

空気混相流による流れの場の数値解析について

堀 口 孝 男*・小 坂 俊 吉**

1. 気液二相流の表現

水力学の分野で取扱われる気液二相流は、主として管路内の現象を対象にしており、水平管路、傾斜管路、鉛直管路など、それぞれについて実験的な研究が進められている。この場合二相流の表現は、気体、液体の容積速度を用いるのが一般的な方法で、管路内の気体容積流量、液体容積流量を管路の断面積でそれぞれ割った値 w_{g0} , w_{l0} をもって容積速度としている。これらを用いて、

$$\left. \begin{aligned} \text{二相流の速度} \quad w_m &= w_{g0} + w_{l0} \\ \text{気体容積流量比} \quad \beta &= \frac{w_{g0}}{w_{g0} + w_{l0}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

が parameter として使われている。また気体、液体の単位容積重量を γ_g , γ_l とするとき、二相流の単位容積重量 γ は、

$$\gamma = f_g \cdot \gamma_g + (1 - f_g) \cdot \gamma_l = \gamma_l - f_g(\gamma_l - \gamma_g) \dots\dots\dots (2)$$

と表わされる。ここで f_g はボイド率とよばれる係数で、二相流の容積に占める気体容積の割合を示す。ボイド率を用いると、気体の速度 w_g , 液体の速度 w_l は

$$w_{g0} = f_g \cdot w_g, \quad w_{l0} = (1 - f_g) \cdot w_l$$

の関係となり、両者の速度比を $w_g/w_l = M$ とおくと

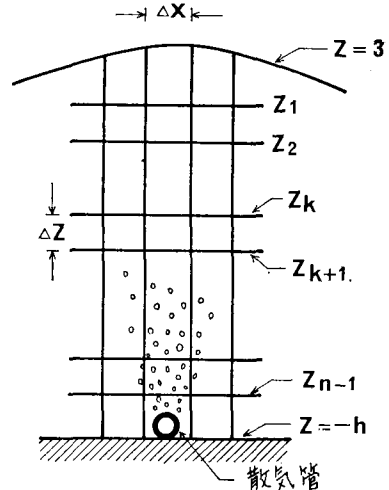
$$f_g = \frac{w_{g0}}{w_{g0} + w_{l0} \cdot M} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)M} \dots\dots\dots (3)$$

と表わすことができる。さらにもう一つの parameter として、乾き度が用いられ、次のように定義されている。

$$x = \frac{w_{g0} \cdot \gamma_g}{w_{g0} \gamma_g + w_{l0} \gamma_l} \dots\dots\dots (4)$$

貧酸素水塊の改善あるいは成層破壊を目的として、海底の散気管から空気を放出し、空気混相流の流れを形成させようとする場合には、上述のような管路という拘束条件がないために、別途の方法によって各種の parameter を表わすことが必要となつてこよう。一つの方法として、実験水路での空気混相流の流況を数値解析から近似させる場合、散気管の直径は数十 mm となっており、

図—1 に示すような格子網では、散気管の左右数メートルまでは、一辺の長さが 10 cm 程度の正方形格子で底面から水面まで数値計算を実施する必要が生じてくるので、かかる格子 1 個の容積のなかに含まれる気体容積の割合でボイド率を定義すると、式 (1)～(4) と類似した表現が可能となろう。



図—1 数値計算の格子網

2. 混相流の数値解析法

空気混相流によって流れが形成される現象を、空気の混入によって液体の密度が見かけ上減少しはじめ、空気がまだ混入していない周囲の液体との間に圧力差が生ずるため、流れが発生してくるものと解釈して操作するのがこの数値解析の基本となっているものである。式 (3) に対応するボイド率を格子の容積に対するその格子内の空気容積の割合として、これを S と表わすとき、式 (2) を g で割った混相流の密度は、液体の密度を ρ_w , 気体の密度を ρ_a とすれば、

$$\rho = \rho_w(1 - S) + \rho_a S \doteq \rho_w(1 - S) \dots\dots\dots (5)$$

と表わされる。

複雑さを避けるために、図—1 に示すように x 軸を静水面にとり、鉛直上方に z 軸をとる 2 次元の現象として

* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 東京都立大学助手 工学部土木工学科

取扱うとき、鉛直方向に 10~20 層に分割したいいわゆるレベル・モデルを用いると、 S を一種の拡散量とみなして、散気管の存在する最下層の格子では次のような拡散式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{z_{n-1}} S dz = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{z_{n-1}} (uS) dz - [wS]_{z_{n-1}} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{z_{n-1}} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) dz + \left[K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{z_{n-1}} \\ & - [w_a S]_{z_{n-1}} + S_a \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで u, w は混相流の流速で、 w_a は気泡群の鉛直速度である。一般に w_a は単一気泡の上昇速度よりやや小さくなるのが普通である。 S_a は散気管から放出される単位時間あたりの散気量 Q_a を格子容積 $\Delta x \cdot \Delta z$ で割った値である。

$z = z_k \sim z_{k+1}$ の任意の層では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_k}^{z_{k+1}} S dz = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (uS) dz - [wS]_{z_k} \\ & + [wS]_{z_{k+1}} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) dz + \left[K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{z_k} \\ & - \left[K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{z_{k+1}} - [w_a S]_{z_k} + [w_a S]_{z_{k+1}} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

表面の層では、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1}^{\zeta} S dz = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{\zeta} (uS) dz + [wS]_{z_1} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{\zeta} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) dz - \left[K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right]_{z_1} - [w_a S]_{\zeta} \\ & + [w_a S]_{z_1} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。ここで右辺の $-[w_a S]_{\zeta}$ は水面から消失する空気量を示す。ただし、気体は圧力、温度によって容積が変化するので、状態方程式

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_{\text{atm}} V_{\text{atm}}}{T_{\text{atm}}}$$

を用い、 S の計算では表面における $S = S_0$ の値で計算を行ない、これを状態方程式で換算して S を求めるようにする。ここで atm の記号は表面の状態を表わす。

次に x 方向の運動量方程式から誘導し、任意の層で積分した表現を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\rho u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\rho u^2) dz + [\rho u w]_{z_k} \\ - [\rho u w]_{z_{k+1}} = & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} p dz \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\mu_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \left[\mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z_k} \\ & - \left[\mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z_{k+1}} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

が得られる。

z 方向の混相流の流速は、今まで連続方程式の積分形

$$[\rho w]_{z_k} = [\rho w]_{z_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho dz$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\rho u) dz \dots\dots\dots (10)$$

を用いていたが、今回は直接的に運動量方程式を取扱う方法を採用した。すなわち、任意の $z = z_k$ におけるレベル面で考えれば、 $x = x_i \sim x_{i+1}$ の区間で積分形をつくり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho w) dx + [\rho u w]_{x_{i+1}} - [\rho u w]_{x_i} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho w^2) dx = & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho g dx \\ - \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p dx + \left[\mu_x \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x_{i+1}} - \left[\mu_x \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x_i} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\mu_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

底面 $z = -h$ において

$$w = 0 \dots\dots\dots (12)$$

水面 $z = \zeta$ において

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [u]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。式 (13) に用いられる ζ は、連続式を表面に適用してその格子内の密度を $\bar{\rho}$ とするとき、

$$\bar{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = [\rho w]_{z_1} - (\zeta - z_1) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{\zeta} (\rho u) dz \dots\dots\dots (14)$$

から得られる。

ここで注意すべきことは、式 (9), (11) など求められる u, w は混相流の連続式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を必ずしも満たすことにはならない。そこで式 (15) を満たすように u, w, p の修正をはかる必要があり、それを逐次近似法の手段によって修正する。その方法を説明すると次のようになる。

まず圧力は静水圧分布を仮定し、時間ステップを n 、 x 方向のステップを i 、 z 方向のそれを k とし、これらの中間を $1/2$ で表示すると、

$$\begin{aligned} p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} = & (\zeta_{i+1/2}^{n+1/2} - z_1) \rho_{i+1/2, 1/2}^{n+1/2} g \\ & + \sum_{k=2}^k (z_{k-1} - z_k) \rho_{i+1/2, k-1/2}^{n+1/2} g \\ & + (z_k - z_{k+1/2}) \rho_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} g \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

とおかれる。次に式 (9) の左辺第 1 項と右辺第 1 項を差分化し、他の項は残余の項として R_i と表わせば、

$$\begin{aligned} (\rho^{n+1/2} \cdot u^{n+1})_{i, k+1/2} = & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \\ & - p_{i-1/2, k+1/2}^{n+1/2} \} + R_i \\ (\rho^{n+1/2} \cdot u^{n+1})_{i+1, k+1/2} = & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ p_{i+3/2, k+1/2}^{n+1/2} \\ & - p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \} + R_{i+1} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

次に式 (11) の左辺第 1 項と右辺第 2 項とを差分化し、

残余の項を R_k とすれば,

$$\begin{aligned} (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k} &= -\frac{Dt}{\Delta z} \{ p_{i+1/2, k-1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \} + R_k \\ (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k+1} &= -\frac{Dt}{\Delta z} \{ p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad - p_{i+1/2, k+3/2}^{n+1/2} \} + R_{k+1} \\ &\dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ところで式 (15) の左辺第2項, 第3項は次のように表わされる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} \{ (\rho^{n+1/2} u^{n+1})_{i+1, k+1/2} \\ &\quad - (\rho^{n+1/2} u^{n+1})_{i, k+1/2} \} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= \frac{1}{\Delta z} \{ (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k} \\ &\quad - (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k+1} \} \\ &\dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

したがって, 式 (19) に式 (17), (18) を代入し, 残余の項を全て R と表わせれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 2\Delta t \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right\} p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad + R \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

となる. 式 (20) で $p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2}$ に正の誤差が含まれるときは, R の影響を小さいものとすると直接的に左辺は正の増分となって表われる. これより, 両者の符号が逆となるように, $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$ の変分に負の符号をつけければ, 圧力に生ずる誤差は修正される方向に動く. 残余の項の影響を含めて修正係数を α とし, 式 (16) からの圧力に対する修正値を $\delta p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \delta p_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= -\frac{1}{\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right)} \frac{\alpha}{2\Delta t} \\ &\quad \times \left[\frac{\rho_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \rho_{i+1/2, k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \{ (\rho^{n+1/2} u^{n+1})_{i+1, k+1/2} - (\rho^{n+1/2} u^{n+1})_{i, k+1/2} \} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta z} \{ (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k} \\ &\quad \left. - (\rho^{n+1/2} w^{n+1})_{i+1/2, k+1} \} \right] \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

と示される. α は一般に 1.5~1.9 程度で, 逐次近似の方法は次のような操作となる.

- (i) 式 (16) で示される圧力を用い, 式 (9), (11) などの計算を行ない, u, w の値を算定する.
- (ii) 次にいま求められた u, w を用いて式 (21) へ代入し, 圧力の修正値 δp を算出する.
- (iii) この修正値を式 (16) の圧力に適用して新たに p を求め, この圧力によって再び式 (9), (11) などから u, w を求める.

(iv) これを再び式 (21) へ代入して δp を算出し, さきの圧力 p を修正する.

(v) このような操作を繰返えて, $|\delta p| \leq 10^{-3}$ C.G.S. 単位になるまで逐次計算を行なう.

上記の方法は水域全体の各格子で同時に行なうもので, およそ 30~50 回の iteration で収束する結果が得られる. かくして確認された $u_{i, k+1/2}^{n+1/2}, w_{i+1/2, k}^{n+1/2}$ の値を用い, 式 (6), (7), (8) へ代入して $S_{i+1/2, k+1/2}^{n+3/2}$ の値を求め, 式 (5) より $\rho_{i+1/2, k+1/2}^{n+3/2}$ を算定する. この密度分布から式 (16) の仮想的圧力を導き, 上述の計算法でタイム・ステップを一つ進めた $u_{i, k+1/2}^{n+2}, w_{i+1/2, k}^{n+2}$ の流速を求めるようにするものである.

式 (6), (7), (8) に含まれる拡散係数は気泡の拡がりに対応するもので, 実験室での再現には $10^1 \sim 10^2$ C.G.S. 単位のオーダー, 現地では $10^2 \sim 10^3$ C.G.S. 単位の値が用いられよう. ここで問題となるのは式 (9), (11) などに含まれる渦粘性係数 μ_x, μ_z の値である. 水力学の研究成果をみると, 鉛直管路での上昇二相流の摩擦損失は図-2 のように示されている.

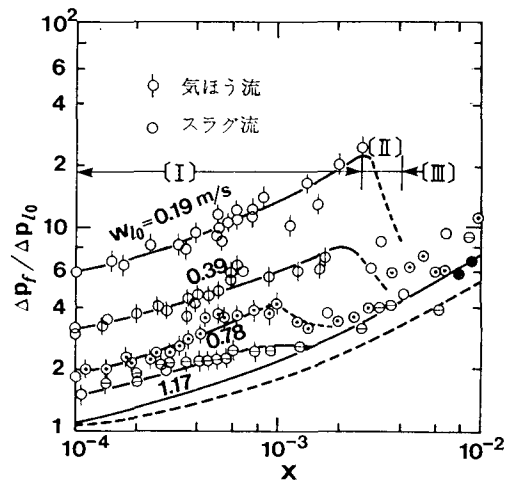


図-2 摩擦損失と流動様式

図-2 の横軸は式 (4) の乾き度を示し, 縦軸は単相流のみの損失水頭に対する二相流の損失水頭の比を表わしている. 二相流の上昇流速が小さいときは 10 倍程度, 大きいときでも数倍のエネルギー損失をもたらす結果を示している. したがって本論が対象とする空気混相流の場合でも, 散気管近傍から上部の混相領域では, 液体のみの単相流域に比して数倍のエネルギー損失となるようにはかる必要がある.

3. シミュレーションの検討

Kobus は幅 1m, 長さ 10m, 水深 2m の水域で, 空気量を $V_0 = 30, 62, 100$ cm³/cm-sec としたときの実

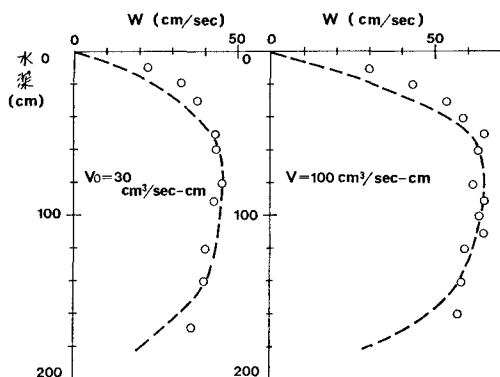


図-3 鉛直流速の比較

験結果を示している。その結果から、散気管直上部の各レベル面で得られる混相流の鉛直上昇速度の計算値とKobusの実測値を比較してみると図-3のようになる。

計算はKobusの実験水域と全く同様にとり、水深は10層に分割し、散気管の周辺では一边が20cmの正方形格子となし、散気管より十分に離れたところで長方形のvariable meshにつなげている。計算の安定のために $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ としている。 $V_0 = 30 \text{ cm}^3/\text{cm-sec}$ のとき、C.G.S.単位で $K_x = 50 \sim 100$ 、 $K_z = 50$ の値をとり、 μ_x 、 μ_z は散気管の上部近傍において、底面から、150, 1000, 1900と増大させ、水面近くなって1900から1000, 500, 50, 0と減少させるようにした。それ以外の領域では150~180程度である。 $V_0 = 100 \text{ cm}^3/\text{cm-sec}$ のときは、 $K_x = 200$ 、 $K_z = 100$ としており、 μ_x 、 μ_z は前者と同様な値を用いている。

図-4は $V_0 = 30 \text{ cm}^3/\text{cm-sec}$ のときの流れのパターンを表わしており、 Δt の2000~3000ステップ程度でかかる結果が得られる。図でみるように、表面からほぼ1/4水深の附近で、水平流速は方向が逆転することがわ

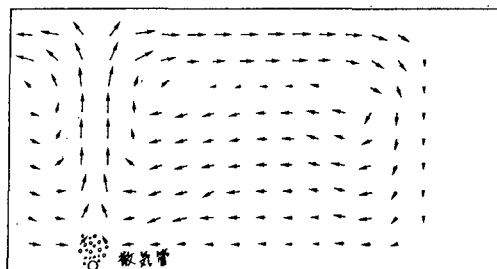


図-4 混相流による流れ

かる。図-4は対称となる流況の片側を示したものである。

図-5は現地での混相流の流況を試算的に再現したものである。水深を20mとして20層に等分割し、横方向には100mの空間をもたせ、これにダブル・エアカーテンを発生させるため、散気管を10mの間隔で2本設置したものである。この水域にはあらかじめ流れを与えておき、表層から第14層まで -10 cm/sec 、それより順次下層に対して $-9, -8, -7, -6, -5, -4 \text{ cm/sec}$ の流速を全体に分布させておく。2本の散気量はともに $30 \text{ cm}^3/\text{cm-sec}$ とし、散気管近傍上部の μ_x 、 μ_z はC.G.S.単位で底面から50, 100, 150, 180, 700, 1900と増大させ、表面近くなってから1900より減じて700, 180, 150, 100, 50, 0としており、他の領域では50~180の範囲の値を与えている。 K_x は50~100、 K_z は50としており、 $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ で計算している。

図からみるように、混相流の流れは全体的に左側へ寄せられており、右側の散気管から生ずる下降流の一つが、左側の散気管の上昇流の一つを圧迫し、このため、左側へ寄せられた一つの旋回流を形成していることが判明する。

現地での渦粘性係数は、流れに対応してオーダーとし

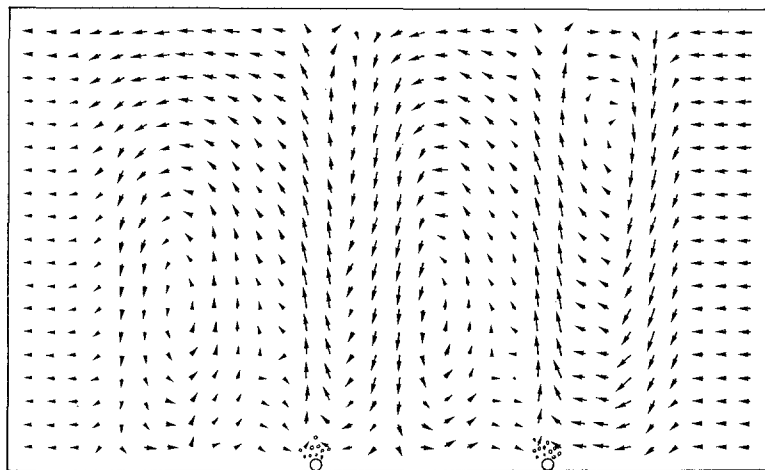


図-5 ダブル・エアカーテンによる流れの計算結果

て値を判断することはできるが、やはり試行錯誤を繰返えして近似することが、現段階では必要となろう。なお、このような計算の範囲では、ボイド率 S は散気管の直上で $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 、それより離れると $10^{-3} \sim 10^{-4}$ のオーダーとなり、後者の領域では、近似的に単相流とみなすこともできよう。

参 考 文 献

- 1) 赤川浩爾: 気液二相流, 機械工学大系, 11, コロナ社, 1982.
 - 2) Kobus, H. E.: Analysis of the flow induced by air-bubble systems, Coastal Eng. Con., pp. 1016~1031, London, 1968.
 - 3) 堀口孝男: 空気混相流による水質改善の現地実験とその解析, 第29回海岸工学論文集, 土木学会, 1982.
-