phi=\hat{\phi}(X,Y,\varepsilon)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

の形に表現することが可能である．

微係数 $\partial\hat{\phi}/\partial X$ の $\varepsilon$ による微分を行ない，最終的に $\partial X/\partial\varepsilon$, $\partial Y/\partial\varepsilon$ および $\partial\phi/\partial\varepsilon$ で表現することを考える．以下において，混同を避けるために $(X,Y,\varepsilon)$ 系における微分を $D_X^n=\partial^n/\partial X^n$, $D_Y^n=\partial^n/\partial Y^n$, $D_\varepsilon=\partial/\partial\varepsilon$ で表記することとする．

まず，$D_X\phi$ を $\varepsilon$ で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(D_X\phi)=\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X^2\phi+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_YD_X\phi+D_\varepsilon D_X\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

である．一方，$\phi$ を $\varepsilon$ で微分して

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X\phi+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y\phi+D_\varepsilon\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

を得る．次に，式 (3) および (4) から $D_\varepsilon\phi$ を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(D_X\phi)=D_X\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}\right)-D_X\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}\right)\cdot D_X\phi-D_X\left(\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}\right)\cdot D_Y\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

となる．

同様の考え方で，さらに多変数の場合および高階の微係数の媒介パラメータによる微分を求めることができる．ここでは，簡単のため2変数の場合の高階微係数の微分公式を示す．

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(D_X^nD_Y^m)=\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y\right)D_X^nD_Y^m-D_X^nD_Y^m\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

### 2.2 変換の不変曲面

与えられた微分方程式

$$N[\varphi;\ x,y]=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

に対し，変換 (1) の中で方程式の形を不変にするものを想定すると，その変換によって上式は同型の方程式

$$N[\phi;\ X,Y]=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

に移される．

ところで前者の解 $\varphi(x,y)$ の $x$, $y$ を形式的に $X$, $Y$ で置き換えた関数 $\varphi(X,Y)$ は後者の自明解である．すなわち

$$\phi=\varphi(X,Y)\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

は方程式 (8) を満たしている．このような解はとくに相似解と呼ばれる．

式 (9) を媒介パラメータ $\varepsilon$ で微分すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X\varphi+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y\varphi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる．ここで，式 (1) で与えられる変換を Lie 群

* 学生員　工修　筑波大学大学院工学研究科
** 正会員　工博　筑波大学助教授　構造工学系
*** 正会員　工博　筑波大学教授　構造工学系

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial X}{\partial\varepsilon}=-Q^X(X,Y,\phi)\,, & X|_{\varepsilon=0}=x\\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial\varepsilon}=-Q^Y(X,Y,\phi)\,, & Y|_{\varepsilon=0}=y\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}=P(X,Y,\phi)\qquad, & \phi|_{\varepsilon=0}=\varphi\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

で規定すると，式 (9)～(11) より

$$M\phi=0\,,\quad M=\frac{P}{\phi}+Q^XD_X+Q^YD_Y\quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

となる．上式は相似解 $\phi$ に対する微分方程式であり，その解は変換 (11) における不変曲面を与えている．逆に相似解を得るためには，その解が上式を満たすような相似変換 (11) を求めなければならない．

以下では具体的な例として Helmholtz 方程式をとり上げ，相似解が存在するために $P$, $Q^X$ および $Q^Y$ が満たすべき方程式を導く．

Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+k^2\varphi=0\quad\cdots\cdots(13)$$

を方程式の形を不変とするような変換により

$$L\phi=(D_X^2+D_Y^2+k^2)\phi=0\quad\cdots\cdots(14)$$

とする．我々の命題は上式の解を求めることであるが，とくに相似解に着目するならば，条件式 (12) を併用することができる．以下において，式 (12) および (14) を連立させて扱かう方法を示す．

作用素 $L$ を $\varepsilon$ で微分すると，公式 (1) より

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}L=\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y\right)L-L\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X+\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\quad\cdots\cdots(15)$$

を得る．とくに $L\phi=0$ の場合には

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(L\phi)=L\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}D_X\phi-\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}D_Y\phi\right)=0\quad\cdots\cdots(16)$$

であり，さらに式 (11) の変換を考えるならば

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(L\phi)=LM\phi=0\quad\cdots\cdots(17)$$

となる．

Bluman・Cole[2] は結果的に式 (14) および (17) を連立させることにより相似解を求めている．上記の議論は微分摂動の考え方[1] に立脚して，その誘導過程の数学的な意味を明確にしたものである．

なお，$L\phi=0$ および式 (11) の条件の下では，より一般的に恒等式

$$LM\phi=ML\phi\quad\cdots\cdots(18)$$

が成立する．$M\phi=0$ および $L\phi=0$ なる条件の下に上式を満たすような変換を求めることになるが，式 (17) は上式右辺に $L\phi=0$ の条件を代入したものとなっている．

以上の相似解導出法を微分摂動の観点から解釈する上で，必ずしもパラメータを媒介とする変換を考える必要はない．不変曲面条件 (12) より基礎方程式 (14) の $Y$ 微分項を消去すれば，式 (14) は $Y$ をパラメータとして含む微分方程式となる．この方程式を $Y$ で微分し，微分摂動方程式[1] として不変曲面を用いれば，$Y$ に関する適当な境界条件のもとで双方の方程式を満たす解が構成できる．結果として得られる解は当然のことながら上述の方法で得られるものと同一である．

### 2.3 Helmholtz 方程式の相似解

Bluman・Cole[2] にしたがい，$\phi_X$, $\phi_Y$ 間の関係式 (12) を利用しながら式 (17) を解くことによって，Helmholtz 方程式における不変曲面を求める．

式 (17) を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}&\Delta P+P_{\phi\phi}(\phi_X^2+\phi_Y^2)+2(P_{X\phi}\phi_X+P_{Y\phi}\phi_Y)+P_\phi\Delta\phi\\&\quad+Q^m_{\phi\phi}\phi_m(\phi_X^2+\phi_Y^2)+2Q^m_{\phi X}\phi_m\phi_X+2Q^m_{\phi Y}\phi_m\phi_Y\\&\quad+Q^m_\phi(\phi_m\Delta\phi+2\phi_{mX}\phi_X+2\phi_{mY}\phi_Y)+2Q^m_X\phi_{mX}\\&\quad+2Q^m_Y\phi_{mY}+Q^m\Delta\phi_m+\Delta Q^m\phi_m+k^2(P+Q^m\phi_m)\\&=0\quad\cdots\cdots(19)\end{aligned}$$

ここに，$\Delta=\partial^2/\partial X^2+\partial^2/\partial Y^2$，記号 $m$ は $X$, $Y$ を表わし，とくに1項中の1対の $m$ は $X$, $Y$ に関する積和を表わす．なお，本節以降において，添字 $X$, $Y$, $\phi$ 等は，これらの変数に関する偏微分を表わすものとする．

式 (12) および (14) を満たす任意の $\phi$ に対して，式 (19) が満たされるように変換関数 $P$, $Q^m$ を定めることを考える．

式 (19) で $\Delta\phi=-k^2\phi$ を考慮した後，2階微分項の係数を0とするためには，$Q^X$, $Q^Y$ は $\phi$ によらず，かつ次式を満たさねばならない．

$$Q_X^X-Q_Y^Y=0\,,\quad Q_Y^X+Q_X^Y=0\quad\cdots\cdots(20)$$

さらに $P_{\phi\phi}=0$ が示されるので，$P=A\phi+B$ であり，低次微分項を0とする条件は結局次式のように与えられる．

$$\left.\begin{array}{l}Q^X\Delta A-2AA_X-2k^2Q^XQ_X^X=0\\ Q^Y\Delta A-2AA_Y-2k^2Q^YQ_Y^Y=0\\ Q^Y\Delta B-2A_YB+k^2Q^YB=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

便宜上，$Q^X=\alpha$, $Q^Y=\beta$ なる表記を用い，とくに $B=0$ の場合を考えることにすると，$\alpha$, $\beta$ および $A$ に関して解くべき方程式系は

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_X-\beta_Y=0\,,\quad \alpha_Y+\beta_X=0\\ F\equiv\alpha\Delta A-2AA_X-2k^2\alpha\alpha_X=0\\ G\equiv\beta\Delta A-2AA_Y-2k^2\beta\beta_Y=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(22)$$

である．これから，

$$\left.\begin{array}{l}\beta F-\alpha G\equiv-2A(\beta A_X-\alpha A_Y)=0\\ F_Y-G_X\equiv(\alpha_Y-\beta_X)\Delta A+\alpha\Delta A_Y\\ \qquad\qquad -\beta\Delta A_X-k^2(\alpha^2-\beta^2)_{XY}=0\end{array}\right\}\quad\cdots(23)$$

ただし，上式は式 (22) が成立するための必要条件に過ぎないことに注意する．

式 (23) の第1式より

$$\Delta(\beta A_X-\alpha A_Y)=0 \quad\cdots\cdots(24)$$

一方，式 (22) より $\Delta\alpha=\Delta\beta=0$ であるから

$$(\alpha^2-\beta^2)_{XY}=0 \quad\cdots\cdots(25)$$

が得られる．

さらに，$p=\alpha^2-\beta^2$，$q=2\alpha\beta$ なる表記を用いると，式 (22) の第1式から $p_X=q_Y$，$p_Y=-q_X$ が成り立つ．また，式 (25) から $p, q$ は陽形式に書かれる．

$$\left.\begin{aligned}p&=\kappa(X^2-Y^2)+\lambda X-\mu Y\\ q&=2\kappa XY+\mu X+\lambda Y\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(26)$$

こうして，$p$，$q$ の具体的な形が定まるので，2次方程式を解くことによって $\alpha$，$\beta$ が得られ，さらに式(23)の第1式から $A$ の形が得られる．以上の操作によって不変曲面が求められる．

上述の不変曲面を介する相似解群の中に，半無限堤による波の回折に関する Sommerfeld の著名な解が含まれることを示そう．式 (26) で $\kappa=\lambda=0$ とし，$(X, Y)$ から $(\alpha, \beta)$ への変数変換を行なうと $\beta A_X-\alpha A_Y=0$ は

$$p_Y A_\alpha+p_X A_\beta=-\mu A_\alpha=0 \quad\cdots\cdots(27)$$

これより $A=A(\beta)$ であるが，ここでは式 (22) の必要条件を求めているので，これを式 (22) に代入し，$A=\pm ik\beta$ を得る．したがって不変曲面は

$$\left.\begin{aligned}&\pm ik\beta\phi+\alpha\phi_X+\beta\phi_Y=0\\ &\alpha^2-\beta^2=-\mu Y, \qquad 2\alpha\beta=\mu X\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(28)$$

となる．これは回折解の導出に当って，Lamb が示した種々の変換[4] を含むものである．すなわち，回折解に到達するために用いられるべき数段階の変換が，上記の一連の議論に含まれる最も簡単な一例として容易に提示される．

## 3. 有限項のベキ級数による厳密解

### 3.1 微分摂動法による厳密解の導出

一般に摂動解は摂動パラメータ $\varepsilon$ の無限級数の形で得られるが，最初の数項を残して他の係数がすべて0となるような場合には，結果的に有限項から成る厳密解が得られることになる．ここでは，とくに方程式系 $H[u]=0$ の解が $\varepsilon$ に関して1次の表式 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\varepsilon\boldsymbol{u}_1$ ($\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}|_{\varepsilon=0}$, $\boldsymbol{u}_1=d\boldsymbol{u}/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$) の形で得られる場合を想定する．すなわち，命題は任意の $\varepsilon$ に対して $H[\boldsymbol{u}_0+\varepsilon\boldsymbol{u}_1]=0$ が満たされるように，$\boldsymbol{u}_0$ および $\boldsymbol{u}_1$ を定めることである．

この問題に微分摂動法[3]を適用すると，$\boldsymbol{u}_0$ および $\boldsymbol{u}_1$ が満たすべき方程式として

$$\frac{d^n}{d\varepsilon^n}H\bigg|_{\varepsilon=0}=0 \qquad (n=0, 1, 2, \cdots) \quad\cdots\cdots(29)$$

を得る．いま，方程式 $H=0$ が $\varepsilon$ を陽に含まない場合を考えると，$H=0$ が $\boldsymbol{u}$ に関して2次の非線形性を持つときは上式で $n=0$, 1 および2に対応する3組の方程式系を解くことになる．以下では，この過決定系を具体的にとり扱い，最終的に解かれるべき線形偏微分方程式を導く．

### 3.2 Navier-Stokes 方程式の厳密解

非圧縮性粘性流体を想定し，Navier-Stokes 方程式の両辺の rotation をとると，

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nu\Delta\boldsymbol{\omega} \quad\cdots\cdots(30)$$

ここに，$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ である．

いま，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\varepsilon\boldsymbol{u}_1$ と仮定する．式 (30) を微分摂動して得られる高次の過決定系は，同式の0次の厳密解 $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$ を用いて次のように書かれる．

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}_1+(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}_0-(\boldsymbol{w}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1$$
$$-(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_0-\nu\Delta\boldsymbol{\omega}_1=0 \quad\cdots\cdots(31)$$

$$(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}_1-(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1=0 \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1=0\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_1=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1 \quad\cdots\cdots(33)$$

これらを満たすように $\boldsymbol{u}_1$ および $\boldsymbol{\omega}_1$ を定めれば，式 (30) の別のより高度な厳密解が得られることになる．

まず，2次元の場合を考える．このとき，式 (33) から $u_1=\phi_{1y}$，$v_1=-\phi_{1x}$ となり，これを式 (32) に代入すると

$$\phi_{1y}\omega_{1x}-\phi_{1x}\omega_{1y}=0 \quad\cdots\cdots(34)$$

が得られる．上式を満足するには $\omega_1=\Omega(t, \phi_1)$ であればよく，結局解くべき方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{1xx}+\phi_{1yy}=\Omega(t, \phi_1)\\ &\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+(\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla)\omega_1+(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\omega_0-\nu\Delta\omega_1=0\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(35)$$

である．ところで，上式が満たされるためには，$\omega_1=\Delta\phi_1$ を上第2式に代入して $\phi_1$ を求め，この $\phi_1$ を使って $\Delta\phi_1$ を計算した結果が $t$ および $\phi_1$ のみで表現できなければならない．特に，$\phi_1$ が $y$ によらないときは，このことはいつでも可能である．

$\phi_1$ が $y$ によらないとすると，式 (35) は

$$\phi_{1xxt}+u_0\phi_{1xxx}-\omega_{0y}\phi_{1x}-\nu\phi_{1xxxx}=0 \quad\cdots\cdots(36)$$

と同値である．また，$\phi_1$ が $y$ によらないことから，$u_0$ および $\omega_{0y}$ は $y$ によらない．すると，$\phi_0=u_0y+C(t, x)$ となるが $C$ は $\phi_1$ に含めることにして $C=0$ とすると，$u_0$ に対する方程式が得られる．

$$u_{0xxt}+u_0u_{0xxx}-u_{0x}u_{0xx}-\nu u_{0xxxx}=0 \quad\cdots(37)$$

とくに，$u_0=a(t)x$ とおくと式 (36) は Kambe[5] によって導かれた方程式に合致する．さらに，式 (35) で $\Omega=s\phi_1$ としたものは G. I. Taylor[6] の解に対する基礎方程式である．

3次元の場合，式 (32) を解くことは一般には困難であるが，簡単な軸対称流をとり扱うことは可能である．円筒座標 $(r, \theta, z)$ において軸方向流速 $(U, V, W)$ とし，やはり解として $U=U_0+\varepsilon U_1$ を考える．この場合，2回の微分摂動によって導かれる2次の方程式系は

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{U}_1\cdot\nabla)U_1-\frac{V_1^2}{r}&=-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial P_2}{\partial r}\\(\boldsymbol{U}_1\cdot\nabla)V_1+\frac{U_1V_1}{r}&=0\\(\boldsymbol{U}_1\cdot\nabla)W_1&=-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial P_2}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

となる．ここに，$(\boldsymbol{U}_1\cdot\nabla)=U_1\partial/\partial r+W_1\partial/\partial z$ である．とくに，$U_1=W_1=0$ なる場合には，

$$\frac{V_1^2}{r}=\frac{1}{2\rho}\frac{\partial P_2}{\partial r},\qquad\frac{\partial P_2}{\partial z}=0\quad\cdots\cdots(39)$$

となり，この時点で $V_1$ は $z$ によらない任意の関数と考えることができる．さらに1階の微分摂動によって得られる方程式系で，$V_0=0$ すなわち0次の流速の $\theta$ 方向成分がないものとすれば，

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+U_0\frac{\partial V_1}{\partial r}+\frac{U_0}{r}V_1-\nu\left(\frac{\partial^2V_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r}-\frac{V_1}{r^2}\right)=0\quad\cdots\cdots(40)$$

以上により，軸対称流の場合には，1つの厳密解 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0(r,t)$ $(V_0=0)$ に対して式(40)を解けば，新たな厳密解 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_0+\varepsilon\boldsymbol{U}_1$ が得られることになる．一方，圧力項 $P_2$ は式(39)から決定される．とくに $\boldsymbol{U}_0=0$ とすると同軸円筒間の Couette 流を含む解が得られる．

### 3.3 2次元の Lagrange 方程式の厳密解

流体粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}=(X,Y)$ と書けば，Lagrange 流の記法による2次元の運動方程式および連続式は次のように記述される．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{tt}\cdot\boldsymbol{R}_a&=-P_a/\rho\\\boldsymbol{R}_{tt}\cdot\boldsymbol{R}_b&=-P_b/\rho\\\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_a\\\boldsymbol{R}_b\end{pmatrix}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{R}_a\\\boldsymbol{R}_b\end{vmatrix}=J\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(41)$$

ここに，$t$ は時間，$(a,b)$ は水粒子を識別する Lagrange 変数の組であり，$J$ は時間によらない関数である．$P$ は圧力であるが，静水圧に相当する部分は除去されている．式(41)の第1および第2式より圧力 $P$ を消去し，$t$ で1回積分すると，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{at}\cdot\boldsymbol{R}_b-\boldsymbol{R}_{bt}\cdot\boldsymbol{R}_a&=C\\\begin{vmatrix}\boldsymbol{R}_a\\\boldsymbol{R}_b\end{vmatrix}&=J\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(42)$$

を得る．$C$ もまた時間によらない関数である．

前項におけると同様に，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0+\varepsilon\boldsymbol{R}_1$ と仮定して厳密解を求める．このとき式(42)の1階および2階の微分摂動は次のように行なわれる．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{1at}\cdot\boldsymbol{R}_{0b}-\boldsymbol{R}_{1bt}\cdot\boldsymbol{R}_{0a}&=C_1\\\begin{vmatrix}\boldsymbol{R}_{1a}\\\boldsymbol{R}_{0b}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{R}_{0a}\\\boldsymbol{R}_{1b}\end{vmatrix}&=J_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(43)$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{1at}\cdot\boldsymbol{R}_{1b}-\boldsymbol{R}_{1bt}\cdot\boldsymbol{R}_{1a}&=\frac{C_2}{2}\\\begin{vmatrix}\boldsymbol{R}_{1a}\\\boldsymbol{R}_{1b}\end{vmatrix}&=\frac{J_2}{2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(44)$$

最も簡単な例として，0次の厳密解を静止状態 $\boldsymbol{R}_0=(a,b)$ で与えることにすると，式(43)は成分について

$$\left.\begin{aligned}Y_{1at}-X_{1bt}&=C_1\\Y_{1b}+X_{1a}&=J_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(45)$$

となる．簡単のため，$C_1=0$, $J_1=0$ とし，さらに第1式を $t$ で積分した際の積分定数も0とすると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}X_{1b}-Y_{1a}&=0\\X_{1a}+Y_{1b}&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(46)$$

上記の仮説のうち $C_1=0$ は，式(44)を考慮すれば必然であることが示される．

式(46)を用いて，式(44)から $Y_1$ を消去すると

$$\left.\begin{aligned}X_{1at}X_{1b}-X_{1bt}X_{1a}&=\frac{C_2}{2}\\X_{1a}^2+X_{1b}^2&=-\frac{J_2}{2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(47)$$

となる．上式は過決定系であるが，$X_{1a}$, $X_{1b}$ が独立とみなして解くと $t$ に関する関数形が次のように定まる．

$$\left.\begin{aligned}X_{1a}&=Q\cos\omega t+R\sin\omega t\\X_{1b}&=R\cos\omega t-Q\sin\omega t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(48)$$

ここで，$\omega$ は任意の定数である．$C_2$, $J_2$ は時間によらない任意の関数であり，したがって $Q$, $R$ もまた時間によらない任意関数であることが示される．

実際には $X_{1a}$, $X_{1b}$ は互いに独立ではなく，適合条件 $X_{1ab}=X_{1ba}$ を満たすので，$Q_b=R_a$, $Q_a=-R_b$ でなければならない．これらの条件の下に式(41)を解くと，$X_1$, $Y_1$ が次のように得られる．

$$\left.\begin{aligned}X_1&=\phi_b\cos\omega t+\phi_a\sin\omega t\\Y_1&=\phi_a\cos\omega t-\phi_b\sin\omega t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(49)$$

ここに，$\phi(a,b)$ は $\Delta\phi=0$ を満たす任意の関数である．結局，上式の $X_1$, $Y_1$ を用いて $X=a+\varepsilon X_1$, $Y=b+\varepsilon Y_1$ のように解が得られたことになる．

次に，2次元の深海波を考えると上記の解がトロコイド波に相当することを示す．

この場合，自由表面の力学的な境界条件および底面条件は

$$\left.\begin{aligned}&b=0\ \text{で}\qquad P=\rho gY\\&b\to-\infty\ \text{で}\qquad Y_t=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(50)$$

である．ただし，$X$ は波の進行方向，$Y$ は静水面から鉛直上向きにとるものとし，ここでの圧力 $P$ が静水圧を除去した形で定義されていることに注意する．

境界条件(50)の1階および2階の微分摂動により

$$\left.\begin{aligned}&b=0\ \text{で}\qquad P_1=\rho gY_1,\qquad P_2=0\\&b\to-\infty\ \text{で}\qquad Y_{1t}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(51)$$

が得られる．$P_1$ および $P_2$ は式(41)を微分摂動することによって $\boldsymbol{R}_1$ で表現され，$\phi$ に対する条件として

$$\begin{aligned}&b=0\ \text{で}\qquad \omega^2\phi_b-g\phi_{aa}=0,\qquad \omega^2\phi_a+g\phi_{ab}=0\\&b\to-\infty\ \text{で}\qquad \phi_a=\phi_b=0\quad\cdots\cdots(52)\end{aligned}$$

が得られる.

上式の条件のもとで $\Delta\phi=0$ を解くと $\phi$ が定まり, 最終的に $X$ および $Y$ はトロコイド波

$$X=a-\varepsilon e^{\theta b}\{\alpha\sin(\theta a-\omega t)-\beta\cos(\theta a-\omega t)\}$$
$$Y=b+\varepsilon e^{\theta b}\{\alpha\cos(\theta a-\omega t)+\beta\sin(\theta a-\omega t)\} \quad \cdots\cdots(53)$$

となる. ここで, $\theta=\omega^2/g$, $\alpha$ および $\beta$ は定数である.

## 参考文献

1) 京藤敏達: 微分摂動解析, ながれ, 3 巻, pp. 357～363, 1984.
2) Bluman, G. W. and J. D. Cole: The general similarity solution of the heat equation, J. Math. Mech., Vol. 18, pp. 1025～1042, 1969.
3) 椎貝博美・京藤敏達: 微分摂動法による厳密解――流体力学への応用例――, ながれ, 1 巻, pp. 373～381, 1982.
4) Lamb, H.: On Sommerfeld's diffraction problem; and on reflection by a parabolic mirror, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, Vol. 4, pp. 190～203, 1906.
5) Kambe, T.: A class of exact solutions of two-dimensional viscos flow, J. Phy. Soc. Jap. Vol. 52, pp. 834～841, 1983.
6) Taylor, G. I.: On the decay of vortices in a viscous fluid, Phil. Mag., Vol. 46, pp. 671～674, 1923.