

円柱に作用する第2次近似回折波波力

喜 岡 渉*・石 田 昭**

1. 緒 言

通常設計外力として考慮されるような波形勾配の大きい入射波に対して回折波波力を計算する場合、波の非線型性の影響を適確に評価しておく必要がある。こうした問題については大口徑円柱に対して従来より検討されており、Chakrabarti¹⁾、山口・土屋²⁾および Raman および Venkatanarasiah³⁾ により非線型回折理論に基づく波力表示式が提示されている。しかしながら、いずれの理論解も自由表面における非線型境界条件の取り扱いに問題が残されており^{4),5)}、全波力に対する2次の散乱波の影響について十分な検討がなされているといえる。

本研究は、第2次近似の回折波波力を自由表面についての積分方程式に帰着して自由表面境界条件を2次のオーダーまで満足する波力表示式を導き、全波力に及ぼす波の非線型性の影響について調べるものである。また、理論解の特性を検討することにより、任意形状の3次元構造物に拡張適用するための基礎資料を得ようとするものである。ここで用いた解析方法は、構造物が動揺することによって生じる流体力である radiation force と固定された構造物への作用波力の一種の相反関係式である Haskind の関係式をまねて、仮想な radiation ポテンシャルを導入することにより自由表面境界条件の処理を行なうもので、Lighthill⁶⁾、Molin⁷⁾ および著者の一人⁸⁾によってすでに検討されているものと同様な方法である。

2. 非線型回折波波力

(1) 自由表面積分方程式

非粘性、非回転の流体運動を仮定し、図-1 に示すように座標軸をとる。いま、従来の Stokes 型のせつ動法にしたがい、水平方向の全波力 F について微小なパラメーター $\varepsilon=kH/2$ (k : 波数, H : 入射波高) の2次項を求めれば次式となる。

$$F_2=\varepsilon^2\left\{\iint_{S_B}-\frac{\rho}{2}(V\phi_1)^2n_xdS+\oint_W\frac{\rho}{2g}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)^2n_xdW\right.$$

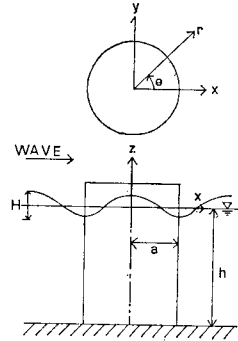


図-1 座 標 系

$$+\iint_{S_B}-\rho\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right)n_xdS\right)\dots\dots\dots(1)$$

ここに、 S_B は物体浸水表面、 W は水線について積分を表わし、 n_x は物体内向き法線ベクトル $\vec{n}$ の x 成分を示す。また、入射波、散乱波ポテンシャルをそれぞれ ϕ^I, ϕ^S とすれば $\phi=\phi^I+\phi^S$ で、 $\varepsilon\phi^I+\varepsilon^2\phi^S$ は Stokes 波理論の第2次近似解で与えられる。式(1)の第1項、第2項は線型理論より容易に求めることができるので、ここでは2次の速度ポテンシャル ϕ_2 による波力を示す第3項 F_{2q} についてのみ着目することにする。角周波数を ω として $\phi_2=R_0(\phi_2e^{-2i\omega t})$ と表わせば、

$$F_{2q}=F_{2q}^I+F_{2q}^S=R_0\left\{2i\rho\omega e^{-2i\omega t}\iint_{S_B}\phi_2^IdS\right. \\ \left.+R_0\left\{2i\rho\omega e^{-2i\omega t}\iint_{S_B}\phi_2^SdS\right\}\dots\dots\dots(2)\right.$$

2 次速度ポテンシャル ϕ_2 はラプラスの方程式を満足し、境界条件として水底条件、radiation 条件の他に物体表面および自由表面上でそれぞれ式(3)、(4)を満たす。

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=0 \quad (\text{on } S)\dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z}-4\nu\phi_2=\gamma^{(1)} \quad (z=0)\dots\dots\dots(4)$$

ただし、

$$\nu=\omega^2/g$$

$$\gamma^{(1)}=-i(\omega/2g)\phi_1\partial/\partial z\{\partial\phi_1/\partial z-(\omega^2/g)\phi_1\} \\ +i(\omega/g)(V\phi_1)^2$$

2 次の散乱波ポテンシャル ϕ_2^S については

$$\frac{\partial\phi_2^S}{\partial n}=-\partial\phi_2^I/\partial n \quad (\text{on } S)\dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial\phi_2^S}{\partial z}-4\nu\phi_2^S=\gamma^{(2)} \quad (z=0)\dots\dots\dots(6)$$

* 正会員 Ph.D. 名古屋工業大学講師 工学部土木工学科

** 正会員 工 博 名古屋工業大学教授 工学部土木工学科

ただし,

$$\gamma^{(2)} = -\partial\phi_2^I/\partial z + (4\omega^2/g)\phi_2^I + \gamma^{(1)} \quad (7)$$

なお, 自由表面境界条件の非線形項に含まれる定常項は波力に対して3次のオーダーの寄与になるので $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ からは省略してある.

次に, 物体表面および自由表面でそれぞれ式 (7), (8) を満たす倍周波数の radiation ポテンシャル $\tilde{\phi} = R_e(\tilde{\phi}e^{-2i\omega t})$ を仮定する.

$$\partial\tilde{\phi}/\partial n = n_x \quad (\text{on } S) \quad (7)$$

$$\partial\tilde{\phi}/\partial z - 4\nu\tilde{\phi} = 0 \quad (z=0) \quad (8)$$

ここで境界条件式 (3), (4), (7) と (8) からグリーン公式を適用することにより, 式 (2) は次の自由表面 S_F についての積分方程式に変形することができる.

$$F_{2q} = R_e \left\{ 2i\rho\omega e^{-2i\omega t} \iint_{S_F} \gamma^{(1)} \tilde{\phi} dS \right\} \quad (9)$$

または境界条件式 (5), (6), (7) および (8) を用いることにより, 式 (2) の第2項 F_{2q}^S は物体表面 S_B と自由表面境界 S_F 上での積分項の和として次式で表わすことができる.

$$F_{2q}^S = R_e \left\{ -2i\rho\omega e^{-2i\omega t} \iint_{S_B} \frac{\partial\phi_2^I}{\partial n} \tilde{\phi} dS + 2i\rho\omega e^{-2i\omega t} \iint_{S_F} \gamma^{(2)} \tilde{\phi} dS \right\} \quad (10)$$

特に相対水深 kh が十分大きく $\nu=k$ が成り立つとき, 式 (9) は境界条件式 (8) を用いることにより Lighthill⁶⁾ が提示した次式に一致する.

$$F_{2q} = R_e \left\{ \rho e^{-2i\omega t} \iint_{S_F} (V\phi_1)^2 \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z} \right\} dS \quad (11)$$

なお, 式 (10) から一旦2次の散乱波ポテンシャル ϕ_2^S による波力 F_{2q}^S を求め2次の入射波ポテンシャル ϕ_2^I による波力 F_{2q}^I を加えたものと, 式 (9) から直接2次の回折波ポテンシャルによる波力 F_{2q} を求めたものは同値である. 境界条件式 (7) を振動モードに対応させて変えることにより, 式 (9)~(11) は各モードに対応する波力またはモーメントを求める式としてそのまま成り立つ. ただし, 式 (9)~(11) は積分型として与えられるため各点の圧力分布や物体周辺の回折波波高を求めることはできない.

(2) 波力係数の表示式

式 (9) または (10) を用いて 図-1 に示すような一様水深 h に置かれた直立円柱に作用する2次のオーダーの回折波波力の表示式を求めることができる. 式中, 入射波の速度ポテンシャルは Stokes 波理論の2次解として与えられ, 1次の回折波ポテンシャルは MacCamy および Fuchs により求められている. 倍周波数の仮想な radiation ポテンシャル $\tilde{\phi}$ は1次の散乱波ポテンシャルの場合と同様に変数分離を仮定することにより求めることができ, 境界条件式 (7) より次式で与えられる.

$$\tilde{\phi} = g(r, z) \cos \theta \quad (12)$$

ここで,

$$g(r, z) = \frac{2 \sinh k_2 h \cosh k_2(z+h)}{k_2(\sinh k_2 h \cosh k_2 h + k_2 h)} \cdot \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{H_1^{(1)'}(k_2 a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_n h \cos k_n(z+k)}{k_n(\sin k_n h \cos k_n h + k_n h)} \cdot \frac{K_1(k_n r)}{K_1'(k_n a)} \quad (13)$$

ただし, k_2 は式 (14) を満たし k_n は式 (15) の正の実根として与えられる.

$$4\nu = k_2 \tanh k_2 h \quad (14)$$

$$4\nu = -k_n \tanh k_n h \quad (15)$$

以上から三角関数の直交性に着目することにより, 自由表面積分方程式 (9) は次式のように表示することができる.

$$\frac{F_{2q}}{\rho g a (H/2)^2} = R_e \left\{ e^{-2i\omega t} \int_a^{\infty} f^{(1)}(r) \cdot g(r, 0) dr \right\} \quad (16)$$

ここに,

$$f^{(1)}(r) = 2\pi \left\{ \frac{(\nu^2 - k^2)}{2} \left(a_0 a_1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_m a_{m+1} \right) + k^2 \left(b_0 b_1 + \sum_{m=0}^{\infty} b_m b_{m+1} \right) + \frac{1}{r^2} \times \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot (m+1) a_m a_{m+1} + \nu^2 \left(a_0 a_1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_m a_{m+1} \right) \right\}$$

$$a_m = \beta_m \left\{ J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \right\}$$

$$b_m = \beta_m \left\{ J'_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)'}(kr) \right\}$$

$$m=0: \beta_m=1, \quad m \geq 1: \beta_m=2im$$

式 (10) は同様にして次式で表わされる.

$$\frac{F_{2q}^S}{\rho g a (H/2)^2} = R_e \left\{ -3\pi i k \nu \cdot e^{-2i\omega t} \frac{J_2(2ka)}{\sinh^4 kh} \times \left(\frac{2A \sinh k_2 h}{k_2(\sinh k_2 h \cosh k_2 h + k_2 h)} \times \frac{H_1^{(1)}(k_2 a)}{H_1^{(1)'}(k_2 a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B \sin k_n h}{k_n(\sin k_n h \cos k_n h + k_n h)} \times \frac{K_1(k_n a)}{K_1'(k_n a)} + \int_a^{\infty} e^{-2i\omega t} f^{(2)}(r) \cdot g(r, 0) dr \right) \right\} \quad (17)$$

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sinh(2k-k_2)h}{2k-k_2} + \frac{\sinh(2k+k_2)h}{2k+k_2} \right\}$$

$$B = \frac{2k \sinh 2kh \cos k_n h + k_n \cosh 2kh \sin k_n h}{4k^2 + k_n^2}$$

$$f^{(2)}(r) = -3\pi i (\nu k \sinh 2kh - 2\nu^2 \cosh 2kh)$$

$$\times \frac{J_1(2kr)}{\sinh^4 kh} + f^{(1)}(r)$$

式(16)と(17)には $r=a$ から無限大までの積分項を含んでいるが、遠方で $f^{(1)}$ および $f^{(2)}$ は $r^{-1/2}e^{ik_2r}$, $r^{-1/2}e^{ik_2r}$ で、 ϕ は $r^{-1/2}e^{ik_2r}$ でほぼ減衰するため有限な積分として計算することができる。

3. 計算結果と考察

(1) 波力係数

式(16)と(17)を用いて2次までの回折波力 $F=F_1+F_2$ を入射波の波数 ka および水深比 h/a を変化させて計算した。両式の積分は数値的に行ない、 $m=10$ とした。1次の波力は MacCamy および Fuchs により次式で与えられている。

$$\frac{F_1}{\rho g a^2 (H/2)} = R_0 \left\{ \frac{4e^{-i\omega t}}{ka H_1^{(1)'}(ka)} \frac{\tanh kh}{ka} \right\} \dots (18)$$

図-2 は F_2 の計算結果を示したもので $\rho g (H/2)^2 h$ で割って無次元表示してある。図から ka が増加するにしたがい非線型性の影響が大きくなり、極大値をとったのちしだいに減少する様子がわかる。 F_1, F_2 ともに極大値をとるときの ka の値は h/a が減少するほど増加するが、 F_1 のピーク値に対する ka よりも F_2 に対する ka が常に大きくなっている。図-3 は $h/a=5.0$ 、図-4 は

$h/a=1.16$ の場合についてそれぞれ従来の解析結果⁵⁾と比較したものである。図-3 から、すべての理論曲線は異なり $ka=0.222$ のケースを除けば本計算結果は全体として他の理論値よりも大きくなっている。図-4 の(a) ケースにおいてもすべての理論曲線は異なっており、特に $ka=0.5$ 付近での差異は大きい。入射波高の小さい(b)のケースでは、 $ka=0.5$ 付近を除けば三つの理論曲線の差異は小さく Chakrabarti と Tam⁹⁾ による実験結果とも良く一致している。 ka が小さいケースの実験データがないため各理論曲線の適用性の検討はできないが、Chakrabarti⁵⁾ らにより指摘されているような ka の減少に伴い波力係数が増加する不合理性は本計算結果では見られなかった。

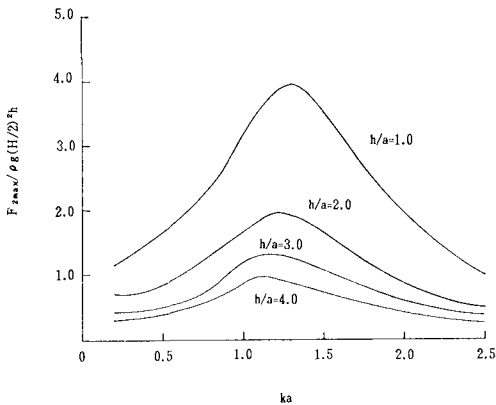


図-2 2次の波力特性

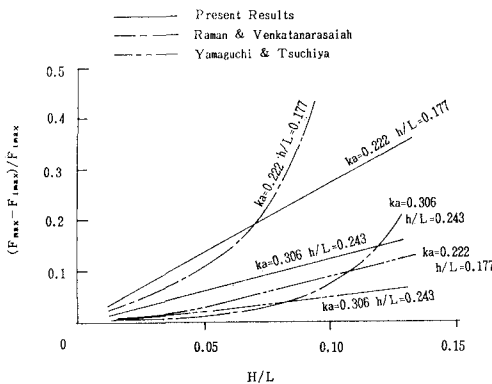
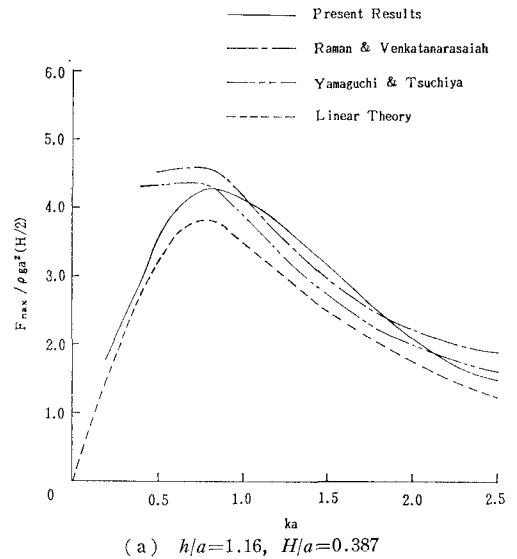
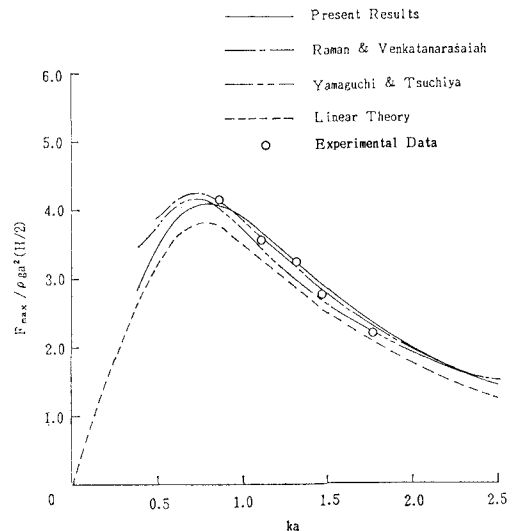


図-3 2次項の割合の変化



(a) $h/a=1.16, H/a=0.387$



(b) $h/a=1.16, H/a=0.232$

図-4 波力係数

(2) 任意形状三次元構造物への適用

積分方程式 (9) と (10) は一般の三次元問題で表示されているため、任意形状の三次元構造物に対しても適用が可能である。式中の関数はすべて線型解として求められるので通常の解析手法を用いればよいことになる。ここでは自由表面境界上での積分範囲、すなわち計算領域について検討を加える。図-5 は式 (16) と (17) の被積分関数の特性を示したものである。(a) は $ka=1.2$ で $h/a=4.0$ の場合の計算結果で、両者のグラフ上での差異はない。両関数ともほぼ r^{-1} に比例して減衰しながら零付近で振動していることがわかる。 r/a がある程度以上の振動項は平均すればほぼ零とみなせるので、平均操作を行なうことにより積分範囲を小さくとることができる。一方、 $ka=0.6$, $h/a=1.0$ のケース (b) については両者の関数の変化の様子は異なり、式 (16) の積分については r/a を十分大きくとらないと平均操作を行なうことはできない。こうした被積分関数の特性の違いは h/a が小さいほどまた ka が小さいほど大きい。積分範囲の上限を $2\pi/(ka)$ とした場合、両式の計算結果の差が 2% 程度になるのは $h/a=1$ で $ka>2.0$, $h/a=2$ で $ka>1.2$, $h/a=3$ で $ka>0.8$, $h/a=4$ で $ka>0.6$ であった。したがって、 h/a および ka が小さいケースについては式 (10) による算定方法が、計算処理は若干煩

雑になるものの、計算領域の問題から有効であると考えられる。

以上の結果を考慮して、グリーン関数法により ϕ_1^s および $\bar{\phi}$ を求めて円柱に作用する 2 次の回折波力を計算した。要素面は四辺形要素とし各要素面の中心点を節点にとり要素内の source 強度は一定とする Garrison¹⁰⁾ の方法を用いた。線型理論の波力計算と異なり自由表面における ϕ_1^s と $\bar{\phi}$ を求めなければならず、 (ξ, η, ζ) を物体表面上での source 点として自由表面各点でのグリーン関数 $G(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta)$ とその微分値 $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$ および $\partial G/\partial z$ をあらかじめ計算しておく必要がある。計算には図-6 に示すように領域を分割した。円柱の軸対称性から ϕ_1^s の計算には全領域の半分、 $\bar{\phi}$ の計算には 4 分の 1 のみを分割すればよい。 $h/a=1.0$ と $h/a=3.0$ の場合の数ケースの ka について計算した結果を図-7 に示す。図中□印、■印はそれぞれ式 (9), (10) による結果を示してある。計算においては円柱表面上の要素数を常に 20 個とし、自由表面の分割は $r=2\pi/ka$ までと

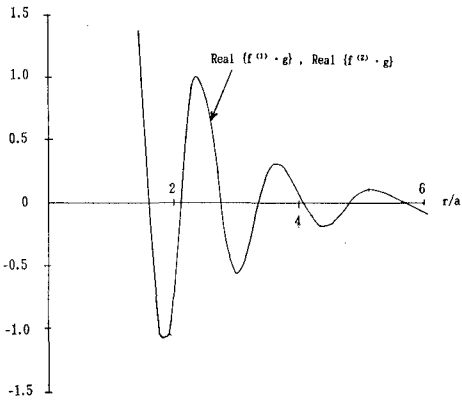
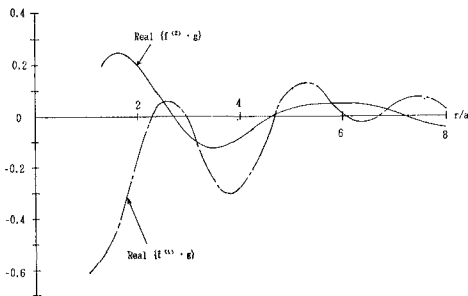
(a) $ka=1.2$, $h/a=4.0$ (b) $ka=0.6$, $h/a=1.0$

図-5 自由表面積分

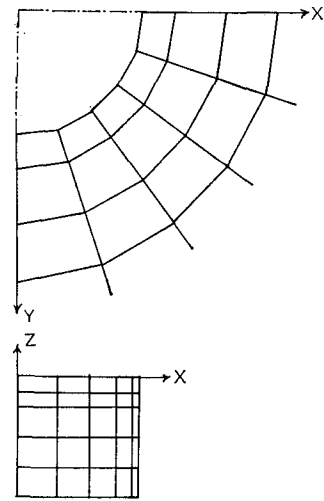


図-6 計算領域の分割

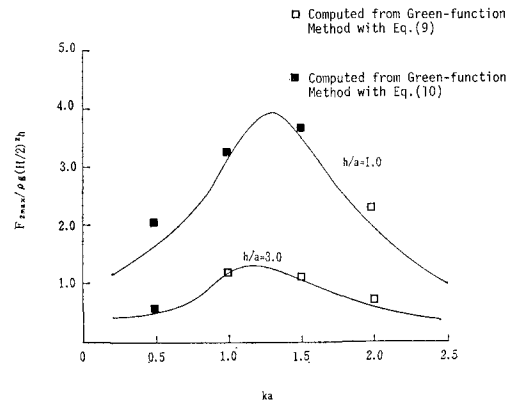


図-7 グリーン関数法による 2 次の波力係数

りすべての要素が $1/(k_0 a)$ より大きくならないようにした。実線で示した図-2の計算結果と比べて、グリーン関数法による計算結果はすべて若干大きな値を与えているものの両者は良く一致している。

4. 結 語

倍周波数の radiation ポテンシャルを導入することにより円柱に対して2次までの非線型性を考慮した波力式を提示した。解析結果を従来の理論値と比較したところ、相対水深の小さいケースについての差異は著しく、本計算結果に比べて従来の理論値は過大であった。ここで用いた解析方法を任意形状の三次元構造物に適用する場合、相対水深が小さいときは式(10)を用いた方が計算効率が良いと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Chakrabarti, S. K.: Nonlinear wave forces on vertical cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. HY11, pp. 1895~1909, 1972.
- 2) 山口正隆・土屋義人: 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響, 土木学会論文報告集, 第22号, pp. 41~53, 1974.
- 3) Raman, H. and P. Venkatanarasaiah: Forces due to nonlinear waves on vertical cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 102, No. WW3, pp. 301~306, 1976.
- 4) Issacson, M. St. Q.: Nonlinear wave force on large offshore structures, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. WW1, pp. 166~170, 1977.
- 5) Chakrabarti, S. K.: Comments on second-order wave effects on large-diameter vertical cylinder, Jour. of Ship Res., Vol. 22, No. 4, pp. 266~268, 1978.
- 6) Lighthill, J.: Waves and hydrodynamic loading, Proc. of Conf. on the Behaviour of Off-Shore Structures, Vol. 1, pp. 1~40, 1979.
- 7) Molin, B.: Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies, Appl. Ocean Res., Vol. 1, No. 4, pp. 197~202, 1979.
- 8) 喜岡 渉・角南安紀: 大断面二次元構造物に作用する波力特性, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 472~476, 1982.
- 9) Chakrabarti, S. K. and W. A. Tam: Interaction of waves with large vertical cylinder, Jour. of Ship Res., Vol. 19, No. 1, pp. 23~33, 1975.
- 10) Garrison, C. J.: Hydrodynamic loading of large offshore structures-Three-dimensional source distribution methods, Numerical Methods in Offshore Engineering, A Wiley-Interscience Publication, pp. 87~141, 1978.