

海浜流の数値計算法について

西村 仁嗣*・丸山 康樹**・桜井 力***

1. 序 論

一般の地形および波の場の条件下で生じる定常な海浜流の状況を数値的に解析する方法は、これまでに数多く提案されて来ている。これらは、先ず、非定常計算法と定常計算法に大別される。前者は適宜に与えた初期状態の流れから出発して、平衡な流れの場に至る非定常過程を解析するものであり、後者は定常解に直接アプローチするものである。定常計算法はさらに、局地的な最適化を繰り返すことにより解の精度を高める陽解法と、連立系を解くことにより、この操作を全域に亘って同時的に行なう陰解法とに分類される。

陰的な解析としては、有限要素法¹⁾あるいは Newton-Raphson 法²⁾に基づく計算例が見られる。これらの手法は計算の安定性、収束性の面で大きな利点を有するものの、1 ステップの計算が膨大なものとなる。しかも、とり扱う方程式系が非線形であるため、結局これを反復実行することになり、必ずしも能率的な手法とは言えない。ただし、陰解法の利点をより簡便な形でとり入れようとする ADI (Alternating Direction Implicit) 法は多くの場合有効であり、これについては本文でも触れることにする。

この研究は、実用の視点から海浜流解析のための数理モデルを示し、実算に際して生じるいくつかの問題点の解決を図ったものである。これらの議論の妥当性を検討する目的で、最終節に2種の試算例を掲げる。

2. 基本方程式

水平面内の平均流に関する連続式ならびに運動方程式は次のように書かれる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta)U] = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C + \frac{F}{h + \eta} + L + \frac{S}{\rho(h + \eta)} + g\nabla \eta = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

移流項 $C = (U \cdot \nabla)U$

底面摩擦項 $F = f(\overline{U + u_b})|\overline{U + u_b}|$

水平拡散項 $L = [\nabla \cdot (\varepsilon \nabla)]U$

外力項 $S = \left\{ \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right\}$

ここに、 t は時間、 $\{x, y\}$ は水平面内の直交座標系、 $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ であり、未知量は平均水面の上昇量 η および平均流速ベクトル U である。上式中、 h は静水深、 g は重力加速度、 f は摩擦係数、 ε は拡散係数、 u_b は波に伴なう底面の水粒子速度ベクトル、 $S_{xx}, S_{xy}, S_{yx}, S_{yy}$ 等は波の radiation stress とし、 $\overline{\quad}$ は時間平均値を示すものとする。

摩擦項ならびに拡散項の表示に関しては未知の要因が多く、係数値についても現段階では追算結果から逆に calibrate せざるを得ない状況にある。にもかかわらず、摩擦項の評価に際してそのつど数値的な平均操作を行なうことは、計算労力の点で大きな負担となる。そこで、近似計算を意図することになるが、通常の正弦進行波を対象とする場合、実用上十分な精度を有する評価式³⁾がすでに与えられている。回折、反射を考慮した重合波の場では、底面の水粒子速度の x, y 軸方向成分が

$$u_b = \{\hat{u} \cos(\omega t - \varphi_x), \hat{v} \cos(\omega t - \varphi_y)\}$$

のように、異なる位相角を持つ。この場合には、4時点

$$\omega t = (\varphi_x + \varphi_y + n\pi)/2, \quad n=0, 1, 2, 3$$

における摩擦力を計算し、これらの平均値をとれば、満足すべき精度で F が評価される。係数 f としては通常 0.01 程度の値が用いられる。

水平拡散効果の評価は一層困難である。拡散係数 ε の表示式がこれまでにいくつか提案されているが、いずれも試算の域を出ない。例えば、Longuet-Higgins⁴⁾ の用いた仮説は

$$\varepsilon = Nl\sqrt{g(h + \eta)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。ここに、 N は 0.01 のオーダーの無次元定数、 l は離岸距離であるが、海浜の平均勾配 β を用いて、 $l = (h + \eta)/\beta$ としてもほぼ同等の意味を有することになる。

水平拡散が主として碎波に伴なう乱れに起因し、その効果は碎波帯外では殆んど生じないものと考えて、大水深域の拡散係数を小さくとした例もあるが、これは妥当

* 正会員 工博 筑波大学助教授 構造工学系

** 正会員 工修 電力中央研究所 土木研究所環境部

*** 筑波大学大学院 工学研究科

とは言えない。構造物等が存在して、砕波帯外に重複性の波の場が形成される場合、ここでも平均水位の勾配のみで説明し得ない有限な radiation stress の勾配が算定される。底面摩擦の効果が小さいこれらの領域で、拡散係数もまた小さいものとすれば、結果的に強い流れが得られることになるが、このような状況は経験的に認め難い。

3. 非定常計算法

前節に示した連立微分方程式 (1) および (2) を数值的に積分するために、計算対象領域を 図-1 のような正方形格子で覆い、区分された各微小領域の中心点で諸量を定義する。ただし、平均流速成分 U, V のみはそれぞれ x, y 軸方向に半格子間隔 $\Delta s/2$ だけずらした位置で定義するのが合理的である。離散化された諸量を用い、水位 $\eta_{i,j}$ の計算点毎に連続式、流速成分 $U_{i,j}, V_{i,j}$ の計算点毎に x, y 軸方向の運動方程式を差分形式で記述すると、未知数と同数の連立差分方程式が得られることになる。この際、時間的には前方差分、空間的には原則として中央差分をとり、流速計算点における水深および相互の流速成分値等は、必要に応じて周囲の 2 点ないしは 4 点の平均値で与えることにする。

以上により、ある時間ステップにおける計算領域全般の水位および流速値が与えられるならば、連続式および運動方程式からそれぞれ次の時間ステップにおける水位および流速値が算定される。こうして平面的な水位分布と流速分布の計算を全体が平衡状態に達するまで時間ステップ毎に積み上げて行く。計算の安定性を維持するために、格子間隔と時間ステップ間隔の比 $\Delta s/\Delta t$ は、結果的に得られる最大流速値よりも十分大きく設定しなければならない。

この計算法の大きな問題点は、初期条件として静水状態を想定した場合、これに起流力 S が作用するため、平均水位の変動が領域全体に及ぶ大規模な静振を引き起こすことである。これが減衰して定常的な流れの場となるまでに長時間の計算が要求され、併せて汀線近傍で

dry bed の取り扱いを余儀なくされる。この点を緩和するために従来は計算初期の段階で摩擦係数もしくは起流力を調節する手法が採用されて来た。しかし、後述の方法によって水位の初期値を適切に与えるならば、このような技巧は不要である。

4. 定常計算法

運動方程式 (2) の時間微分項をとり去り、前節におけると全く同様の方針で離散化を行なうと、 $U_{i,j}, V_{i,j}$ の計算点毎にそれぞれ

$$X_{i,j}U_{i,j} + X'_{i,j} + g(\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$Y_{i,j}V_{i,j} + Y'_{i,j} + g(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}) = 0 \dots\dots\dots(5)$$

の形の差分方程式が得られる。ここに、 $X_{i,j}, Y_{i,j}$ 等はいずれも主として周辺の流速値に依存する係数であり、さらに $X'_{i,j}$ および $Y'_{i,j}$ は外力項も含んでいる。

上式を用いれば、平均水位 $\eta_{i,j}$ の分布から $U_{i,j}$ および $V_{i,j}$ が得られる。また、 $\eta_{i,j}$ の増分 $\Delta\eta_{i,j}$ がもたらす流速の増分は

$$\Delta U_{i,j} = -g\Delta\eta_{i,j}/X_{i,j}$$

$$\Delta U_{i+1,j} = g\Delta\eta_{i,j}/X_{i+1,j}$$

等で予測されるので、これらを連続式 (1) に対応する差分方程式に代入することにより、 $\Delta\eta_{i,j}$ の算定式が得られる。ただし、この場合連続式においても時間微分項は除去する。

こうして流速分布と水位分布を交互に補正する方法は簡便ではあるが、安定性の面でしばしば問題を生じる。これは流速の増分 $\Delta U_{i,j}$ および $\Delta V_{i,j}$ がとくに移流項を介して周辺の方程式に大きな残差を生み、一定の条件の下にその増幅伝播を引き起こすためである。流速値の補正が自点のみならず、他点の方程式に及ぼす影響をも考慮し、結果的に生じる残差の自乗和を最小とするように $\Delta U_{i,j}$ 等を定めれば安定性の問題は解決するが、逆に収束速度が問題となる。結局、自乗和を作るときに各点の残差に重みを付け、これを調節するといった極めて煩雑な手続きが必要である。

上述のさまざまな難点を解消する一つの手段は semi-implicit な考え方を導入することである。すなわち、1 本の格子線上に並ぶ計算点の差分方程式を連立させて解くことにより、同時にその線上の流速値を求める。水位についても全く同様である。この場合、連立系の係数行列は tri-diagonal となるので、解は容易に得られる。ADI 法はこうした一連の計算を行毎、列毎に交互に行なうもので、これによれば安定性、収束性ともに大きく改善される。ただし、構造物等が存在して地形境界が複雑になると、プログラムにいく分間がかかるうらみは残る。

次に、いま一つの合理的な計算法として Hardy-Cross 法をとり上げる。この計算法では、図-2 に示すように

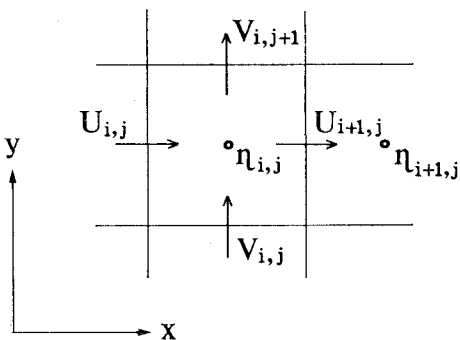


図-1 計算点配置

互いに隣接する4つの計算点を同時にとり扱う。

式(4)および(5)より、

$$\begin{aligned} X_{i,j}U_{i,j} - X_{i,j-1}U_{i,j-1} \\ - Y_{i,j}V_{i,j} + Y_{i,j-1}V_{i,j-1} \\ + X'_{i,j} - X'_{i,j-1} - Y'_{i,j} + Y'_{i,j-1} = 0 \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

を得る。これは運動方程式の両辺の rotation をとったものに相当する。

流速の初期値を適宜に与え、連続式が満たされるようにしておけば、図-2に示すように一定線流量 Δq を周囲方向に追加してもこの関係が乱されることはない。一方、線流量補正值 Δq は各計算点

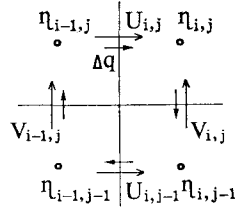


図-2 Hardy-Cross 法

における実質水深で除することにより、流速補正值に変換されるので、これらを式(6)に代入して、 Δq の算定式を得る。全領域の流速分布が定まれば、式(4)あるいは(5)から水位の分布が計算される。

本計算法においても、式(6)の残差が平均化するとともに収束が緩慢となる。これは計算点数が多いほど、ある計算セルの残差を境界から放算させるまでに多くの反復計算が必要になるためであって、数回毎に粗い格子の計算を挿入することによって収束性を高めることができる。また、 Δq の決定に際して ADI 法を適用することも有効である。

5. 初期値の計算

定常的な海浜流を計算の目的とする場合、いずれの計算法においても初期値を適切に与えることは計算量の節減、また安定性の維持の観点から重要である。

運動方程式(2)は、先ず波に伴う radiation stress が存在し、これに釣り合う形で平均水位の勾配と流れが発生するという現象を記述したものである。水位勾配ベクトルの項はそれ自体非回転であるが、その他の主として流速に依存する項はスカラー・ポテンシャルの勾配とベクトル・ポテンシャルの回転の和となっている。外力ベクトル $\mathbf{R} = \mathbf{S}/(h+\eta)$ から solenoidal な部分 $\mathbf{R}_r$ を抽出し、

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_r + \mathbf{R}_g \quad \dots\dots\dots(7)$$

とすると、 $\mathbf{R}_r$ はすべて流速項が分担し⁵⁾、 $\mathbf{R}_g$ は流速項と水位項がそれぞれ部分的に受け持つ。

定義により

$$\mathbf{F} \times \mathbf{R}_r = \mathbf{F} \times \mathbf{R}, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_r = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{R}_g = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_g = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \quad \dots\dots\dots(9)$$

であり、上式のいずれかを解いて $\mathbf{R}_r$ 、 $\mathbf{R}_g$ の一方が得られれば、他方は減算により式(7)から容易に定まる。

式(8)を解くには、 $\mathbf{R}_r = \mathbf{R}$ を初期値とし、各地点の rotation を変化させることなく、局地の divergence を

周囲に分散させる演算を反復実行すればよい。具体的には図-3に示すように、周囲4方向から1つの計算点に向う等量の補正 $\pm \Delta R$ を行なうことにより、この点における $\mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_r$ の値を $4\Delta R/ds$ だけ減らすことができる。

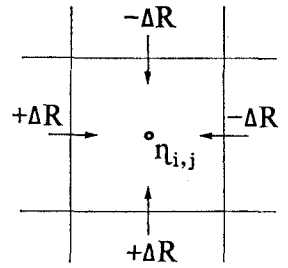


図-3 回転不変の補正

式(9)については Hardy-Cross 法が適用できる。すなわち $\mathbf{R}_g = \mathbf{R}$ を初期値とし、各地点の divergence を変化させることなく、局地の rotation を周囲に分散させて行く。図-4に示すような時計方向の周囲補正 $\pm \Delta R$ は、この点の $\Delta \times \mathbf{R}_g$ の鉛直成分値を $4\Delta R/ds$ だけ減少させる。

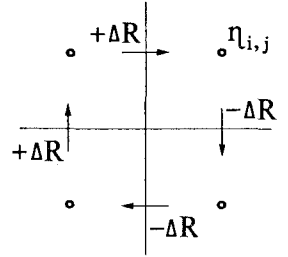


図-4 湧き出し不変の補正

最も単純に運動方程式中の流速項を線形化し、

$$KU + g\nabla\eta + \mathbf{R} = 0$$

と書いて見よう。計算境界を横切る流れが存在する場合には、この条件と連続式を満たすポテンシャル流 $\mathbf{U}_g$ を別に計算し、

$$g\nabla\eta = \mathbf{R}_g - KU_g$$

から η を算定する。計算領域が閉領域であって、外域との間に流入出が全く生じていない場合には、 $\mathbf{U}_g = 0$ と考えて η を決定すれば、良好な水位の近似値が得られる。実際には、 $\mathbf{R}$ の表示式中に η が含まれているため、 η について全体の計算をさらに数回繰り返す必要がある。

流速の初期値は、 $K\mathbf{U}_r = \mathbf{R}_r$ なる回転流 $\mathbf{U}_r$ とポテンシャル流 $\mathbf{U}_g$ の和として与えればよいが、前者は計算効率上それほど大きな意味を持たないようである。

6. 境界条件

x 軸方向には $V_{i,j}$ 、 y 軸方向には $U_{i,j}$ の計算点列に沿って計算境界をとり、条件は境界を横切る流速成分値で与えるのが最も明解である。全境界にわたってこのような条件が与えられる限り、前節までに説明したすべての計算技法が適用できる。

境界が不透過壁面であれば、これに垂直な流速は0である。同時に壁面に平行な流速成分の垂直方向勾配も0としてよい。また、壁面でなくても、砕波帯から十分離れた沖側境界におけるように、流れが存在しないと考える場合がある。

沿岸流の卓越する海岸に構造物が存在するような場合には、側方境界を十分離れた位置に設定することにより

境界付近で水位、流速ともに沿岸方向に一樣と考えることができる。したがって、沿岸方向には摩擦項と拡散項が和が外力項と釣り合うことになり、流速成分が予め算定される。

河川からの流入、人為的な取水等は境界上の一部の計算点における流速成分を外的に与えることにより、計算に組み入れられるが、これに対応する残余境界での流入出形態を予め設定することは一般には困難である。非定常計算法はこの点での自由度が最も高く、上記のようなケースでも、計算領域が十分大きければ、とくに流入出を与える必要はない。

その他、境界水位を条件として規定することも可能である。両側端境界をつなぎ合せて、全体を環状領域と見なす考え方も成立し、こうしたいわゆる周期性境界を採用した計算例も過去にいくつか見られる。

汀線境界のとり扱いかいについては特別の配慮が要求される。水深が極めて小さい領域の流れまでを計算することは技術的に困難であるのみならず、このような条件下の計算を既述の方程式系に基づいて行なうことは物理的に意味を持たないので、ある一定の水深を限度として、ここに固定壁面境界を設定するのが現実的である。実際の海浜では swash zone で波の遡上および戻り流れのために沿岸方向の平均流が生じていることも考えられ、今後その定量的な見積りが望まれる。

汀線近傍の極浅域では radiation stress 項の評価も不正確であり、数値計算の過程で不当な流速勾配を得勝ちである。その結果、式 (5) 中の係数 $Y_{i,j}$ が負の値をとると、水位勾配と流れの相互関係が不合理となって、局地的に顕著な計算の不安定が引き起される。こうした事態は、本来格子間隔をその領域で十分小さくすることにより回避すべきものであり、風上差分法を導入することは必ずしも本質的な解決にならない。これらの計算点を対象領域から除外するか、実用的にはそこでの拡散係数

もしくは摩擦係数を大きくとって、流れのインピーダンスを増大させることにより、この種の不安定を回避することができる。

7. 計算例

本節においては典型的な2種の構造物配置を想定し、その周辺に生じる流れの数値解析例と同一条件での実験結果を示す。

波および radiation stress に関する入力データとしては、渡辺・丸山⁶⁾の計算結果をそのまま用いた。ここでは波の屈折、回折が大きな意味を持ち、その計算に多大な労力を要するため、波と流れの相互干渉は考慮されていない。

計算格子間隔は波の計算における格子間隔の2倍にとり、隣り合う4点毎の計算値を平均して各計算点の波の条件を与えた。以下においては、同様の操作により、さらに2倍の間隔で流速ベクトルの計算値を図示する。各ケースについてそれぞれ3種の計算法を適用し、当然のことながら全く同様の結果を得ている。いずれの計算も高速計算機システム M-200 で10分前後を要した。

図-5は勾配1/50の一樣斜面上の離岸堤に対し、波高2.0cm、周期1.2sの波が垂直入射する場合を考え、堤の背後に生じる循環流を解析したものである。同一の条件下における実験の結果は図-6に示されている。流速値はフロートと染料の流れの平面写真から推定したものである。防波堤中央部背後の沖向きの流れについて見ると、観測結果の方が狭い範囲に集中しているが、その一因は波と流れの干渉に求められる³⁾。拡散係数の与え方にも検討の余地がある。

図-7および8はやはり底勾配1/50の一樣斜面上に突堤を置き、波高2.0cm、周期1.2sの波を60°の傾角で斜め入射させた場合の流況をとり上げ、計算と実験の結果を示したものである。図-8中の独立した矢印はフ

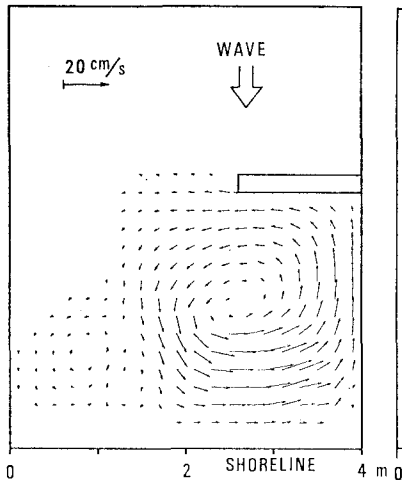


図-5 離岸堤背後の循環流 (計算値)

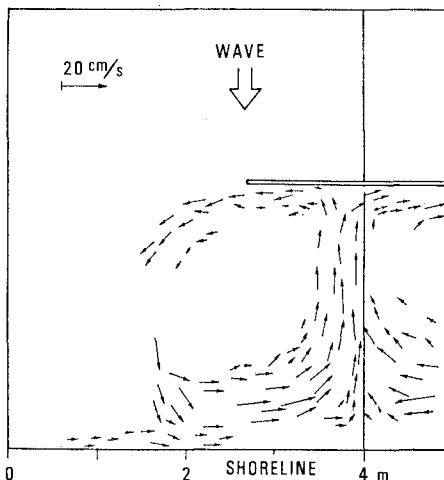


図-6 離岸堤背後の循環流 (実験値)

ロートと染料の追跡によって得た流速であり、平行に描かれた8連の矢印は小型プロベラ式流速計によって測定した沿岸方向の流速成分を表示している。この場合、突堤によって沖側に移動した沿岸流の主軸が再び岸側に戻るまでの流況に最大の差異が認められる。計算上突堤の下流側に反時計方向の渦が発生することは当然の結果であるが、実験ではむしろ逆向きの流れが観測されている。これは沿

い波による質量輸送といった、当該計算モデルで考慮されていない要因によるものと思われる。

本研究の遂行にあたり、
東京大学工学部 渡辺 晃
教授には波の場の計算結果
を御提供頂いた。また、計
算に際しては、筑波大学大
学院 高木俊明君ならびに
筑波大学第3学群 武若
聡君の御協力を得た。ここ
に記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 例えば、川原隆人：水環境における流れ解析，数理科学，2月号，pp. 35～45，1983.
- 2) 渡辺 晃：海浜流と海浜変形の数値シミュレーション，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 285～289，1981.
- 3) 西村仁嗣：海浜循環流の数値シミュレーション，第29回海岸工学講演会論文集，pp. 333～337，1982.
- 4) Longuet-Higgins, M. S.: Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 2, J. Geophys. Res., Vol. 75, No. 33, pp. 6790～6801, 1970.
- 5) 渡辺晃・塩崎正孝：構造物周辺の波浪海浜流場について，第29回海岸工学講演会論文集，pp. 110～114，1982.
- 6) 渡辺 晃・丸山康樹：屈折・回折・碎波減衰を含む波浪場の数値解析法，第31回海岸工学講演会論文集，pp. 103～107，1984.

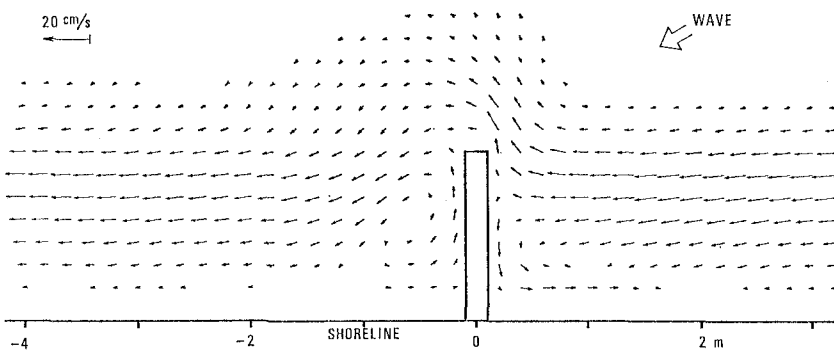


図-7 突堤周辺の沿岸流 (計算値)

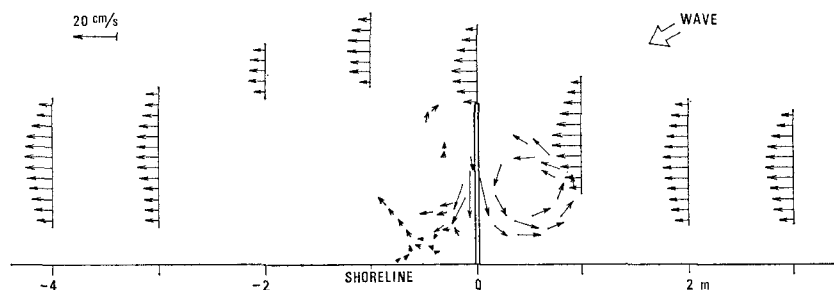


図-8 突堤周辺の沿岸流 (実験値)