

流体の圧縮性を考慮した軸対称構造物の付加質量解析

清 川 哲 志*

1. はじめに

著者は、前報¹⁾で非圧縮性流体中の軸対称構造物の地震時流体力を解析する方法として、固有関数展開により一般解を求め、これを構造物表面での境界条件に代入した後、再度固有関数で展開し一般解中の複素数を決定するための関係式を得る方法“境界展開法”による解析を提案した。これは、従来この種の問題の解析法として提案されている有限要素法^{2),3)}あるいはグリーン関数法⁴⁾などの数値解析法とは異なり、任意の軸対称構造物に対する厳密解を構成するものである。

本論文では、この“境界展開法”を用いて、圧縮性流体中の軸対称構造物の水中振動による流体運動を、表面波の発生も考慮して厳密に定式化し、その解の構成法を示す。そして、軸対称構造物の代表的な例として円錐台を取り上げ、前報では無視した流体の圧縮性が付加質量特性にどのような影響を与えるかを明らかにする。また、同時に表面波の発生の影響についても明らかにする。

2. 流体の圧縮性を考慮した軸対称構造物の動水圧理論

(1) 基礎方程式と境界条件

図-1 に示すように座標系を定義し、中心軸が z 軸と一致する鉛直軸対称構造物が水深 h の水中で角振動数 ω の調和振動を行う場合を考える。構造物の周囲を取り囲む流体は非粘性の圧縮性流体、また、構造物の振動によって生じる流体の運動は非回転 (irrotational) であると仮定し、流体運動を速度ポテンシャルによって記述する。これを円筒座標系で $\phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}$ (i : 虚数単位) とする。また、構造物の振動と発生波の振幅は共に微小であるとし、線形理論による解析を行う。このとき $\phi(r, \theta, z)$ は次の基礎方程式と境界条件を満足する関数として求められる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\rho \omega^2}{\kappa} \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} - (\omega^2/g)\phi = 0 \quad (\text{on } S_F) \quad \dots\dots\dots (2)$$

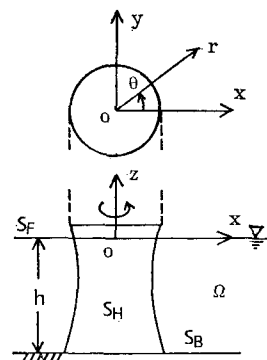


図-1 座標系

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n \quad (\text{on } S_H) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\frac{\partial \phi}{\partial r} - i k_0 \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ρ : 流体密度、 κ : 流体の体積弾性率、 g : 重力加速度、 k_0 : 波数 ($k_0 \tanh k_0 h = \omega^2/g$ の実正根) である。また、 n による微分は構造物表面での法線方向微分で、 v_n は構造物表面の複素運動速度振幅の法線方向成分である。

式 (1) は圧縮性流体に関する基礎方程式で、円筒座標系で表された 3 次元ヘルムホルツ方程式である。 $\sqrt{\kappa/\rho}$ は局所音速を表すが、密度 ρ の場所的、時間的変化はわずかと考えられるので、通常行われるように平均音速で置き換えて解析を進める。式 (2) は自由表面 S_F における運動学的・力学的条件、式 (3) は海底面 S_B における不透過条件、式 (4) は構造物表面 S_H における構造物表面の運動速度と流体の運動速度の連続条件である。また、式 (5) は無限遠方における放射条件である。

(2) 境界展開法による解析

a) 一般解

構造物表面上の境界条件 (4) を除いたすべての境界条件と基礎方程式を満足する一般解は、固有関数の重ね合わせによって次式のように求められる。

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ A_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_m^{(1)}(\lambda_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_m^{(1)}(\lambda'_n r) \right\}$$

* 正会員 清水建設(株) 大崎研究室

$$+ \sum_{n=s+1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_m(\lambda_n r) \Big\} e^{im\theta} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $H_m^{(1)}$: 第1種 m 次ハンケル関数、 K_m : 第2種 m 次変形ベッセル関数、 k_n : 固有値 ($k_n \tan k_n h = -\omega^2/g$ の実正根、 $k_1 < k_2 < \dots$)、 $\lambda_0^2 = k_0^2 + \rho\omega^2/\kappa$ 、 $\lambda_n^2 = k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa$ 、 $\lambda_n' = i\lambda_n$ で、 s は $k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa < 0$ となる整数 n のうち最大のものである。

式(6)の第2項が圧縮性を考えることによって付け加わる項で、有限個(s 個)の進行波成分からなっている。この進行波成分の発生は、 $k_n^2 - \rho\omega^2/\kappa < 0$ となる整数が存在するかどうかによって決まるが、 k_n は水深と振動周期から決まる固有値で、 ρ 、 κ などは流体固有の定数なので、進行波成分が発生するしないかは、結局、構造物形状によらず、水深と振動周期のみによって決まることわかる。この進行波成分の n 次のモードの発生限界は、 T を振動周期として、次式によって示される。

$$h < (2n-1)\sqrt{\kappa/\rho}T/4 \quad \dots\dots\dots(7)$$

この式に基づき各モードの発生限界を示したのが 図-2 である。ただし、横軸は振動周波数 f ($=1/T$)、縦軸は水深で、水中音速 ($=\sqrt{\kappa/\rho}$) は 1475 m/s としている。大水深、高周波数となるほど高次のモードが発生することがわかる。

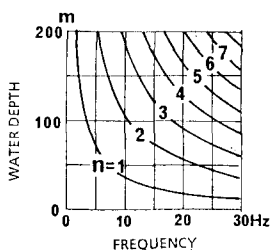


図-2 圧縮性進行波モードの発生限界

b) 構造物表面における境界条件

軸対称構造物の場合どの方向に振動しても同じなので、一般性を失うことなく x 軸に平行に振動しているものとする。すなわち、構造物の変位振幅を ξ_0 とし、変位を $X = \xi_0 e^{-i\omega t}$ と表わす。この仮定のもとで構造物表面での境界条件式(4)における v_n を考えると次のようになる。

$$v_n = -i\omega \xi_0 n_r \cos \theta \quad \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 n_r は構造物表面における単位法線ベクトルの r 成分で、 $n_r \cos \theta$ は構造物表面における単位法線ベクトルの x 成分となる。

また、境界条件式(4)における法線方向微分 $\partial/\partial n$ は、一般に単位法線ベクトルの r 、 θ 、 z 成分 n_r 、 n_θ 、 n_z を用いて表すことができるが、軸対称構造物の表面では常に $n_\theta = 0$ であるので、構造物表面における境界条件(4)は軸対称構造物に関して次のように表すことができる。

$$n_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = -i\omega \xi_0 n_r \cos \theta \quad (\text{on } S_H) \quad \dots\dots(9)$$

式(9)を見ると、右辺は θ に関して $\cos \theta$ の項のみである。したがって、これが構造物表面上の任意の点で成り立つためには、左辺も θ に関しては $\cos \theta$ の項のみが残らなければならない。これよりフリーエ展開に関しては $m = \pm 1$ 以外の項はすべて0であるべきことがわかる。これを考慮して、速度ポテンシャルの一般解(6)を式(9)に代入し整理すると、構造物表面条件として次式を得る。

$$\begin{aligned} n_r \Big\{ & \lambda_0 A_0 \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)'}(\lambda_0 r) \\ & + \sum_{n=1}^s \lambda_n A_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)'}(\lambda_n' r) \\ & + \sum_{n=s+1}^{\infty} \lambda_n A_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r) \Big\} \\ & + n_z \Big\{ k_0 A_0 \frac{\sinh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)}(\lambda_0 r) \\ & - \sum_{n=1}^s k_n A_n \frac{\sin k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)}(\lambda_n' r) \\ & - \sum_{n=s+1}^{\infty} k_n A_n \frac{\sin k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r) \Big\} \\ & = -i\omega \xi_0 n_r \quad (\text{on } S_H) \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ただし、 $A_n^{(1)} + A_n^{(-1)} = A_n$ ($n=0, 1, \dots$) のように置き直している。また、 $H_1^{(1)'}K_1$ は、それぞれ $H_1^{(1)}$ および K_1 の導関数である。

式(10)は構造物表面の境界条件が変形されたもので、構造物表面上の任意の点で成り立たねばならない。

c) 構造物表面条件の固有関数展開

軸対称構造物の場合、鉛直軸から構造物表面上の点までの距離 r および構造物表面上の単位法線ベクトルの成分 n_r 、 n_z 等は θ に無関係であり、 z のみによって決まるので、これらは次式のように $-h \leq z \leq 0$ において定義される z の関数として表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0(z) \\ n_r &= n_r(z) \\ n_z &= n_z(z) \end{aligned} \right\} (-h \leq z \leq 0) \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 r_0 は鉛直軸から構造物表面上の点までの距離を表す z の関数である。

したがって、式(10)は見掛け上 r と z の関数であるが、実際は両辺とも z のみの関数であり、式(10)が、構造物表面上の任意の点で成り立つということと $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成り立つということは同値であることがわかる。ここで式の展開を簡明にし、見通しをよくするために、次のように置く。

$$\left\{ \begin{aligned} n_r(z) \lambda_0 \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)'}(\lambda_0 r_0(z)) \\ + n_z(z) k_0 \frac{\sinh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)}(\lambda_0 r_0(z)) \end{aligned} \right.$$

$$F_n(z) = \begin{cases} (n=0) \\ n r(z) \lambda'_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)}(\lambda'_n r_0(z)) \\ -n_z(z) k_n \frac{\sin k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)}(\lambda'_n r_0(z)) \\ (n=1, 2, \dots, s) \\ n r(z) \lambda_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r_0(z)) \\ -n_z(z) k_n \frac{\sin k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r_0(z)) \\ (n=s+1, s+2, \dots) \end{cases} \quad (12)$$

これを用いると式 (10) は次のように書くことができる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n(z) = -i\omega \xi_0 n_r(z) \quad (13)$$

この両辺はすでに述べたとおり、ともに $-h \leq z \leq 0$ で定義された z の関数である。この区間で定義された任意の関数が固有関数で展開できることから、この両辺はそれぞれ次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n F_n(z) &= b_0 \cosh k_0(h+z) + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos k_l(h+z) \\ -i\omega \xi_0 n_r(z) &= c_0 \cosh k_0(h+z) + \sum_{l=1}^{\infty} c_l \cos k_l(h+z) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $b_l, c_l (l=0, 1, \dots)$ はフーリエ係数で次式によって求められる。

$$b_l = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cosh k_0(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz} & (l=0) \\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-h}^0 F_n(z) \cos k_l(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz} & (l=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (15)$$

$$c_l = \begin{cases} \frac{-i\omega \xi_0 \int_{-h}^0 n_r(z) \cosh k_0(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_0(h+z) dz} & (l=0) \\ \frac{-i\omega \xi_0 \int_{-h}^0 n_r(z) \cos k_l(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_l(h+z) dz} & (l=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (16)$$

したがって、式 (10) が $-h \leq z \leq 0$ なる任意の z に対して成り立つためには、上式で定義されたフーリエ係数 b_l および c_l の間に $b_l = c_l (l=0, 1, \dots)$ の関係が成り立つ必要があることがわかる。これから次の複素未定係数 A_n が満たすべき複素係数連立 1 次方程式が導かれる。

$$[D]\{A\} = -i\omega \xi_0 \{a\} \quad (17)$$

ただし、 $\{A\} = {}^t\{A_0, A_1, \dots\}$ である。また、行列の要素 D_{ij} および定数ベクトル項の要素 a_i はそれぞれ以下

の式で定義される。

$$D_{ij} = \begin{cases} \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cosh k_0(h+z) dz & (i=1, j=1, 2, \dots) \\ \int_{-h}^0 F_{j-1}(z) \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i=2, 3, \dots, j=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (18)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \int_{-h}^0 n_r(z) \cosh k_0(h+z) dz & (i=1) \\ \int_{-h}^0 n_r(z) \cos k_{i-1}(h+z) dz & (i=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (19)$$

式 (17) を解いて得られる複素係数 $A_n (n=0, 1, \dots)$ を一般解に代入することによって個々の構造物に対応した解が得られる。なお、式 (17) よりわかるように、複素係数 $A_n (n=0, 1, \dots)$ は振動速度振幅 $-i\omega \xi_0$ に比例するので、 $\{A\} = -i\omega \xi_0 \{\tilde{A}\}$ と書くことができる。したがって、軸対称構造物による放射問題の解は、運動速度振幅 $-i\omega \xi_0$ に比例し、次式のように表されることがわかる。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z) &= -i\omega \xi_0 \left\{ \tilde{A}_0 \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)}(\lambda_0 r) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^s \tilde{A}_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)}(\lambda'_n r) \\ &\quad \left. + \sum_{n=s+1}^{\infty} \tilde{A}_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r) \right\} \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

以上が、境界展開法による解析法の概要で、展開の過程から明らかのように、圧縮性流体中の任意の軸対称構造物による放射問題の厳密解が得られる。

(3) 動水圧と付加質量

速度ポテンシャル (20) を用いて、一般化されたベルヌーイの定理より、任意点における動水圧が求められる。そして、構造物全体の付加質量 M_b は、次式のように、この x 方向成分を構造物の没水表面上で積分し、これを振動加速度 $-\xi_0 \omega^2 e^{-i\omega t}$ で除すことによって求められる。

$$\begin{aligned} M_b &= \pi \rho \int_{-h}^0 n_r(z) r_0(z) \left\{ \tilde{A}_0 \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_1^{(1)}(\lambda_0 r_0(z)) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^s \tilde{A}_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} H_1^{(1)}(\lambda'_n r_0(z)) \\ &\quad \left. + \sum_{n=s+1}^{\infty} \tilde{A}_n \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_1(\lambda_n r_0(z)) \right\} dz \end{aligned} \quad (21)$$

3. 数値計算例と考察

円錐台は、軸対称構造物の中でも最も工学的に応用されやすい形状の一つであろう。ここでは、図-3 に示すような円錐台を例にとり、流体の圧縮性および表面波の発生が付加質量特性におよぼす影響について数値計算結

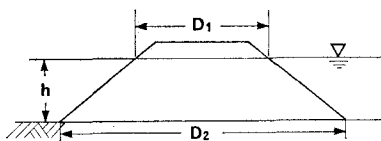


図-3 円錐台と記号

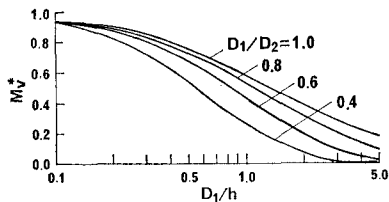


図-4 円錐台の全付加質量特性

果に基づいて考察する。なお、以下では付加質量係数を付加質量と構造物が排除した流体の質量との比として定義している。

(1) 全付加質量特性

まず、円錐台の基本的な付加質量特性、すなわち非圧縮性流体中で表面波を伴わない場合の付加質量特性について述べる。これは、後に流体の圧縮性、および表面波発生の影響を検討する際の基準となるものである。

非圧縮、表面波なしの場合の付加質量係数 $\bar{M}_v^*$ を構造物の径と水深の比 D_1/h の関数として表したのが図-4である。図中のパラメータ D_1/D_2 は、構造物の水線面および海底面における直径の比である。 D_1/D_2 が小さくなるほど法面勾配が緩やかになり、 D_1/h が大きくなるほど構造物は偏平となる。したがって、図は構造物が偏平で、かつ法面勾配が緩やかなほど付加質量係数が小さくなることを示している。

(2) 流体の圧縮性の影響

図-5は、流体の圧縮性の影響を無次元周期 $\sqrt{\kappa/\rho}T/h$ の関数として示したもので、縦軸は流体の圧縮性による付加質量係数の増加分の割合 $(\bar{M}_v - \bar{M}_v^*)/\bar{M}_v^*$ である。ただし、 $\bar{M}_v$ は流体の圧縮性を考慮した付加質量係数、 $\bar{M}_v^*$ は先に求めた非圧縮、表面波なしの場合の付加質量係数である。図中、各曲線におけるピークは、図-2に示した流体の圧縮性による進行波成分の各次の臨界周期に対応している。ただし、図からわかるように、 D_1/h が小さくなるとピークは低くかつなだらかになり、特に $D_1/h=0.4$ では2次のピークがほとんどめだたなくなっている。逆に D_1/h が大きくなると無次元周期に対して大きく変動し、ピークも鋭くなることがわかる。また、この傾向は D_1/D_2 が小さいほど著しいことがわかる。このように、付加質量係数は、 D_1/D_2 の値が同じ場合には D_1/h が大きいほど、また、 D_1/h の値が同じ場合には D_1/D_2 の値が小さいほど、流体の圧縮性の影響を大きく受けることがわかる。すなわち、構造物が偏平で、

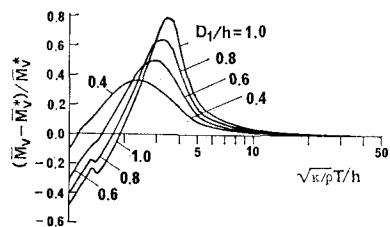
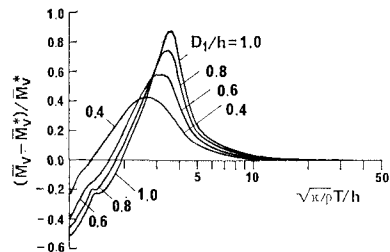
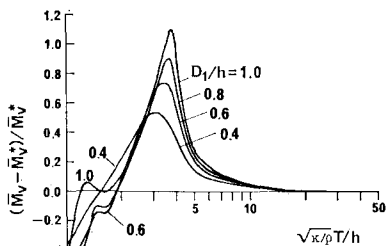
(a) $D_1/D_2=0.8$ (b) $D_1/D_2=0.6$ (c) $D_1/D_2=0.4$

図-5 流体の圧縮性の影響

かつ法面勾配が緩やかなほど、流体の圧縮性の影響を大きく受ける。なお、ここでは流体の圧縮性の影響のみを見るために表面波の発生は無視している。

(3) 表面波発生の影響

次に表面波の発生の影響について検討する。図-6は表面波発生の影響を無次元角振動数 $D_1\omega^2/g$ の関数として示したもので、縦軸は表面波の発生による付加質量係数の増加分の割合 $(\bar{M}_v - \bar{M}_v^*)/\bar{M}_v^*$ である。ただし、ここでは $\bar{M}_v$ は表面波の発生を考慮した付加質量係数で、表面波発生の影響のみを見るために流体は非圧縮としている。図より、同じ D_1/D_2 に対しては D_1/h が大きいほど、また同じ D_1/h に対しては D_1/D_2 が小さいほど、 $D_1\omega^2/g$ に対する変化が大きいことがわかる。すなわち、表面波の発生についても、構造物が偏平で、かつ法面勾配が緩やかなほど影響が大きい。

表面波が発生すると、付加慣性力は構造物の運動加速度と位相差を持つことになる。図-7はこれを各 D_1/D_2 に対し、 D_1/h をパラメータとして示したもので、横軸は無次元角振動数 $D_1\omega^2/g$ 、縦軸は位相差 ε (単位は度)

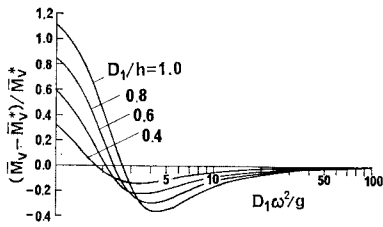
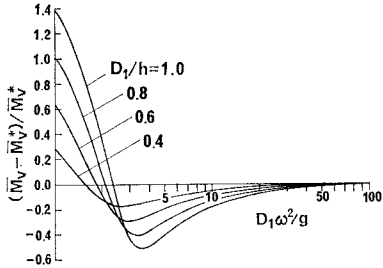
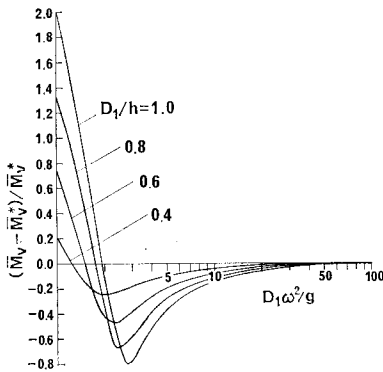

 (a) $D_1/D_2=0.8$

 (b) $D_1/D_2=0.6$

 (c) $D_1/D_2=0.4$

図-6 表面波の影響

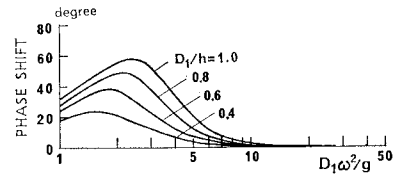
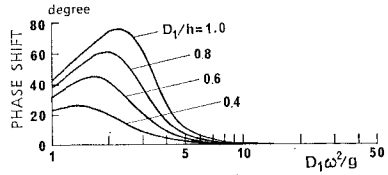
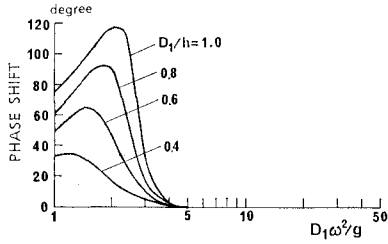

 (a) $D_1/D_2=0.8$

 (b) $D_1/D_2=0.6$

 (c) $D_1/D_2=0.4$

図-7 振動加速度との位相差

4. 結 語

以上、本論文では、軸対称構造物の水中振動による流体運動を、流体の圧縮性および表面波の発生を考慮して、速度ポテンシャルに関する境界値問題として厳密に定式化し、境界展開法によりその厳密解が求められることを示した。そして、流体の圧縮性および表面波の発生が付加質量特性におよぼす影響を、円錐台を例にして検討した。この結果、構造物が偏平で、かつ法面勾配が緩やかなほど影響を大きく受けることを明らかにした。

参 考 文 献

- 1) 清川哲志・小林 浩：大型軸対称構造物の地震時付加質量，第 29 回海岸工学講演会論文集，pp. 452~456, 1982.
- 2) Liao, C.-Y. and A. K. Chopra: Earthquake response of axisymmetric tower structures surrounded by water, UCB Report No. EERC 73-25, 1973.
- 3) Nilrat, F.: Hydrodynamic pressure and added mass for axisymmetric bodies, UCB Report No. EERC-80/12, 1980.
- 4) 喜岡 渉：大型海洋構造物に作用する地震時付加質量，第 28 回海岸工学講演会論文集，pp. 609~613, 1981.

である。同じ D_1/D_2 に対しては D_1/h が大きいほど、また同じ D_1/h に対しては D_1/D_2 が小さいほど、位相差が大きいくことがわかる。また、位相差を生じる振動数領域は、 D_1/D_2 が小さいほど低い方へずれているが、これは法面勾配が緩やかになると、振動数の増加に伴って表面波による流体力が水面付近と海底面付近で逆位相となって互いに打ち消しあうためと考えられる。なお、以上の計算では、事前に式 (21) の収束を検討し、 D_1/D_2 が 0.5 の場合 5 項、その他の場合 10 項を採用している。