

有限要素法による波力解析

阪 東 浩 造*・ 相 河 清 実**・ 利 穂 吉 彦***

1. はじめに

大型海洋構造物を建設する場合には、この構造物に作用する波力や乱された波の場を正確に評価することによって、海洋構造物の波浪外力に対する安全性や構造物周辺の環境変化等の検討を行なうことができる。この問題に対する解析法としては、非粘性を仮定し、更に支配方程式を線形化する、いわゆる線形回折波理論に基づいたものが多いようである。この中で、構造物表面形状が数学的に簡単に表現できる、円柱・軸対称構造物・柱状構造物等の場合には、一般ポテンシャル解やグリーン関数を用いて、各構造物にのみ適用可能な解析方法が開発されている^{1)~3)}。一方、任意の形状を持つ海洋構造物に適用できる汎用的な方法としては、解析領域内の積分方程式を離散化して数値的に解く有限要素法や、境界上での積分方程式を導き離散化して解析する境界積分法、両手法を結合した方法、両手法に固有関数を展開して接続する方法等がある^{4)~5)}。

この問題の特徴は、流体は等方等質で運動は微小と仮定できることと、無限領域で記述されていることである。この特徴の為、汎用的な方法のなかでは、グリーン関数を用いる境界積分法が多く採用されている。これに対し、複雑な構造系の応力解析に普遍的に用いられる有限要素法は、無限領域処理の困難さや三次元解析としてのデータ量の多さ等の理由から、あまり用いられないようである。また、有限要素法を用いて解析する場合にも、仮想境界を設定し、境界積分法や固有関数で展開された解析解を接続する等の工夫が行なわれている。

ところで、有限要素法については、現在まで多くの構造解析を行なった実績から、そのノウハウも蓄積されており、グリーン関数を評価する為の面倒な計算もなく、プログラム化も簡単である。従って、有限要素法の、この問題における欠点を克服すれば、波力解析に対する一つの有力な道具となると考えられる。

このような観点から、本論文では、有限要素法による

解析法を紹介し、簡単な形状の構造物による散乱問題に適用して、その精度の確認や他の波力評価式と比較する。先に述べた有限要素法の欠点を克服する為に、本解析では、要素内で散乱波ポテンシャルが構造物からの水平距離の平方根に比例して減衰するような無限要素を用いたほか、Berkhoffの近似理論を導入し、構造物が柱状で水深変化が緩やかな場合には二次元問題としても取扱うことを可能にした。これらの工夫により、解の精度の向上、データ作成の簡略化、計算時間の短縮等が期待できる。

2. 解 析

(1) 基礎方程式

解析領域を図-1のように分割し、内部領域 Ω_A では未知数として全体の速度ポテンシャル ϕ を、外部領域 Ω_B では散乱波ポテンシャル ϕ_s を未知数と考える。ここに、

$$\phi = \phi_i + \phi_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

である。ただし ϕ_i は既知の入射波ポテンシャルとする。

この時、基礎方程式は以下ようになる。

$$\Delta\phi^* = 0 \quad \text{in } \Omega_A + \Omega_B \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_s + \Gamma_B \quad \dots\dots\dots (3)$$

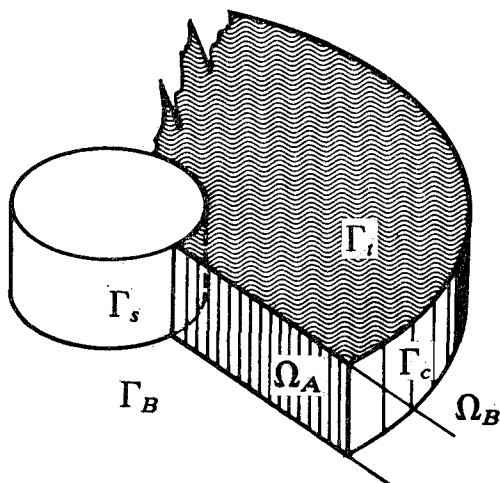


図-1 解析領域

* 工修 鹿島建設電算センター

** 正会員 鹿島建設土木設計本部

*** 正会員 工修 鹿島建設技術研究所

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \dots\dots\dots(4)$$

$$\phi = \phi_i + \phi_s \quad \text{on } \Gamma_o \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial n} - \frac{\partial \phi_s}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_o \dots\dots\dots(6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} - ik\phi_s \right) = 0 \dots\dots\dots(7)$$

ここで ϕ^* は、 Ω_A 内では ϕ を Ω_B 内では ϕ_s を示すものとする。また、 σ は波の角周波数、 k は波数である。

(2) 二次元問題への変換

構造物の水平断面形状が深さ方向に変化せず、海底面の変動が緩やかな場合には、Berkhoff の近似理論⁹⁾を用いて、三次元問題を平面二次元問題に変換することが可能である。この理論によれば、速度ポテンシャルは、主に深さ方向に変動する関数と主に水平方向に分布する関数に分解される。静水面上での速度ポテンシャルを、 $\varphi(x, y)$ とすれば、 φ は次式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{C_g}{C} \sigma^2 \varphi = 0 \dots\dots(8)$$

二次元問題では、(2)~(7) 式の代りに (3), (5)~(7), (8) 式を解くことになり、有限要素法による計算効率は大いに改善される。

(3) 三次元問題の簡略化

Berkhoff 近似の仮定が成立しない場合には、原則として三次元解析となるが、構造物から十分離れた領域での散乱波ポテンシャルの挙動を検討することによって若干の簡略化が可能となる。このような領域では(水深は一定とする)、散乱波の一般解やグリーン関数から容易に推察されるように、散乱波ポテンシャルは水深方向に $\cosh$ 関数で分布する。この性質を利用して、構造物から十分離れた地点に仮想境界を設け、その境界の外側では二次元解析を行なうことにする。この境界上では、次式の条件が付加される。

$$\phi(x, y, z) = \varphi(x, y) \cosh k(h+z) \dots\dots\dots(9)$$

このように、構造物周辺の挙動は複雑で三次元解析が必要であっても、構造物からある程度離れた領域から外側は二次元解析が可能であり、有限要素法の欠点は一部改善されることになる。

(4) 逆数減衰型写像無限要素^{7),8)}

無限領域を処理する種々の方法の中で、取扱いが比較的簡単で精度も良い逆数減衰型写像無限要素を紹介する。無限要素は、1970 年代に Ungless や Bettess によって導入され、その後開発改善が進み、無限領域問題を解析する有効な手法となっている。この要素は大きさが無限である有限要素の一種で、要素内では、未知数が近似された散乱波ポテンシャル解に従って変動するように内挿関数が決定される。ここで紹介する無限要素では、未知数は、構造物からの水平距離 r の平方根に比例して

減衰すると仮定されている。

この無限要素では、まず、図-2 のように無限要素を正規化要素に写像する。写像関数は、次式で与えられる。

$$x = \frac{-2\xi}{1-\xi} x_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} x_2 \dots\dots\dots(10)$$

更に、 x_0 を減衰の原点として、 x_1 を x_2 と x_0 の中点にとれば、(10) 式は次のようになる。

$$\xi = 1 - \frac{A}{r} \dots\dots\dots(11)$$

$$A = 2(x_1 - x_0)$$

$$r = x - x_0$$

ここで、内挿関数として、普通の有限要素と同じ内挿関数 $M(\xi, \eta)$ を用いれば、要素内で未知数は、 $1/r$ に比例して変動する。そこで、未知数が $1/\sqrt{r}$ に従って変動するように修正すると同時に、波動成分を含めれば、この無限要素の内挿関数は最終的に (12) 式で与えられる。

$$N(\xi, \eta) = C \cdot M(\xi, \eta) \left(\frac{A}{1-\xi} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{ikA}{1-\xi} \right)$$

$$C = \left(\frac{2}{A} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{ikA}{2} \right) \dots\dots\dots(12)$$

なお、要素上での積分は、特別な数値積分法を用いて実行される。

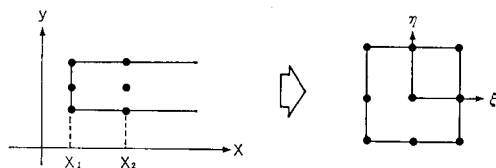


図-2 無限要素から正規化要素への写像

3. 数値算例

(1) 要素分割の検討及び精度確認

厳密解の存在する円柱による散乱波問題に、本解析法を適用し、要素分割と計算精度の関係を調査した。最初に二次元問題として計算し、要素の半径方向の長さ及び円周方向の長さ、計算された水平波力の誤差の関係を求めた。続いて三次元解析を行ない、要素の水深方向の長さ、水平波力における誤差の関係を検討した。図-3 には、二次元解析の場合の要素分割の一つの例を示した。図-4 は、計算された水平波力の厳密値に対する相対誤差を、要素の半径方向の長さに対してプロットしたものである。なおこの計算では、有限要素と無限要素の接続境界は常に、円柱表面から一波長離れた地点としている。他の方向の要素の大きさと計算誤差の関係にも同様の傾向が見られた。妥当な要素分割は、要求される精度に当然依存するが、この検討結果より、円柱に類似した構造物に対しては、入射波長の 1/5 程度の大きさの有限要素を用いれば数 % の誤差に抑えられることが明らかになった。

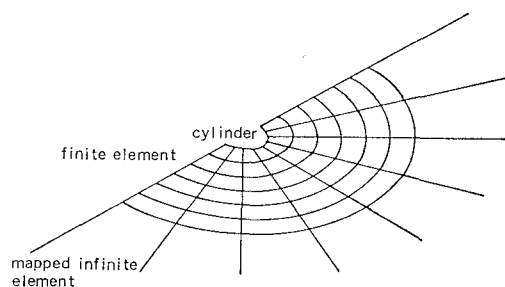


図-3 要素分割図

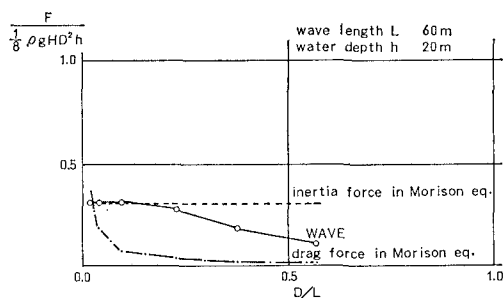


図-5 円柱に作用する波力

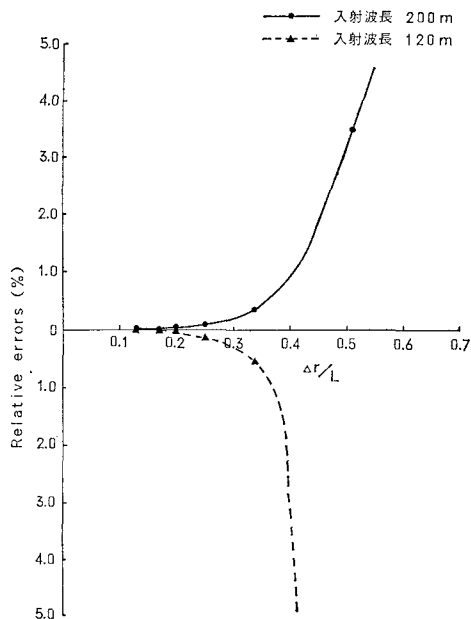


図-4 要素の水平方向の大きさと水平波力に対する誤差の関係

(2) 他の波力評価手法との比較

a) モリソン式との比較

規模の小さい構造物に作用する波力は、簡便なモリソン式によって計算されることが多い。そこで、円柱に作用する波力を、本解析法とモリソン式によって計算し、両手法の適用限界を確認した。入射波の条件を一定にし、円柱の径を変化させた時の水平波力結果を図-5に示した。なお、モリソン式による波力は、慣性力項と抗力項に分けて図示している。よく知られているように、構造物径 D と入射波長 L の比 D/L が 0.2 以下となれば、本解析の結果とモリソン式の慣性力項は良く一致している。また、この領域では、抗力項も大きい値を持つことも明らかである。一方、 D/L が 0.3 以上になると、円柱による波の散乱の影響が大きくなり、両者の波力には大きな差が生じている。同時に、モリソン式の抗力項は無視し得るほど減少している。こ

のように、モリソン式と線形回折波理論に基づく本解析の適用範囲の境界は、 D/L が 0.2~0.3 程度であることが再確認された。

b) 合田式との比較¹⁰⁾

防波堤に作用する波力を評価する為に提案された合田式との比較を行なった。合田式は、非線形性の強い大きな波までを含む実験結果や非線形重複波理論に基づいて導かれた方法で、線形理論に基づく本解析法とは基本的には一致しない。しかしながら、有限長の島堤に作用する波力を考える場合、防波堤の長さの影響を無視した合田式と線形性を仮定した本解析法の結果を比較することも興味深いと考えられる。両手法の比較は、防波堤の長さをパラメータに行なわれた。図-6 は、今回の計算で考えた一番長い防波堤によって乱された波高分布図である。防波堤前面には、入射波高のほぼ倍の波高を持つ重複波が、また防波堤に沿っても部分重複波が観察される。防波堤に沿う重複波は、蛇行災害の原因として知られている。一方、図-7 は両手法による波力の計算結果を図示したものである。図中、一点鎖線は合田式で仮定した波圧分布を自由水面まで積分して得られる。いわゆる合田式により与えられる波力であり、二点鎖線は静水面まで積分した値である。線形理論に基づく本解析法では、圧力を静水面まで積分して波力を計算するので、参考の為に、二点鎖線の波力も同時に図示した。この計算の入力波は、水深 20m に対し波高 10m と非線形性の強い波となっている為、本解析法による波力は合田式

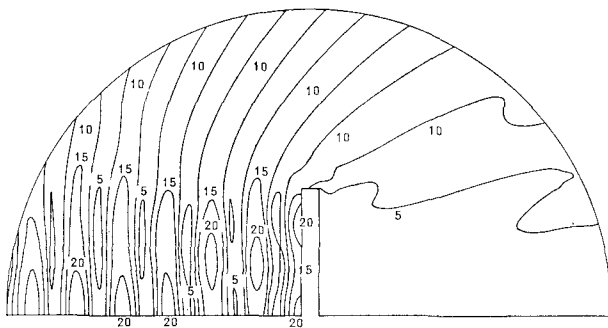


図-6 防波堤周辺の波高分布

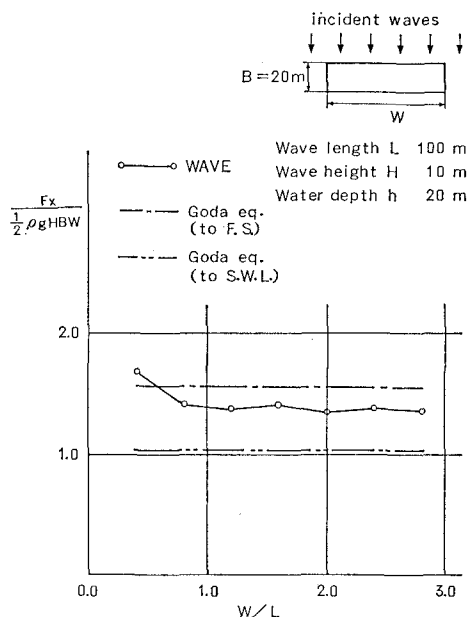


図-7 防波堤に作用する波力

に比して小さな値となっているが、合田式による波圧を静水面まで積分した値より大きくなっている。両手法の仮定の違いを考慮すれば、その仮定の範囲内で良好な解を与えているものと考えられる。更に、本解析法に於て、最大波力が生じた時の防波堤面での水位変動を図-8に示した。先に述べたように、防波堤前面に沿う波高変動が観察されると同時に、背面側では水位の静水面からの変動がほとんどないことがわかる。この事実は、合田式の仮定の一部の妥当性を裏付けるものである。このように、防波堤に作用する全波力のみを問題とする場合には、合田式は簡便で有効な公式であることが再確認された。

(3) 断面形状と波力について

一定水深領域に存在する種々の柱状構造物を考え、断面形状が波力に与える影響について検討した。断面形状としては、円・六角形・正方形・三角形を採用し、断面積は全て一定とした。また、波は各断面形の一边に直角に入射した。表-1に、各柱状構造物に作用する波力を示した。入射波に直角方向の構造物の投影長が長いほど、大きな波力が発生している。これは、波圧を積分する距離が長いほか、入射波を受ける面積が広く、構造物前面に強い重複波を発生させる傾向があるためである。

(4) 実験との比較

図-9に示したように、シェル壁に囲まれ前後に張り出し部を持つ構造物に対して、直角に波が入射した時の波高分布を実験により測定し、本解

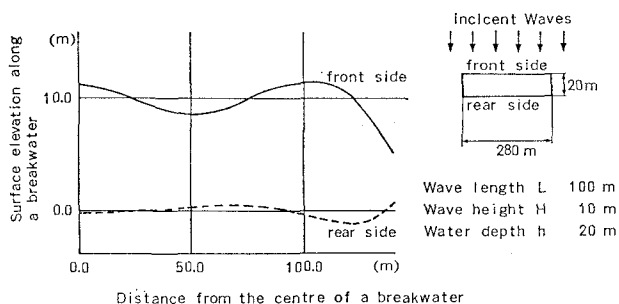


図-8 最大波力発生時の防波堤前面の水位変動

表-1 種々の断面形状を持つ柱状構造物に作用する波力及び転倒モーメント

断 面 形 状	円 柱	六角柱	四角柱	三角柱
断 面 積 (m ²)	7 854	7 854	7 854	7 854
波直角方向投影長 (m)	100	110	89	135
波 力 (10 ⁷ N)	6.7	6.8	6.6	10.6
転倒モーメント (10 ⁸ N・m)	6.9	7.1	6.8	10.9

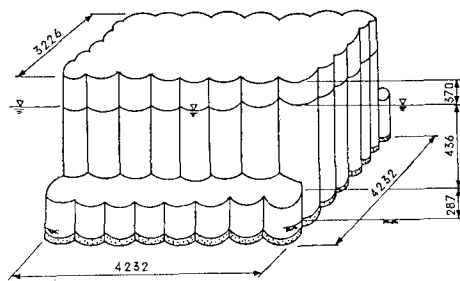


図-9 水理模型図

析法による計算結果と比較した。計算では、シェル壁を無視し、張り出し部も水深変化として促え、二次元解析を行なった。図-10は、実験と計算の波高分布図である。簡略化した計算モデルにもかかわらず、両者の結果

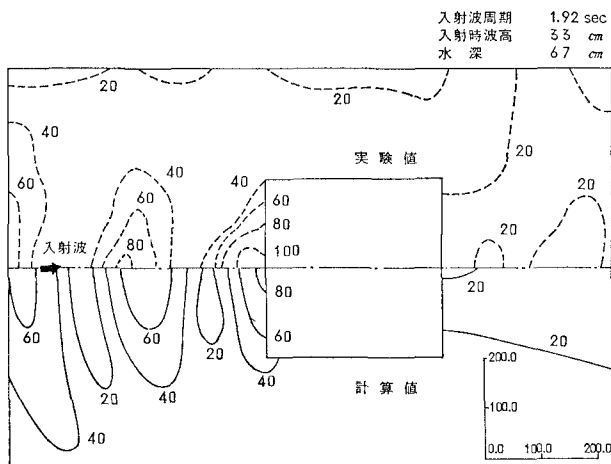


図-10 実験と計算による波高分布の比較

は比較的良好にあって、構造物直前での波高は、実験値の方が大きくなっているが、これは、入射波が砕波限界に近い波であり、実験結果は非線形効果を含んでいるものと考えられる。

4. ま と め

無限領域は逆数減衰型無限要素でモデル化し、水深変化が緩やかな場合には二次元問題として扱うことのできる機能を持つ有限要素法による波力解析法を紹介した。これらの機能は、有限要素法の欠点を補う為に導入されたものであるが、簡単な形状の構造物による波の散乱問題に適用した結果、計算精度上に於ても十分満足すべき結果を与えることが判明した。ここで紹介した有限要素法による解析は、境界積分法等とともに、波力解析に於る強力な道具であると考えられるが、適用する問題の性質に応じて、その解析法は選択すべきであろう。

なお、本研究の一部は、筆者の一人が英国 University College of Swansea 滞在中に行なわれたもので、懇切な御指導を頂いた Dr. Bettess に深く感謝の意を表す。また、本論文の計算は、同大学から導入されたプログラム WAVE を用いて行なわれたことを、付記する。

参 考 文 献

- 1) MacCamy, R. C. and R. A. Fuchs: Wave forces on piles; A diffraction theory, Beach Erosion Board, Tech. Memo No. 69, 1954.
- 2) Fenton, J. D.: Wave forces on vertical bodies of revolution, J.F.M., Vol. 85, part 2, pp. 241~255, 1978.
- 3) Isaacson, M. de St. Q.: Vertical cylinders of arbitrary section in waves, J. Waterway Port, Coastal and Ocean Div., ASCE, Vol. 104, No. WW4, 1978.
- 4) Zienkiewicz, O. C., P. Bettess and D. W. Kelly: The finite element method for determining fluid loadings on rigid structures, Numerical Methods in Offshore Engng., Chap. 3, pp. 141~183.
- 5) Garrison, C. J.: Hydrodynamic loading of large offshore structures, Numerical Methods in Offshore Engng., Chap. 2, pp. 87~140,
- 6) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, 13th Int. Conf. Coastal Engng., 1972.
- 7) Zienkiewicz, O. C., C. Emson and P. Bettess: A novel boundary infinite element, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19, pp. 393~404, 1983.
- 8) 阪東浩造: 無限領域問題の新しい解析手法について, 第4回流れの有限要素法解析シンポジウム, pp. 201~208, 1983.
- 9) Bettess, P., C. Emson and K. Bando: Some useful techniques for testing infinite elements, Appl. Math. Modelling, 6, 1982.
- 10) 合田良実: 防波堤の設計波圧に関する研究, 港湾技研報告, 第12巻 第3号, 1973.