

中空円筒による波の散乱におよぼす空気圧縮性の影響

清 川 哲 志*・大 山 巧**

1. ま え が き

本研究は、近年実用化されつつある空気タービン式波力発電における発電効率の検討および構造物周辺の波高を制御する、いわゆる透過性防波堤への応用を目的とするものである。波力発電装置内の水面変動を解析する代表的な手法として、前田ら¹⁾によって提案された“等価浮体法”があげられる。これは、構造物内の流体運動を浮体の上下動とみなすものであるが、内部水面が一樣に変動するという仮定に基づいていること、内部空気の圧縮性を考慮していないことから問題があると思われる。また小島ら²⁾は、内部水面の変動と空気出力の關係に着目し、空気の質量およびエネルギーの保存則を用いて空気室の応答を求めているが、やはり一樣な水面変動を仮定している点、円筒表面の不透過条件を厳密に満足していない点から考えて、近似的な取り扱いにすぎないものと思われる。これに対し著者らは、前報³⁾で中空円筒構造物による波の散乱に関して、ポテンシャル接続法を用いて厳密な定式化を行い、円筒内外部の水面応答特性を調べ、さらに内部に空気を密閉した場合の内部水面条件を導くとともに若干の考察を加えた。本報は、これに引き続き密閉型中空円筒構造物を対象に、前報で導いた境界条件のもとに解を求め、空気圧縮性が円筒内部の平均水面応答および内外部の波高分布特性におよぼす影響を調べたものである。

2. 内部空気の圧縮性を考慮した波の散乱の理論

(1) 内部の自由表面条件および一般解の誘導

一定水深 h の水域に、図-1 に示すような半径 a 、喫水 $q_1 h$ で、内部に空気を密閉した肉厚の無視できる中空円筒があり、これに x 軸の負の方向から角振動数 ω 、波高 H_0 の波が入射するものとして定式化を行う。ただし P_0, V_0 は静水時の圧力、体積である。流体領域を図に示すように Ω_1, Ω_2 に分け、それぞれの領域における速度ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を次のように定義する。

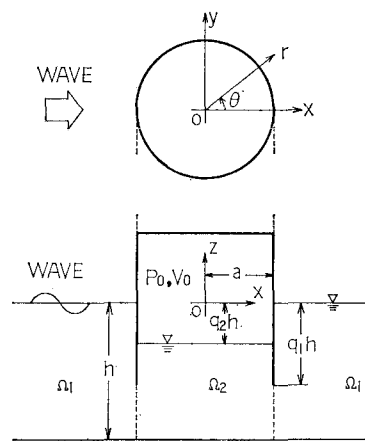


図-1 座 標 系

$$\phi_1(r, \theta, z, t) = (gH_0/2\omega) \{ \phi_0(r, \theta, z) + \phi_1(r, \theta, z) \} e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi_2(r, \theta, z, t) = (gH_0/2\omega) \phi_2(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \dots\dots\dots (2)$$

ここで ϕ_0 は入射波のポテンシャル、 ϕ_1, ϕ_2 は散乱波のポテンシャルを表す。このうち ϕ_0 は、フーリエ余弦展開を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_0^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \varphi_0^{(m)}(r, z) &= \varepsilon_m i^m \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} J_m(k_0 r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 ε_m : ノイマン数 ($m=0$ のとき 1, $m \geq 1$ のとき 2), k_0 : Ω_1 における波数, J_m : m 次ベッセル関数, i : 虚数単位 ($=\sqrt{-1}$) である。

ϕ_1, ϕ_2 に関する基礎方程式、円筒外部の自由表面条件、海底面の不透過条件、無限遠方での放射条件は、通常の線形理論と同様であり、次のように表される。

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (\text{in } \Omega_1, \Omega_2) \dots\dots\dots (4)$$

$$\partial \phi_1 / \partial z - (\omega^2/g) \phi_1 = 0 \quad (z=0) \dots\dots\dots (5)$$

$$\partial \phi_i / \partial z = 0 \quad (i=1, 2) \quad (z=-h) \dots\dots\dots (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial \phi_1 / \partial r - i k_0 \phi_1) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

式 (4)~(7) を満足する ϕ_1 の一般解は、前報で示した空気圧縮性を考慮しない開放型の場合と同様で、次のように表される。

* 正会員 清水建設(株) 大崎研究室

** 正会員 清水建設(株) 技術研究所

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_1^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \varphi_1^{(m)}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_m(k_n r) \\ &\quad - i A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_m^{(1)}(k_0 r) \\ &\quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned} \right\}$$

ただし, $A_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$): 複素未定係数, k_n ($n=1, 2, \dots$): Ω_1 における固有値, $K_m, H_m^{(1)}$: 第2種変形ベッセル関数, 第1種ハンケル関数である. ここで k_0, k_n は, $k_0 \tanh k_0 h = -k_n \tan k_n h = \omega^2/g$ の実正根である.

Ω_2 では, 水面変動に伴う内部空気の体積変化により水面上に付加的な圧力が作用することになる. 本研究では空気の状態変化を等温変化と仮定し, ボイルの法則を適用する. そして, 空気の体積変化が空気室の容積に比べて小さい場合を考え, テイラー展開を利用して線形化することによって導いたのが, 次式で示す密閉空間の空気圧縮性を考慮した自由表面条件である³⁾.

$$\begin{aligned} \partial \phi_2 / \partial z - (\omega^2/g) \phi_2 + c &= 0 \quad (z = -q_2 h) \dots\dots(9) \\ c &= -\frac{P_0}{\rho g V_0} \int_A \frac{\partial \phi_2}{\partial z} dA \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ただし, A は内部領域の水線面を表す.

式(9), (10)の c が空気の圧縮性によって付加される圧力項であるが, これは定数項であるため, この項をキャンセルすべく ϕ_2 を次のように置く.

$$\phi_2(r, \theta, z) = \tilde{\phi}_2(r, \theta, z) + (g/\omega^2)c \dots\dots\dots(11)$$

式(11)を式(4), (6)および式(9)に代入することによって, $\tilde{\phi}_2$ に関する次の基礎方程式, 境界条件を得る.

$$\nabla^2 \tilde{\phi}_2 = 0 \quad (\text{in } \Omega_2) \dots\dots\dots(12)$$

$$\partial \tilde{\phi}_2 / \partial z = 0 \quad (z = -h) \dots\dots\dots(13)$$

$$\partial \tilde{\phi}_2 / \partial z - (\omega^2/g) \tilde{\phi}_2 = 0 \quad (z = -q_2 h) \dots\dots\dots(14)$$

式(12)~(14)を満足する $\tilde{\phi}_2$ の一般解は, 固有関数の重ねあわせによって次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_2(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_2^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \tilde{\varphi}_2^{(m)}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \frac{\cos \nu_n(h+z)}{\cos \nu_n h} I_m(\nu_n r) \\ &\quad - i B_0^{(m)} \frac{\cosh \nu_0(h+z)}{\cosh \nu_0 h} J_m(\nu_0 r) \\ &\quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned} \right\}$$

ただし, $B_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$): 複素未定係数, ν_0, ν_n ($n=1, 2, \dots$): Ω_2 における波数および固有値 ($\nu_0 \tanh \nu_0(1-q_2)h = -\nu_n \tan \nu_n(1-q_2)h = \omega^2/g$ の実正根), I_m : 第1種変形ベッセル関数である. さらに式(11)より $\partial \phi_2 / \partial z = \partial \tilde{\phi}_2 / \partial z$ であるから, 式(10)の c は, 式(15)に示される $\tilde{\phi}_2$ の一般解を用いて表すことができる. したがって, 式(15)を式(10)に代入し積分を実行した後, これを式(11)に代入, 整理することによ

て, ϕ_2 に関する以下のような一般解が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_2^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \varphi_2^{(m)}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \left\{ \frac{\cos \nu_n(h+z)}{\cos \nu_n h} I_m(\nu_n r) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{m0} \frac{2P_0 S}{\rho g V_0} \frac{\cos \nu_n(1-q_2)h}{\cos \nu_n h} \frac{I_1(\nu_n a)}{\nu_n a} \right\} \\ &\quad - i B_0^{(m)} \left\{ \frac{\cosh \nu_0(h+z)}{\cosh \nu_0 h} J_m(\nu_0 r) \right. \\ &\quad \left. + \delta_{m0} \frac{2P_0 S}{\rho g V_0} \frac{\cosh \nu_0(1-q_2)h}{\cosh \nu_0 h} \frac{J_1(\nu_0 a)}{\nu_0 a} \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned} \right\}$$

ただし, S : 水線面の面積 ($=\pi a^2$), δ_{m0} : クロネッカー記号 ($m=0$ のとき 1, $m \neq 0$ のとき 0) である.

(2) ポテンシャル接続法による定式化

式(8), (16)に示される一般解は, 式(4)~(7), 式(9)を満足するが, さらに ϕ_1, ϕ_2 は $r=a$ において, エネルギーと運動量の連続条件, および円筒表面での不透過条件を満たす必要がある. これらの境界条件は $\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \varphi_0^{(m)}$ を用いて次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} (\varphi_1^{(m)} + \varphi_0^{(m)})|_{r=a} &= \varphi_2^{(m)}|_{r=a} \\ &(-h \leq z \leq -q_1 h) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial \varphi_1^{(m)} / \partial r + \partial \varphi_0^{(m)} / \partial r)|_{r=a} &= \partial \varphi_2^{(m)} / \partial r|_{r=a} \\ &(-h \leq z \leq -q_1 h) \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial \varphi_1^{(m)} / \partial r + \partial \varphi_0^{(m)} / \partial r)|_{r=a} &= 0 \\ &(-q_1 h \leq z \leq 0) \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\partial \varphi_2^{(m)} / \partial r|_{r=a} = 0 \quad (-q_1 h \leq z \leq -q_2 h) \dots\dots(20)$$

式(18)~(20)を円筒の外表面および内面についてまとめると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \begin{cases} -\partial \varphi_0^{(m)} / \partial r|_{r=a} & (-q_1 h \leq z \leq 0) \\ \left(\frac{\partial \varphi_2^{(m)}}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_0^{(m)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} & (-h \leq z \leq -q_1 h) \end{cases} \\ &\dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \begin{cases} 0 & (-q_1 h \leq z \leq -q_2 h) \\ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_0^{(m)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} & (-h \leq z \leq -q_1 h) \end{cases} \\ &\dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

式(8), (16)の一般解を式(17), (21), (22)に代入し, 固有関数の直交性等を利用して $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$) に関する複素連立方程式を求める. ただしこれについては前報に詳しいので, 本論文では紙面の都合上省略する. ここで, 内部空気の圧縮性がどのような形で解に取り込まれるかについて, 若干の説明を加える. 式(16)の第2式, 右辺第2項および第4項が空気圧縮性に対応する項であるが, これらの項は定数項であるため, 式(21), (22)に示される運動量の連続条件, 円筒表面の不透過条件には無関係であることがわかる. すなわち, これらの条件は空気圧縮性の影響を受けない. 空気圧縮性は, 式(17)のエネルギーの連続条件における0次のフ

ーリエモードのみに関わるもので、これによって解に取り込まれる。そしてこれは、当然ながら空気圧縮性の影響が θ に無関係に様な圧力変化として作用することを意味する。

(3) 中空円筒内外部の波高と平均水面変動量

円筒外部および内部の複素水面変動量を η_1 および η_2 とする。このうち η_1 は通常と同様に圧力方程式を用いて $\eta_1 = (-1/g)(\partial\Phi_1/\partial t)|_{z=0}$ より求められる。したがって式 (1), (3), (8) より, η_1 は次のようになる。

$$\eta_1 = \frac{iH_0}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \epsilon_m i^m J_m(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} K_m(k_n r) - iA_0^{(m)} H_m^{(1)}(k_0 r) \right\} \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (23)$$

これに対して円筒内部については、付加圧力項のために圧力方程式から直接 η_2 を求めることはできない。そこで、次式に示される運動学的条件より η_2 を求める。

$$\partial\eta_2/\partial t = \partial\Phi_2/\partial z|_{z=q_2 h} \quad \dots\dots\dots (24)$$

式 (24) に式 (2), 式 (16) を代入し、両辺を t に関して積分することにより, η_2 は次のように表される。

$$\eta_2 = \frac{iH_0}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \frac{\cos \nu_n (1-q_2)h}{\cos \nu_n h} I_m(\nu_n r) - iB_0^{(m)} \frac{\cosh \nu_0 (1-q_2)h}{\cosh \nu_0 h} J_m(\nu_0 r) \right\} \cos m\theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) を用いて, $\bar{\eta} = (1/S) \int_A \eta_2 dA$ で定義される円筒内部の平均水面変動量を求めると以下のようになる。

$$\bar{\eta} = iH_0 e^{-i\omega t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(0)} \frac{\cos \nu_n (1-q_2)h}{\cos \nu_n h} \frac{I_1(\nu_n a)}{\nu_n a} - iB_0^{(0)} \frac{\cosh \nu_0 (1-q_2)h}{\cosh \nu_0 h} \frac{J_1(\nu_0 a)}{\nu_0 a} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

3. 計算例および考察

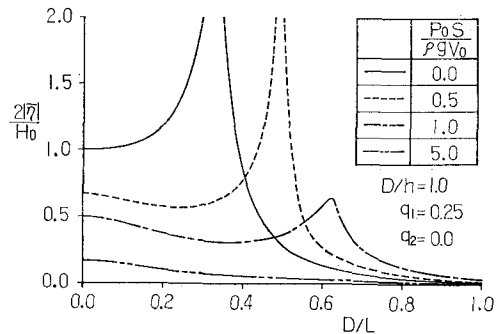
(1) 平均水面変動量におよぼす空気圧縮性の影響

図—2 (a)~(c) は、円筒の径 $D (=2a)$ と h の比 D/h を 1.0, q_2 を 0.0 に固定し, q_1 をそれぞれ 0.25, 0.50, 0.75 としたときの内部平均水面変動振幅の応答特性を D と入射波長 L の比 D/L の関数として示したもので、空気圧縮性の影響を示す $P_0 S/\rho g V_0$ をパラメータとしている。これらの図より, q_1 を大きくすることによって、応答のピークが全体的に D/L の小さい方、換言すれば小口径、長波長側にずれることがわかる。また、(a)~(c) いずれの場合も $P_0 S/\rho g V_0$ を大きくする、すなわち密閉する空気の体積を小さくすると、応答がピークになるときの D/L の値は大きくなり、ピーク値は小さくなることがわかる。これは内部空気が線形バネと等価な働きをするため、 $P_0 S/\rho g V_0$ を大きくすることはバネ定数を大きくすると同様な効果となるためである。このため、共振域が相対的に高振動数側にずれる結果となる。

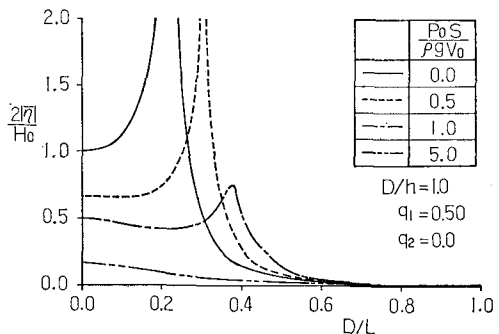
図—3 (a), (b) は, q_1 を 0.5, q_2 を 0.0 に固定し、

D/h を変えて計算した結果の一例で, D/h をそれぞれ 0.5, 3.0 とした場合である。これらの図より, D/h を大きくすると、ピークになるときの D/L の値が大きくなるとともにピーク値は小さくなることがわかる。なお、ここで示す結果のほかに $D/h=5.0$ の場合も計算を行ったが、このときには $P_0 S/\rho g V_0$ を変えたすべての場合においてピークが生じず, D/L が大きくなるにつれて単調に減少する応答特性を示した。

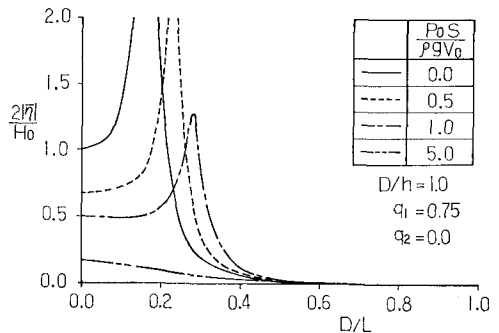
以上の計算例から, q_1 および D/h に対応した応答特性変化の基本的性質は、密閉型と開放型で同様であるが, $P_0 S/\rho g V_0$ が大きくなるにつれて、ピークを生じる D/h の値は大きくなり、ピーク値は小さくなる結論で



(a) $q_1=0.25$

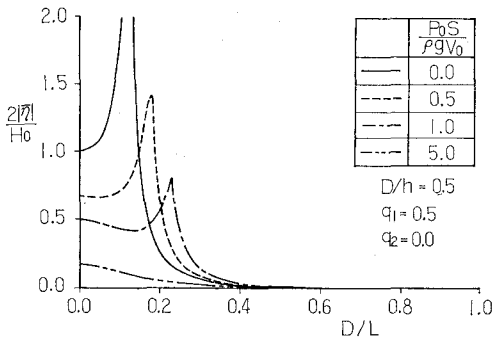
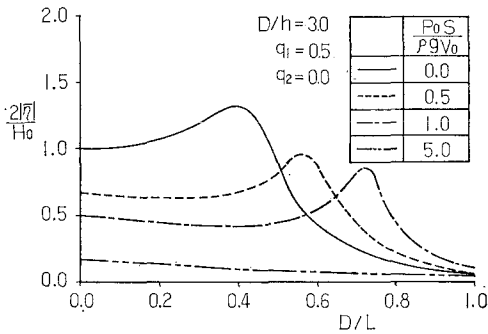
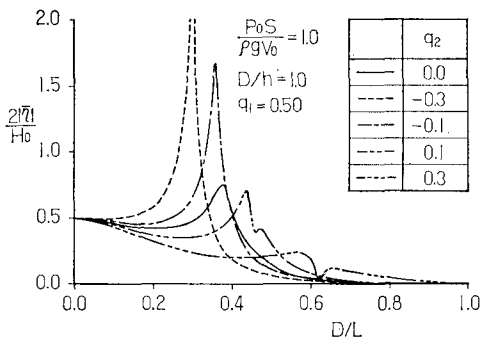


(b) $q_1=0.50$



(c) $q_1=0.75$

図—2 平均水面変動の応答特性におよぼす q_1 の影響

(a) $D/h=0.5$ (b) $D/h=3.0$ 図-3 平均水面変動の応答特性におよぼす D/h の影響図-4 平均水面変動の応答特性におよぼす q_2 の影響

きる。ただし、 $P_0S/pgV_0=5.0$ の計算結果に示されるように、空気バネの効果がある程度以上になるといずれの場合もピークが生じなくなる。

次に図-4に、 $q_1=0.5$ 、 $D/h=1.0$ の場合について、静水時の内部空気圧 P_0 を変化させたときの応答特性を示す。ただし、 P_0S/pgV_0 を 1.0 に固定し、 q_2 を 0.3 から -0.3 まで変化させている。したがって、 q_2 の正負は外部の空気圧に対して内部空気圧が高い場合、および低い場合に対応している。この図から、 q_2 を小さくするほどピークになる D/L の値は小さくなるとともに、ピーク値が大きくなることがわかる。これは q_2 を小さく

すると振動する流体の質量が増し、その結果相対的に固有振動数が低くなるためと思われる。また q_2 が 0.1 と 0.3 の場合、ピークが 2 つ現れているが、これは内外部での波長の差異に起因するものと思われる。

ここで工学的応用上、特に重要と思われるのは、密閉部分の空気圧の変化によって応答特性が変化することである。これはすなわち、構造物諸元を変えることなく波に対する特性を変化させることができることを意味しており、能動的な波浪制御の可能性という観点から実に興味深い。なお、以上の計算における固有関数の展開項数は、前報⁴⁾の結果を踏まえすべて 10 項としている。

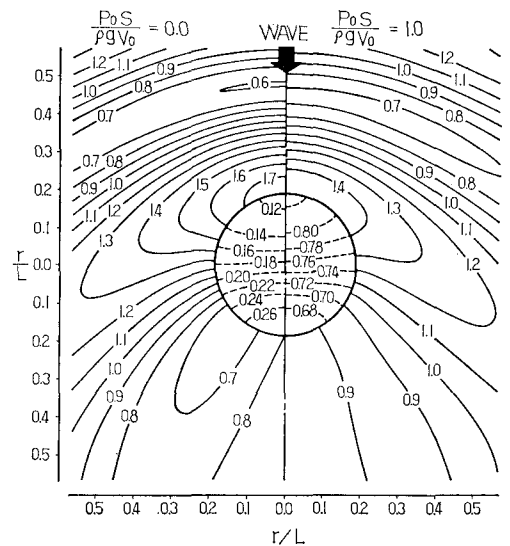
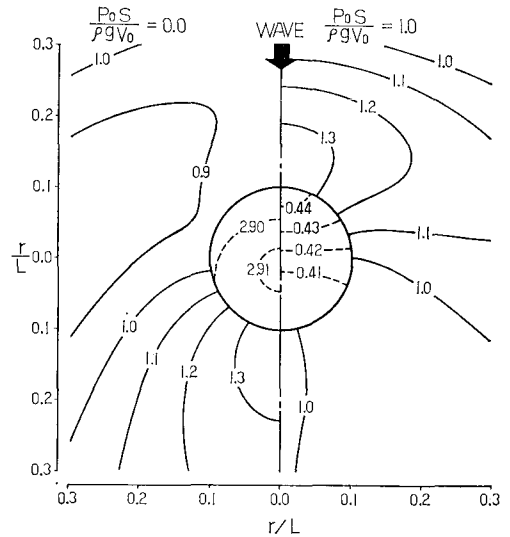
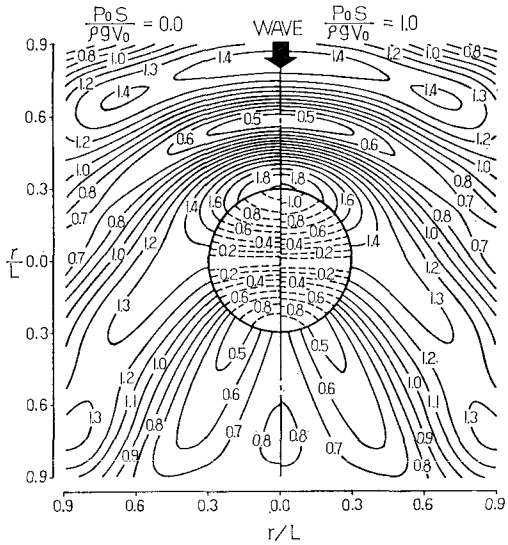
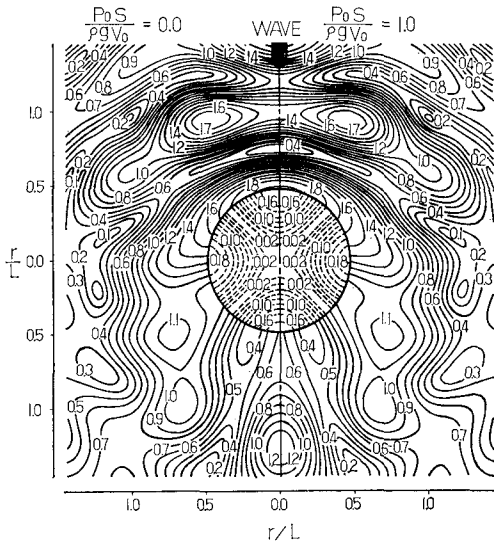


図-5 (1) 開放型および密閉型の場合の波高分布の比較

(c) $D/L=0.60$ (d) $D/L=0.97$

図—5 (2) 開放型および密閉型の場合の波高分布の比較

(2) 波高分布例

図—5 (1), (2) は, $D/h=1.0$, $q_1=0.5$, $q_2=0.0$ の条件で開放型と密閉型の場合の円筒内外部の波高分布を比較したものである。図中, 左側が開放型 ($P_0S/pgV_0=0.0$), 右側が密閉型 ($P_0S/pgV_0=1.0$) を表す。(a) は開放型の内部平均水面応答がピークになるとき ($D/L=0.20$) の波高分布を示すものである。この図より, 円筒内部の水面は両者ともほぼ一様に変動しているものの, その振

幅にはかなり差があることがわかる。また密閉型では, 波が入射する前面でやや高い波高が現れるのに対し, 開放型ではむしろ背面の波高が大きくなることがわかる。

(b) は密閉型の平均水面応答がピークするとき ($D/L=0.38$) の波高分布である。この図より, 内部に空気を密閉することは単純に内部水面の変動を抑える効果として作用するのではなく, 逆に内部水面の変動を大きくする場合があることがわかる。

以上は水面が一様に変動するいわゆる 1 次モードの振動であるが, これに対し (c), (d) は, それぞれ 2 次 ($D/L=0.60$) および 3 次 ($D/L=0.97$) の共振現象をおこすときの波高分布を示したものである。これらの場合, 開放型と密閉型でほぼ同様な波高分布になるのがわかる。これは, 内部水面が位相差を伴って変動するため, 内部空気の体積変化は小さく, 空気圧縮性の影響をほとんど受けないためである。実際, 図—2 (b) より, これらの場合の平均水面応答は開放型, 密閉型ともにほぼ 0 であることがわかる。

なお, 以上の計算では, 式 (23), (25) におけるフーリエ展開項数を 7 項としている。

4. あとがき

以上, 著者らは前報に引き続き, 空気圧縮性を考慮した内部水面上の境界条件を満足する一般解を導き, それを用いて中空円筒内部の平均水面変動量および内外部の波高分布におよぼす空気圧縮性の影響を定量的に把握した。なお本論文では, 空気の状態変化を等温変化と仮定し, ボイルの法則を用いたが, 断熱変化の場合も本解析法と同様に定式化できる。この場合, 空気の状態変化は $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$ (P, V : 空気室内の圧力, 体積, γ : 比熱比) にしたがうことになる。そして, これは結果として本論文で用いているパラメータ P_0S/pgV_0 に γ がかかることになるだけである。したがって本論文中に示した計算結果をそのまま適用できる。

参考文献

- 1) 前田久明・木下 建・増田光一・林 秀郎・加藤 渉: 波浪発電に関する基礎的研究 (その 5), 日本造船学会論文集, 第 152 号, pp. 250~255, 1982.
- 2) 小島朗史・合田良美・鈴木諭司: 波力発電ケーソンの空気出力効率の解析——波エネルギーに関する研究 第 1 報——, 港湾技術研究所報告, 第 22 巻, 第 3 号, 1983.
- 3) 清川哲志・大山 巧・小林 浩: 中空円筒による波の散乱の解析とその応用, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 390~394, 1983.
- 4) 大山 巧・清川哲志: 中空円筒による波の散乱の解析および実験, 第 39 回土木学会年次学術講演会概要集, pp. 289~290, 1984.