

漂砂の移動限界の理論

土屋 義人*・上田 康裕**・大下 哲則***

1. 緒 言

従来、漂砂の移動限界に関しては、優れた研究がなされ、実用的にも十分適用できる実験式が得られている。しかし、それらのほとんどの研究では、波の作用に対する砂粒の静的な釣合条件から移動限界を考察するか、あるいは次元解析によって実験結果を整理しているものが多い。

この中で、Komar¹⁾が示したように、漂砂の移動限界を Shields 数 τ_*^* を砂粒 Reynolds 数 $u_*^* D/\nu$ との関係で整理すると、流砂における限界掃流力の表示と全く同様に表されることがわかってきた。このことは、浅海における波による場合のみならず、深海においても、この事実が確かめられている²⁾。しかし、漂砂の移動限界に関する理論曲線をこの表示において求めて、実験結果と比較して成功したものは発表されていない。

本研究では、漂砂の移動限界近傍における砂粒の動的挙動を rocking motion として、力学的に定式化し、Mathieu 方程式と同形の非線形常微分方程式を得たので、層流および乱流境界層理論による水粒子速度の表示を用いて数値積分し、その安定解から不安定解への限界として漂砂の移動限界を求める。多くの波および底質特性に対応して数百に及ぶこの方程式の解から求められる漂砂の移動限界を Shields 数と砂粒 Reynolds 数との関係、または砂粒 Reynolds 数に対応する砂粒特性の無次元量の関係として表わすと、波による加速度の効果として水粒子軌道直径と粒径との比 d_0/D が介入することがわかり、その一般表示を与え、実験値と比較して、両者がよく一致することを示す。

2. 砂粒の Rocking Motion

2.1 運動方程式

砂粒で構成された粗面にあるひとつの球状砂粒の波の作用による運動を考えると、図-1 に示すように、移動限界時には砂粒 A および B のまわりで rocking motion

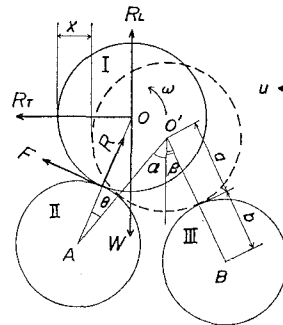


図-1 球状砂粒に作用する力

をする砂粒に作用する流体力として、砂粒の水中重量 W 、水平および鉛直方向の流体力 R_T および R_L を考え、A および B 点のまわりにおける運動方程式をそれぞれ作り、rocking motion によっ

て、A から B へ回転軸を変えたとき、砂粒の角運動量が保存されるとすれば、運動方程式は次のように表される。まず、A 点のまわりの運動方程式として、

$$\left\{ \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma \left(1 + \frac{2}{5} \xi \right) + \frac{4\pi}{15} a^3 \rho \xi \right\} (a+b) \ddot{\theta} = R_T \cos(\alpha - \theta) - (W - R_L) \sin(\alpha - \theta) \dots (1)$$

また、B 点のまわりの運動方程式として次式が得られる。

$$\left\{ \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma \left(1 + \frac{2}{5} \xi \right) + \frac{4\pi}{15} a^3 \rho \xi \right\} (a+b) \ddot{\theta} = R_T \cos(\beta + \theta) - (W - R_L) \sin(\beta - \theta) \dots (2)$$

ここに、式中の記号は図-1 に示したとおりであるが、砂粒間の接触点における滑動および回転に関する条件として、係数 ξ (回転のみのとき $\xi=1$ 、滑動のみの場合 $\xi=0$) を導入した次式を仮定している。

$$\xi(a+b)\dot{\theta} = a\omega \dots (3)$$

Rocking motion に伴って回転軸が移動するときの条件は、A 点のまわりの角速度 $\dot{\theta}_0 (<0)$ から B 点のまわりで角速度 $\dot{\theta}_1 (<0)$ に移行したとして、角運動量の保存式を作れば次のようになる。

$$\dot{\theta}_1 = \lambda \dot{\theta}_0 \dots (4)$$

ここに、 $\lambda = \{2a\xi + 5(a+b)\cos(\alpha + \beta)\} / \{2a\xi + 5(a+b)\}$ である。

2.2 流体力の表示

波動中で運動している粒径 $D (=2a)$ の球状砂粒に作用する流体力は、一般に次のように表示される。まず、水平方向の流体力 R_T を、形式的に次式で表わす。

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 住友金属工業(株) Eng. 本部

*** 正会員 工修 五洋建設(株) 土木設計部

$$R_T = F_d + F_p + F_a \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 F_d は抗力、 F_p は慣性力および F_a は付加質量による抵抗で、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} F_d &= (\rho/2)\pi a^2 C_D |u - U|(u - U) \\ F_p &= (4/3)\rho\pi a^3 (du/dt) \\ F_a &= (4/3)\rho\pi a^3 C_M \{(du/dt) - (dU/dt)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

ここに、 u は水平方向の水粒子速度、 u_0 は境界層の外縁における水粒子速度、 U は砂粒の水平速度、 C_D は抗力係数および C_M は慣性係数である。ただし、抗力係数に対しては、計算の便宜上一様流における球の抗力係数を次式によって近似して用いる。

$$C_D = \begin{cases} K/R_e^{1/2}; & 1 < R_e < 10^3 \\ K & ; 10^3 < R_e < 10^5 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $R_e = |u - U|D/\nu$ および K は定数である。また、慣性係数 C_M については、非定常の流体運動中において種々検討されているが、Reynolds 数 R_e の値が十分大きいことから $C_M = 0.5$ とする。

同様に、鉛直方向の流体力については、抗力 F_{dL} 、Magnus 効果による揚力 R_{ML} および付加質量による抵抗 R_{aL} を考え、次式で表わす。

$$R_L = F_{dL} + F_{ML} + F_{aL} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_{dL} &= (\rho/2)\pi a^2 C_{DL} |w - W|(w - W) \\ F_{ML} &= (\rho/2)\pi a^2 C_L |u - U|(u - U) \\ F_{aL} &= (4/3)\rho\pi a^3 C_{ML} \{(dw/dt) - (dW/dt)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

であり、 w は鉛直方向の水粒子速度、 W は砂粒の鉛直速度、 C_{DL} は抗力係数 (C_D と同様に取扱う)、 C_L は揚力係数 ($= 0.85C_D$ と仮定する) および C_{ML} は慣性係数 ($C_{ML} = C_M$ と仮定する) である。

2.3 水粒子速度の表示

波による層流および乱流境界層の理論に基づいて、水粒子速度を表し、波の理論としては微小振幅波理論を用いる。ただし、波による乱れについては、一般的表示が得られていないので考慮しない。

1) 層流境界層の場合 この場合には、境界層厚 δ は実用上

$$\delta = 5\sqrt{2\nu/\omega}, \quad \omega = 2\pi/T \dots\dots\dots (10)$$

であるから、これが粒径 D より大きい小さいかによって、次のように考える。波による層流境界層理論によれば、 u および w が求められているので、 $D < \delta$ の場合には、その表示において $z = D$ とした値を用い、また $D > \delta$ の場合には、砂粒が境界層より露出することになるので、微小振幅波理論によって与えられる境界層外縁における水粒子速度を用いる。

2) 乱流境界層の場合 すでに、梶浦³⁾によって、境界層を内層、中間層および外層の3層に分けた理論が展

開されているが、ここではより取扱いの簡単な2層モデルによる Brevik⁴⁾ の理論を用いる。これは境界層を overlap layer と outer layer の2層に分け、前者では渦動粘性係数が床面よりの高さに比例するとし、また後者では一定として取扱い、0 次の Kelvin 関数で表される偏微分方程式の解として、水粒子速度の表示が得られている。

層流境界層の場合と同様に、砂粒が overlap layer の中に入る場合と outer layer に露出する場合とに分けて、前述した流体力を計算することができる。

以上、境界層内における水粒子の速度分布の表示およびその計算法の詳細は、紙数の関係で省略する。

2.4 安定解と不安定解

前述した式 (1) および (2) は、複雑な非線形2階常微分方程式であるが、基本的には Mathieu 方程式となっている。たとえば、一様な粗面上におかれた球状砂粒の運動方程式を求め、境界層の存在を省略して考えれば、次のような Mathieu 方程式に変形することができる。

$$\frac{d^2\phi^2}{d\tau_1^2} + (a - 2q \cos 2\tau_1)\phi = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -(1/D_1)(x + \cosh kD \cos \tau) \operatorname{sgn}(u - U) \\ \tau_1 &= 2\omega t \\ q &= (3/4)C_D(A/\sigma)(\sigma/\rho - 1)/(\sigma/\rho + C_M) \\ &\quad \cdot \operatorname{sgn}(u - U) \\ a &= -(3\mu'C_D/8a^2)(T^2g/a)(\sigma/\rho - 1)/ \\ &\quad (\sigma/\rho + C_M)^2 \operatorname{sgn}(U) \operatorname{sgn}(u - U) \\ D_1 &= (8/3)(a/A)(\sigma/\rho + C_M)/C_D \\ A &= H/2 \sinh kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 μ' は砂粒と粗面との摩擦係数である。これより砂粒の運動が Mathieu 関数で表わされる。

式 (1) および (2) によって、具体的に層流境界層を仮定して、砂粒の挙動 (x) を数値積分した結果の一例を図-2に示す。これは $D = 0.39 \text{ cm}$ 、 $\sigma/\rho = 1.18$ のナイロ

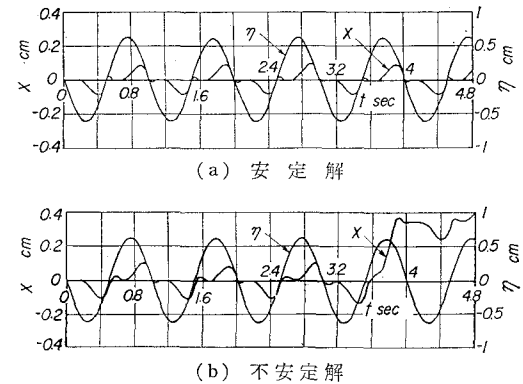


図-2 砂粒の挙動と解の特性

ン球の場合について計算した結果であり、図中 η は波形であり、 H/h は波高・水深比を示す。図-2(a)は波の作用に伴って rocking motion をくり返す安定解を表わしており、この場合は初期条件によらない。しかし、(b)の場合のように、少し波高を大きくすると、周期的変化をしたあと、砂粒は突然大きく移動し、もはや再帰しない。これは不安定解に対応している。このように、式(1)および(2)で表わされる砂粒の rocking motion には Mathieu 方程式と同様に、安定解と不安定解とが存在することがわかる。これらの式中に含まれる諸定数を適当に定めて計算した結果は、粗面上におかれた球状粒子の運動をストロボを用いて写真撮影し rocking motion の時間的变化を測定した実験値と、かなりよく一致することが確かめられている。ただし、この場合、対象とする球状粒子の基準面からの高さも若干補正しなければならないが、これは後述する粒子の遮へい係数に関係する。

3. 漂砂の移動限界

3.1 移動限界の定義

まず、漂砂の移動限界の力学的意義について考察する。砂粒の運動を単純化した場合には、その運動方程式は式(11)のような Mathieu 関数を解とすることがわかった。その場合、砂粒の運動が安定解として表されれば、これは隣接する砂粒間で周期的な運動をしているだけで、真の移動を開始したことにはならない。しかし、不定解で表される場合には、真の移動が起こることになるので、力学的にはこの限界が漂砂の移動限界と定義される。たとえば、式(11)によれば、Mathieu 関数の安定解と不安定解の境界を表わす近似式は、次式で与えられる。

$$a = -(1/2)q^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

これを变形すれば、漂砂の移動限界は次式で表されることになる。

$$\frac{u_*^2}{(\sigma/\rho - 1)gD} = \frac{8}{3}\mu' \frac{(\sigma/\rho + C_M)^2}{(\sigma/\rho - 1)^2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

前述した取扱いかから明らかなように、境界層の存在を無視しているため、直接漂砂の移動限界と比較するわけにはいかないが、左辺は明らかに Shields 数に対応し、右辺に $(\sigma/\rho + C_M)/(\sigma/\rho - 1)$ の形で砂粒の比重の効果が(仮想質量力として)が介入することになる。事実、この項は飛砂の移動限界においてすでに見出されているもので、漂砂の移動限界を動的に取扱ったことによる特徴である。広範囲に、底質の比重が変わる場合にはこの項の存在を考慮しなければならないことを示唆している。

次に、この立場から、式(1)および(2)に波および底質特性に関する種々の条件を入れて数値積分し、砂粒の移動量と波高・水深比との関係を示すと図-3のように

なる。すなわち、ある特定の波条件のところで不安定解に移行することがわかる。その境界条件を求め、これを漂砂の移動限界とする。

一方、式(1)または式(2)において、砂粒の加速度項および速度項を省略すれば、砂粒の静的な釣合条件式が得られる。このモデルは、

従来多くの研究者によって取扱われてきたものであるが、ここでは静的な漂砂の移動限界とよぶ。これに対して、前述した砂粒の rocking motion によるものを動的な漂砂の移動限界ということにする。すでに述べたように、波による境界層内における乱れの効果を省略しているので、これら両者の移動限界には、あまり大きな相違は期待されないであろう。

3.2 移動限界の表示

移動限界の力学的意義によれば、漂砂の移動限界には砂粒の比重の効果が現われるが、前述した非線形2階常微分方程式を数種の比重に対して、粒径および波特性を変えて数値積分することは、かなり労力的である。ここでは、漂砂を対象とすることから、砂粒の比重 σ/ρ は、2.65 と仮定する。数百に及ぶこの方程式の解を数値計算によって求め、層流および乱流境界層のそれぞれに対して、次式による摩擦係数 f の表示式を用いて、底面摩擦応力(最大値)を計算する。層流の場合、

$$f = \frac{2}{3} \sqrt{16(\nu^* D)^2 (D/d_0)^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

であり、乱流の場合、Swart⁵⁾ による次式を用いる。

$$f = \exp \{5.21(2D/d_0)^{0.194} - 5.98\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

漂砂の移動限界に対して計算された限界摩擦応力を用いて、Shields 数 τ_*^* 、砂粒 Reynolds 数 $u_*^* D/\nu$ および粒子の軌道直径・粒径比 d_0/D を計算すると、これらがすべての無次元量であることがわかる。すなわち、漂砂の移動限界は、次式で表示される。

$$\tau_*^* = f(u_*^* D/\nu, d_0/D) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 $\tau_*^* = u_*^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gD \tan \phi$ として通常のように砂粒の静止摩擦係数 $\tan \phi$ を付加して表わす。

一方、式(17)は Shields 数 τ_*^* 、砂粒 Reynolds 数 $u_*^* D/\nu$ と d_0/D とで表されるが、いま岩垣⁶⁾が限界掃流力の研究で用いたように、

$$D_*^* = [(\sigma/\rho - 1)g/\nu^2]^{1/3} D \quad \dots\dots\dots (18)$$

を定義すれば、式(17)は次式のように表される。

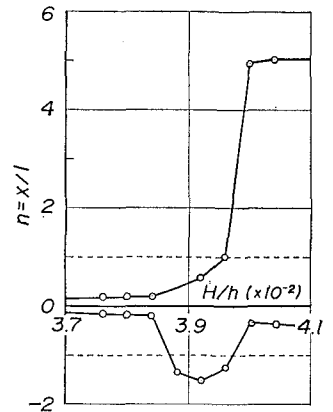


図-3 砂粒の移動量の変化

$$\tau_*^* = g(D_0^*, d_0/D) \quad \dots\dots\dots (19)$$

なお、静的な漂砂の移動限界も式 (15) および (16) を用いると、式 (17) および (19) で表される。このような漂砂の移動限界のように波による加速度が存在する場合には、その影響を表わすパラメータとして d_0/D が加わり、もし $d_0/D \rightarrow \infty$ であれば、一方向流の場合における限界掃流力に対応することになる。

3.3 漂砂の移動限界

前述した方法によって、種々の条件に対する数値計算によって求められた動的な漂砂の移動限界を式 (17) の関係で表わすと、図-4 のようになる。層流および乱流境界層を仮定した場合に対して、 d_0/D をパラメータとして計算点を結ぶと図に示したような曲線群が得られる。確かに、式 (17) の関係によって、漂砂の移動限界が表示されることがわかる。ただし、層流境界層から乱流境界層への遷移限界を明確にすべきであるが、ここでは実験値との比較において考察することにし、詳細には論じない。

さて、この理論結果と実験値を比較するために、岩垣⁶⁾が導入した遮へい係数 ε を用いて、式 (17) および (19) を次のように表す。

$$\tau_*^* = (1/\varepsilon) \begin{cases} f(u_*^* D/\nu, d_0/D) \\ g(D_0^*, d_0/D) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、遮へい係数 ε としては、岩垣⁶⁾が用いた 0.4 とするが、これがひとつの普遍定数としての意義をもつことはきわめて興味深い。

式 (20) に基づいて、動的および静的な漂砂の移動限界の理論曲線と実験値との比較を、それぞれ図-5および図-6に示す。ただし、 d_0/D をパラメータとして層流および乱流境界層を仮定した理論曲線を結んで示してある。まず、両者の相違は d_0/D の値の小さいところにおいて著しいが、 $d_0/D \approx 50$ 程度以上になればほとんど差がない。また、 d_0/D の値の増大に伴ってある曲線に漸近する傾向があり、 $d_0/D \approx 200$ 程度でそれに近

い。理論曲線と実験値との比較は Manohar の実験値を除いて、かなりよく一致することがわかる。この場合は、層流境界層から乱流境界層への実験値の遷移は明確でない。

次に、図-7に示す理論結果から、図-8および図-9には、それぞれ動的および静的な漂砂の移動限界に対して、Sleath⁷⁾が整理した実験値と式 (19) および (20) の関係で比較してある。実験値の整理法に若干不明な点があるが、実験値は移動限界に関する理論曲線ときわめてよく一致し、また層流境界層から乱流境界層への遷移点付近における実験値の傾向は、理論曲線とよく対応し

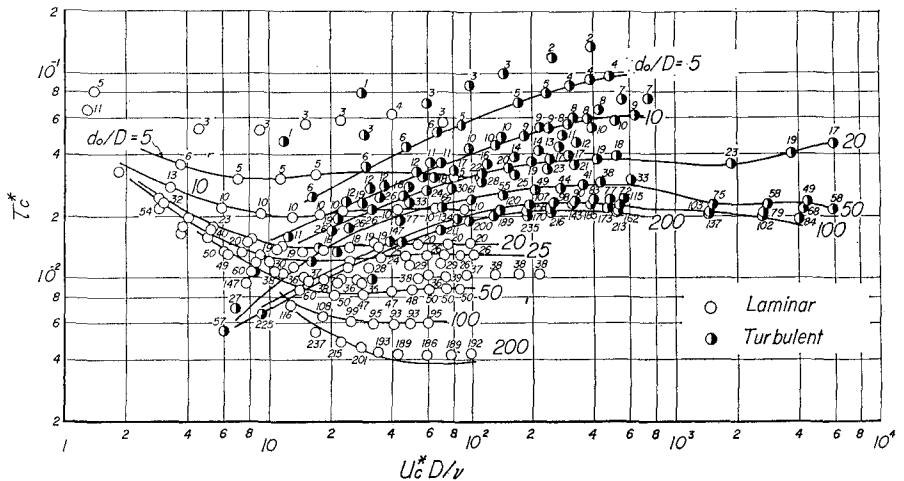


図-4 動的な漂砂の移動限界の理論曲線 (1)

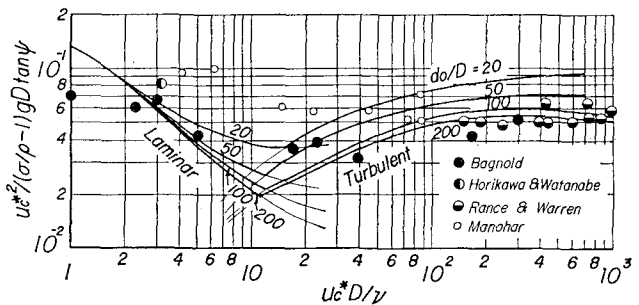


図-5 動的な漂砂の移動限界と実験値との比較

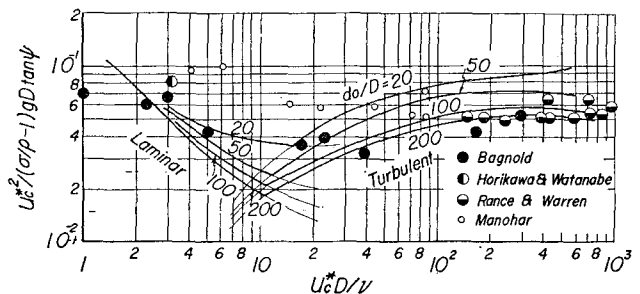


図-6 静的な漂砂の移動限界と実験値との比較

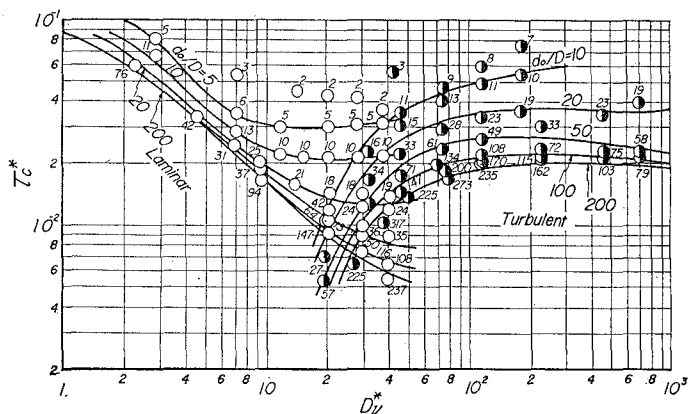
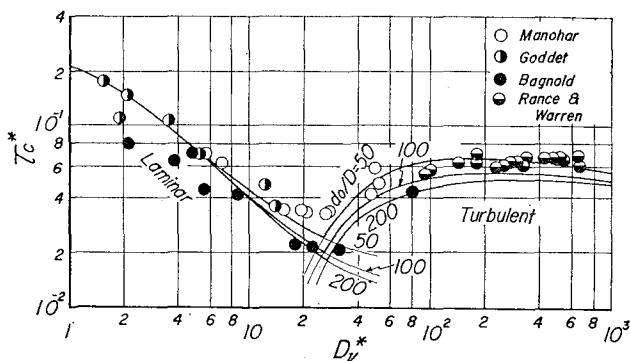
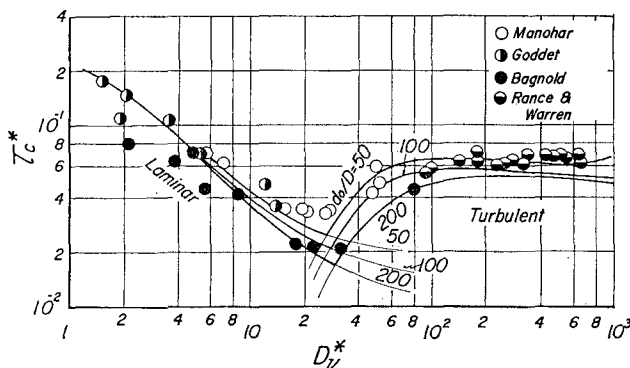


図-7 動的な漂砂の移動限界の理論曲線 (2)

図-8 Sleath が整理した実験値との比較 (1)
動的な漂砂の移動限界の場合図-9 Sleath が整理した実験値との比較 (2)
静的な漂砂の移動限界の場合

ている。

4. 結 語

以上、移動限界近傍における砂粒の挙動を rocking motion として取扱ひ、漂砂の移動限界が Mathieu 方程式系の非線形2階常微分方程式の安定解と不安定解の限界として定義できることを示し、漂砂の移動限界の理論を試みた。動的および静的な漂砂の移動限界について実験値と比較し、きわめてよい一致を確認することができた。しかし、境界層内における乱れ特性の導入や実験式の表示などに残された点も少なくない。

なお、本研究は文部省科学研究費一般研究(A)(No. 542044) によったことを明記する。

参 考 文 献

- 1) Komar, P. D. and M. C. Miller: Sediment threshold under oscillatory waves, Proc. 14th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 756~775, 1974.
- 2) Larsen, L. H., R. W. Sternberg, N. C. Shi, M. A. H. Marsden and L. Thomas: Field investigations of the threshold of gain motion by ocean waves and currents, Marine Geology, 42, pp. 105~132, 1981.
- 3) Kajiura, K.: On the bottom friction in an oscillatory current, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, Vol. 42, No. 1, pp. 147~174, 1964.
- 4) Brevik, I.: Oscillatory rough turbulent boundary layer, Jour. ASCE, WW3, pp. 175~181, 1981.
- 5) Swart, D. H.: Predictive equations regarding coastal transports, Proc. 15th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 1131~1132, 1976.
- 6) 岩垣雄一: 限界掃流力に関する基礎的研究, (1) 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, pp. 1~21, 1956.
- 7) Sleath, J. F. A.: Measurements of bed load in oscillatory flow, Jour. ASCE, WW4, pp. 291~307, 1978.