

堤体滑動量から安定限界重量の推定

高 隆 二*

1. ま え が き

自重による基礎マウンドとの外部摩擦に依存する混成堤直立部の滑動抵抗は、接触面の微視的状态に左右され巨視的な理論的決定は困難で、実測・実験から経験的に評価されている。現行では、耐用年限内の期待滑動量を許容範囲にとどめる設計理念は信頼性の面でまだ採用されず、滑動を許さない重量を安定限界と定めている。

滑動実験においては、計測に頼る限り測定精度以上の滑動は必要であり、従来滑動量-自重曲(直)線を外挿して滑動量0に対応する値を安定重量と推定し、他方滑動を起さない過大重量を徐々に軽減した滑動開始重量を前記安定限界と一致させるよう努めて来た。ところで、滑動前・後をそれぞれ支配する静・動摩擦は一般に異なる。ここでは、重複波・砕波・地震波に関し、滑動量曲線に与える動・静摩擦比の影響を解析する。

2. 理 論

(1) 重 複 波

回転・鉛直加速度は水平並進加速度に対し堤体傾斜角程度であり省略する。現実には、多数波群で継続して滑動すれば異常滑動・マウンドからの転落を招くと想定されるので、被災時にあっても最大波ないしそれに次ぐ高々数波で起ると限定する。不規則波を波高・周期異なる正負交互正弦半周期波列(正振幅>負振幅)とし、滑動は波頂到達時前後で岸向に発生すると見なす(図-1)。

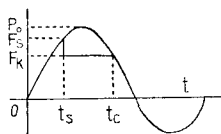


図-1 概念図

堤体の運動方程式

$$m\ddot{x} = P_0 \sin \omega t - kx \quad \dots\dots\dots (1)$$

(m : 見掛質量 (= $m_1 + m_2 + m_3$), $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$: 堤体・付加水・付加捨石の質量, x : 岸向変位, P_0 : 最大波力,

$\omega = 2\pi/T$, T : 周期, k : マウンドの水平バネ定数)で慣性力を無視し

$$F_s = kx_s = \mu_s W = P_0 \sin \omega t_s$$

$$\therefore \sin \omega t_s = \frac{F_s}{P_0} = \frac{W}{W_c} \equiv \alpha \quad \dots\dots\dots (2)$$

で定まる滑動開始時刻 t_s の堤体変位は $x_s = F_s/k$ である (F : 底面抵抗力, μ : 摩擦係数, W : 堤体水中重量, 添字 s : c : 静摩擦・滑動限界と対応). 滑動中の運動は

$$m'\ddot{x} = P_0 \sin \omega t - F_k = P_0 \sin \omega t - \mu_k W \quad \dots\dots\dots (3)$$

を初期条件

$$\left. \begin{aligned} x(t_s) &= x_s = \alpha x_c \\ \dot{x}(t_s) &= v_s = \sqrt{1 - \alpha^2} \omega x_c \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で解き

$$\begin{aligned} x = x_s - \frac{P_0}{m'\omega^2} (\sin \omega t - \sin \omega t_s) + \left(v_s \right. \\ \left. + \frac{P_0}{m'\omega} \cos \omega t_s \right) (t - t_s) - \frac{F_k}{2m'} (t - t_s)^2 \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となる ($m' = m_1 + m_2$). μ_k は相対速度 0 で μ_s へ連続的に漸増するとされる²⁾が、滑動実験の程度では明らかに $\mu_k < \mu_s$ であり一定とする (添字 k : 動摩擦と対応).

滑動停止時刻 t_c は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_c) = v_s - \frac{P_0}{m'\omega} (\cos \omega t_c - \cos \omega t_s) \\ - \frac{F_k}{m'} (t_c - t_s) = 0 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

図-1 を参照すれば, $\sin \omega t_c = \nu \alpha$, $\pi/2 < \omega t_c < \pi$ であるから

$$\omega t_c = \pi - \sin^{-1} \nu \alpha \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる ($\nu = \mu_k/\mu_s$). 堤体滑動中, マウンド変位 y は

$$m_3 \ddot{y} = -k y + F_k \quad \dots\dots\dots (8)$$

を初期条件

$$y(t_s) = x_s, \quad \dot{y}(t_s) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

で解き

$$y = x_k + (x_s - x_k) \cos \sigma_3 (t - t_s) \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられ、後に復元する ($\sigma_3 = \sqrt{k/m_3}$).

ロッキングの付加捨石質量は堤体質量に匹敵するとの見方³⁾もあるが、水平運動に対しては $m_3 \ll m_1$ と省略すると y は直ちに x_k に収束する (振動実験では見掛 k の減少となり, m_3 を独立に評価できない).

ケーソンの滑動量 (残留変位) は $m' \doteq m$ とし

$$s = x_c - x_k = x_s - \frac{P_0}{m\omega^2} (\sin \omega t_c - \sin \omega t_s) \\ + \left(v_s + \frac{P_0}{m\omega} \cos \omega t_s \right) (t_c - t_s) - \frac{F_k}{2m} (t_c - t_s)^2 - x_k \quad \dots\dots\dots(11)$$

あるいは無次元滑動量

$$S = \frac{ks}{P_0} = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \{ \alpha(1 - \nu) + \sqrt{1 - \alpha^2} (\pi - \sin^{-1} \nu \alpha - \sin^{-1} \alpha) \} - \frac{\nu \alpha}{2\lambda^2} (\pi - \sin^{-1} \nu \alpha - \sin^{-1} \alpha)^2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

と与えられる ($\lambda = \omega/\sigma$, $\sigma = \sqrt{k/m}$).

(2) 砕 波

$$m\ddot{x} = P - kx \quad \dots\dots\dots(13)$$

で砕波力 P を 図-2 の三角波形で近似し, $\tau \ll T$ として初期条件

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

の下に Laplace 変換

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \doteq x(t) \quad \dots\dots\dots(15)$$

を行う.

$$G(s) = \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \doteq g(t) \quad \dots\dots\dots(16)$$

を用い⁴⁾,

$$X = \frac{1}{k} \left\{ \frac{P_0}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 - \frac{P_0}{\tau(s^2 + \sigma^2)} (1 - e^{-\tau s})^2 \right\}$$

合成定理

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi \doteq F_1(s) \cdot F_2(s) \quad \dots\dots\dots(17)$$

を利用し原空間に戻すと

$$x = \frac{1}{k} \left\{ g(t) - \frac{1}{\tau} \cos \sigma t * h(t) \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

となる (図-3).

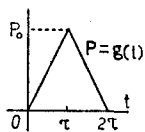


図-2 砕波力

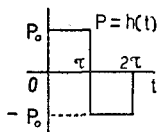


図-3 正負矩形波力

a) $0 < t < \tau$

$g(t) = P_0 t / \tau$, $h(t) = P_0$ を代入し,

$$x = \frac{P_0}{k\sigma\tau} (\sigma t - \sin \sigma t) \quad \dots\dots\dots(19)$$

$\dot{x}(t) > 0$ と単調増加するから $t_0 > \tau$ である.

b) $\tau < t < 2\tau$

$g(t) = P_0(2 - t/\tau)$, $h(t) = -P_0$ を代入

$$x = \frac{P_0}{k\sigma\tau} \{ \sigma(2\tau - t) + 2 \sin \sigma(t - \tau) - \sin \sigma t \} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$\dot{x}(t) > 0$ で同様に $t_0 > 2\tau$.

c) $t > 2\tau$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \dots\dots\dots(21)$$

を初期条件

$$\left. \begin{aligned} x(2\tau) &= \frac{4P_0}{k\sigma\tau} \sin \sigma\tau \sin^2 \frac{\sigma\tau}{2} \\ \dot{x}(2\tau) &= \frac{4P_0}{k\tau} \cos \sigma\tau \sin^2 \frac{\sigma\tau}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

で解き

$$x = \frac{4P_0}{k\sigma\tau} \sin^2 \frac{\sigma\tau}{2} \sin \sigma(t - \tau) \quad \dots\dots\dots(23)$$

最大値は

$$\dot{x}(t_m) = 0, \quad \ddot{x}(t_m) < 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

を満足する時刻

$$t_m = \tau + \frac{\pi}{2\sigma} = \tau + \frac{T_0}{4} \quad \dots\dots\dots(25)$$

に生じ

$$x_m = x(t_m) = \frac{4P_0}{k\sigma\tau} \sin^2 \frac{\sigma\tau}{2} \quad \dots\dots\dots(26)$$

となる (T_0 : 振動固有周期 ($= 2\pi/\sigma$)).

滑動開始時刻 $t_s (< t_m)$ 以後は

$$m\ddot{x} = -F_k \quad \dots\dots\dots(27)$$

を初期条件

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x(t_s) = x_m \sin \sigma(t_s - \tau) = \alpha x_m \\ v_s &= \dot{x}(t_s) = x_m \sigma \cos \sigma(t_s - \tau) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

の下に解いて

$$x = x_s + v_s(t - t_s) - \frac{F_k}{2m}(t - t_s)^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

となり,

$$\dot{x}(t_0) = v_s - \frac{F_k}{m}(t_0 - t_s) = 0$$

を満たす停止時刻

$$t_0 = t_s + mv_s/F_k \quad \dots\dots\dots(30)$$

の位置

$$x_0 = x_s + mv_s^2/2F_k \quad \dots\dots\dots(31)$$

から滑動量

$$s = x_s + mv_s^2/2F_k - x_k \\ = \frac{1 - (1 - 2\nu + 2\nu^2)\alpha^2}{2\nu\alpha} x_m \quad \dots\dots\dots(32)$$

無次元化し

$$S = \frac{ks}{P_0} = \frac{\sin^2(\sigma\tau/2)}{\sigma\tau/2} \frac{1 - (1 - 2\nu + 2\nu^2)\alpha^2}{\nu\alpha} \quad \dots\dots\dots(33)$$

を得る.

(3) 地震波

堤体 (動水圧も考慮した質量 m) の運動

$$m\ddot{x} = -k(x - z) \quad \dots\dots\dots(34)$$

を起す不規則な地盤の水平変位を重複波と同様、正弦半周期 $z=z_0 \sin \omega t \geq 0$ に限定する。相続く地震波の相関は低く、直前波の影響を受ける初期条件は正負のある範囲で変動するので、確率的平均

$$x(0)=\dot{x}(0)=0 \quad (35)$$

として解き

$$x=\frac{\sigma^2 \omega}{\sigma^2-\omega^2} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \right) z_0 \quad (36)$$

を得る。捨石表面の抵抗力

$$F=-k(x-z)=m\ddot{x} \quad (37)$$

が $F < F_s = \mu_s W$ では堤体は滑動せず

$$F_s = F(t_s) = -\frac{m\sigma^2 \omega}{\sigma^2 - \omega^2} (\omega \sin \omega t_s - \sigma \sin \sigma t_s) z_0 \quad (38)$$

に達する時刻 t_s 以後滑動し、運動

$$m\ddot{x} = F_k = \mu_k W \quad (39)$$

に従かう。初期条件

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x(t_s) = \frac{\sigma^2 \omega}{\sigma^2 - \omega^2} \left(\frac{\sin \omega t_s}{\omega} - \frac{\sin \sigma t_s}{\sigma} \right) z_0 \\ v_s &= \dot{x}(t_s) = \frac{\sigma^2 \omega}{\sigma^2 - \omega^2} (\cos \omega t_s - \cos \sigma t_s) z_0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

で解き

$$x = x_s + v_s(t-t_s) + F_k(t-t_s)^2/2m \quad (41)$$

となる。

運動停止条件

$$\dot{x}(t_c) = \dot{z}(t_c) \quad (42)$$

に式(41)を代入

$$\frac{F_k}{m} t_c - \omega z_0 \cos \omega t_c = \frac{F_k}{m} t_s - v_s \quad (43)$$

を満足する時刻 t_c で停止し、滑動量は

$$\begin{aligned} s &= -(z_c - x_c - x_k) \\ &= - \left[z_0 \sin \omega t_c - \left\{ x_s + v_s(t_c - t_s) + \frac{F_k}{2m}(t_c - t_s)^2 \right\} - x_k \right] \quad (44) \end{aligned}$$

$F_m = k z_0$ を用い無次元化し

$$\begin{aligned} S = \frac{k s}{F_m} &= - \left(\sin \omega t_c - \frac{\sigma^2 \omega}{\sigma^2 - \omega^2} \left[\frac{\sin \omega t_s}{\omega} - \frac{\sin \sigma t_s}{\sigma} + (\cos \omega t_s - \cos \sigma t_s)(t_c - t_s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nu \alpha \left\{ \frac{1}{\sigma^2} + \frac{(t_c - t_s)^2}{2} \right\} (\omega \sin \omega t_m - \sigma \sin \sigma t_m) \right] \right) \quad (45) \end{aligned}$$

で与えられ、最大振幅と逆方向に滑動する。 F の最大値

F_m は $\dot{F}(t_m)=0$, つまり

$$\omega^2 \cos \omega t_m - \sigma^2 \cos \sigma t_m = 0 \quad (46)$$

を満たす時刻 t_m で生じ、始動時抵抗力 $F_s = F(t_s)$ は

$$\alpha = \frac{F_s}{F_m} = \frac{\omega^2 \sin \omega t_s - \sigma^2 \sin \sigma t_s}{\omega^2 \sin \omega t_m - \sigma^2 \sin \sigma t_m} \quad (47)$$

と関連する。共振状態 $\lambda \rightarrow 1$ では式(46)から

$$\sigma t_m \tan \sigma t_m = 2 \quad \therefore \sigma t_m = 0.3428\pi \quad (48)$$

式(47)で

$$\sin \sigma t_s + \sigma t_s \cos \sigma t_s = 1.391\alpha \quad (49)$$

から t_s を求め、式(43)により

$$\sigma t_c - \frac{1.438}{\nu \alpha} \cos \sigma t_c = \left(1 - \frac{0.7189}{\nu \alpha} \sin \sigma t_s \right) \sigma t_s \quad (50)$$

で t_c を定め、式(45)は

$$\begin{aligned} S = & - \left[\sin \sigma t_c + \frac{1}{2} \{ \sigma t_s \cos \sigma t_s - \sin \sigma t_s \right. \\ & \left. - \sigma(t_c - t_s) \sigma t_s \sin \sigma t_s \} - 0.3478 \nu \alpha \{ 2 \right. \\ & \left. + \sigma^2(t_c - t_s)^2 \} \right] \quad (51) \end{aligned}$$

と表わされる。

3. 結 果

滑動量 $S(\alpha)$ を表-1にまとめた。重複波に関しては式(12)から $S(0)$ との比 S/S_0 で図-4、砕波は式(33)より $\sigma\tau$ の影響を省き

$$f(\alpha) = S / \left(\frac{2}{\sigma\tau} \sin^2 \frac{\sigma\tau}{2} \right) = \frac{1 - (1 - 2\nu + 2\nu^2)\alpha^2}{\nu\alpha} \quad (52)$$

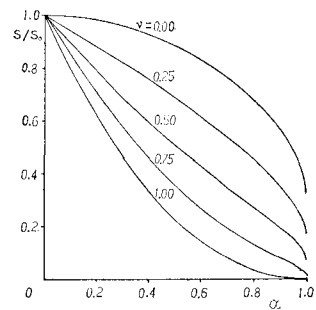


図-4 滑動量(重複波)

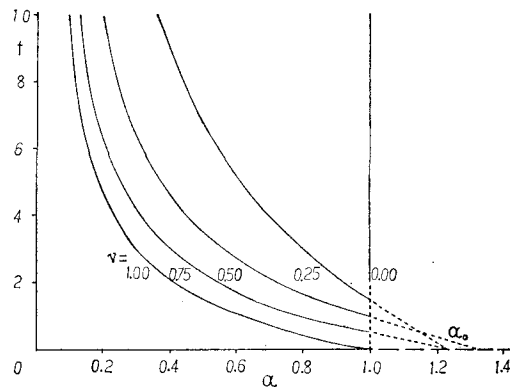
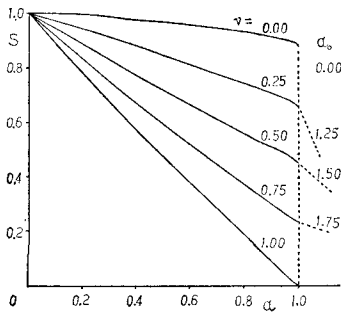
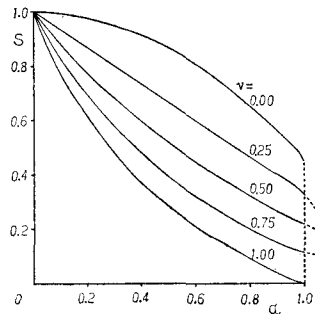
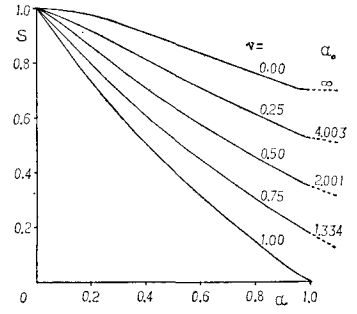


図-5 滑動量(砕波)

表-1 滑 動 量

外力	λ	ν	α										
			0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
重複波 S/S_0	0.10	1.00	1.000	0.795	0.618	0.463	0.338	0.232	0.147	0.082	0.037	0.010	0.000
		0.75	1.000	0.843	0.702	0.575	0.461	0.361	0.272	0.196	0.130	0.075	0.018
		0.50	1.000	0.893	0.790	0.692	0.600	0.511	0.427	0.345	0.267	0.188	0.073
		0.25	1.000	0.943	0.883	0.820	0.754	0.684	0.611	0.533	0.448	0.350	0.170
		0.00	1.000	0.995	0.981	0.957	0.924	0.881	0.827	0.761	0.678	0.567	0.318
	0.05	1.00	1.000	0.794	0.616	0.463	0.335	0.229	0.145	0.080	0.035	0.009	0.000
		0.75	1.000	0.843	0.701	0.573	0.459	0.361	0.272	0.194	0.129	0.074	0.017
		0.50	1.000	0.892	0.790	0.692	0.598	0.510	0.425	0.344	0.265	0.186	0.072
		0.25	1.000	0.943	0.883	0.819	0.753	0.683	0.610	0.532	0.447	0.349	0.170
		0.00	1.000	0.995	0.981	0.957	0.924	0.881	0.827	0.761	0.678	0.567	0.318
砕波 f	—	1.00	∞	9.900	4.800	3.033	2.100	1.500	1.067	0.729	0.450	0.211	0.000
		0.75	∞	13.25	6.500	4.194	3.000	2.250	1.722	1.321	1.000	0.731	0.500
		0.50	∞	19.90	9.800	6.367	4.600	3.500	2.733	2.157	1.700	1.322	1.000
		0.25	∞	39.75	19.50	12.58	9.000	6.750	5.167	3.964	3.000	2.194	1.500
		0.00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2.000
地震波 S	2.0	1.00	1.000	0.864	0.777	0.670	0.567	0.467	0.369	0.274	0.181	0.089	0.000
		0.75	1.000	0.914	0.831	0.749	0.669	0.591	0.514	0.439	0.365	0.303	0.221
		0.50	1.000	0.942	0.885	0.828	0.772	0.715	0.660	0.605	0.550	0.496	0.443
		0.25	1.000	0.970	0.940	0.908	0.875	0.841	0.806	0.772	0.736	0.699	0.664
		0.00	1.000	0.999	0.994	0.988	0.978	0.967	0.954	0.939	0.923	0.904	0.885
	0.5	1.00	1.000	0.776	0.608	0.478	0.374	0.288	0.215	0.152	0.096	0.046	0.000
		0.75	1.000	0.825	0.685	0.580	0.474	0.393	0.322	0.260	0.205	0.156	0.111
		0.50	1.000	0.878	0.771	0.676	0.591	0.515	0.446	0.383	0.325	0.271	0.221
		0.25	1.000	0.934	0.867	0.799	0.732	0.664	0.597	0.530	0.463	0.397	0.332
		0.00	1.000	0.994	0.976	0.947	0.908	0.857	0.796	0.725	0.643	0.550	0.442
	1.0	1.00	1.000	0.861	0.723	0.606	0.499	0.401	0.310	0.226	0.147	0.072	0.000
		0.75	1.000	0.895	0.785	0.690	0.601	0.519	0.441	0.369	0.301	0.236	0.174
		0.50	1.000	0.926	0.847	0.774	0.703	0.636	0.573	0.512	0.454	0.400	0.348
		0.25	1.000	0.961	0.909	0.858	0.806	0.754	0.704	0.655	0.608	0.564	0.522
		0.00	1.000	0.992	0.971	0.941	0.908	0.872	0.835	0.798	0.762	0.728	0.696

(a) 非共振 ($\lambda=2$)(b) 非共振 ($\lambda=0.5$)

(c) 共振

図-6 滑動量 (地震波)

とし 図-5, 地震波では式 (45) で非共振, 式 (51) で共振を 図-6 に表示した (負号省略)。

4. 考 察

重複波・砕波・地震波共に α の増加で S は減少するが, 一般の物質では $\nu < 1$ であり $\alpha \rightarrow 1$ でも必ず滑動する。滑動量曲線は $\alpha=1$ で不連続となり, α の増減幅 10^{-2} と 10^{-1} では様相を異にする。重複波では $\dot{S}(1) = -\infty$ であり S は $S(1)$ まで急減する。砕波では

$$\dot{f}(1) = -2(1-\nu+\nu^2)/\nu \quad (53)$$

から $\alpha=1$ の代りに $\alpha>1$ の範囲に延長した仮想安定限界

$$\alpha_0 = 1 - f(1)/\dot{f}(1) \quad (54)$$

で過大表示されるおそれがある (表-2)。地震波において, 非共振では式 (45) から

$$\dot{S}(1) = -\left(\frac{1}{\nu} - 1\right) \frac{\omega}{\sigma^2 - \omega^2} (\omega \sin \omega t_m - \sigma \sin \sigma t_m) \quad (55)$$

表-2 仮想安定限界 α_0

外 力		λ	ν				
			1.00	0.75	0.50	0.25	0.00
砕 波		—	1.000	1.231	1.333	1.231	1.000
地 震 波	非共振	2.0	1.000	1.750	1.500	1.250	1.000
		0.5	1.000	1.750	1.500	1.250	1.000
	共振	1.0	1.000	1.334	2.001	4.003	∞

共振時は式 (51) で $\dot{S}(1)=0.695\nu$ として α_0 を算出した (表-2)。

5. あとがき

滑動抵抗力は外力 (波・地震) と堤体慣性力の代数和と釣り合い, 砕波・地震波では外力の過半は慣性力による吸収も期待される⁵⁾。滑動実験では, ロッキング・動水圧とそれぞれ関連するマウンドの弾性・透水性も相似に保つべきである⁶⁾。堤体・捨石間の動摩擦と静摩擦の比

は 0.75~0.85 程度であり⁷⁾, 滑動曲線は安定限界で不連続となるから, 安易に外挿された仮想安定重量は過大に評価される。安定限界付近の重量微小変化に伴う精密な滑動量計測と共に, 動・静摩擦や振動実験によるバネ定数・固有周期の測定も大切である。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・藤島 睦・北谷高雄: 防波堤の安定性に関する研究, 港研報告第 5 巻 14 号, 134 p., 1966.
- 2) 曾田範宗: 摩擦の話, 岩波新書, 214 p., 1971.
- 3) 合田良実: 衝撃砕波圧を受ける混成防波堤の挙動に関する考察, 港研報告第 12 巻 3 号, pp. 3~29, 1973.
- 4) 近藤次郎: 演算子法, 240 p., 培風館, 1956.
- 5) 新妻幸雄・高 隆二・多賀富朗・遠藤史朗: ゴムを敷いた混成堤直立部の振動特性, 第 27 回海講論文集, pp. 349~352, 1980.
- 6) 上部達生・野田節男・千葉忠樹・樽垣典弘: 水との連成を考慮した大型混成式防波堤の振動特性と動水圧, 港研報告第 20 巻 4 号, pp. 41~81, 1981.
- 7) 港湾技術研究所: ケーソンラバー取付ケーソンの耐震検討, 1983.