

不規則波のスペクトルと波高周期分布の関係

渡 辺 晃*・川 原 俊 郎**

1. はじめに

不規則波の表現や取扱いは、周波数スペクトルによる方法と、ゼロクロス波高周期分布あるいはそれより求める代表波による方法とに大別できる。両者を直接関連づける研究は過去において余りなされておらず、スペクトルの積分値である総エネルギーと代表波高の関係や、スペクトル帯域幅パラメータを含む波高周期結合分布式などが理論的に導かれてはいるものの、例えば後者の結合分布式は実際現象を十分に説明できるものではない。

本研究では、数値シミュレーションによる波形データを用いて、両者の関係をより詳細に明らかにすることを目的としている。なお本論文では、方向スペクトルや波の非線形性の効果は考慮していない。

2. 狭帯域スペクトルの不規則波の理論

不規則波の波高や周期の確率分布については、これまでRice¹⁾やLonguet-Higgins^{2),3)}などにより狭帯域スペクトルの仮定のもとでの研究がなされている。主な結果を略述する。

一連の不規則波群の平均波高を $\bar{H}$ 、平均周期を $\bar{T}$ とすれば、波高比 $x=H/\bar{H}$ と周期比 $\tau=T/\bar{T}$ の結合分布 $p(x, \tau)$ は次式で表わされる。

$$p(x, \tau) = \frac{\pi x^2}{4\nu} \exp\left\{-\frac{\pi x^2}{4}\left[1 + \frac{(\tau-1)^2}{\nu^2}\right]\right\} \dots (1)$$

ただし、 ν は次式で定義されるスペクトル帯域幅である。

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \mu_2}{\mu_1}\right)^2 - 1}, \quad \mu_k = \int_0^\infty S(f) f^k df \dots (2)$$

ここで $S(f)$ は周波数スペクトル。この分布は $\tau=1$ について対称であり、 x と τ の相関は0である。

上式より、波高比と周期比の確率分布はそれぞれ、

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau) d\tau = \frac{\pi x^2}{2} \exp\left(-\frac{\pi x^2}{4}\right) \dots (3)$$

$$p(\tau) = \int_0^\infty p(x, \tau) dx = \frac{\nu^2}{2[\nu^2 + (\tau-1)^2]^{3/2}} \dots (4)$$

となり、ある周期比 τ をもつ波の波高比の分布は、

$$p(x|\tau) = \frac{p(x, \tau)}{p(\tau)} = A x^2 \exp(-B x^2) \dots (5)$$

$$A = \frac{\pi[\nu^2 + (\tau-1)^2]^{3/2}}{2\nu^3}, \quad B = \frac{\pi[\nu^2 + (\tau-1)^2]}{4\nu^2} \dots (6)$$

で与えられる。

さてここで、周期別の成分波平均波高を考える。ある周期比 τ を有する成分波の平均波高を $H_m(\tau)$ 、その波高比を $x_m(\tau) = H_m(\tau)/\bar{H}$ と表わせば、式(5)より、

$$x_m(\tau) = \int_0^\infty x p(x|\tau) dx = \frac{4\nu}{\pi[\nu^2 + (\tau-1)^2]^{1/2}} \dots (7)$$

を得る。新たな変量 x_f を次式で定義する。

$$x_f = \frac{H}{H_m(\tau)} = \frac{H}{\bar{H}} \cdot \frac{\bar{H}}{H_m(\tau)} = \frac{x}{x_m(\tau)} \dots (8)$$

この x_f によって周期別の波高分布を表示すると、次式のように τ を含まない関係式が得られる。

$$p(x_f|\tau) = p(x|\tau) \frac{dx}{dx_f} = \frac{32}{\pi^2} x_f^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} x_f^2\right) \dots (9)$$

更にその超過確率は次式で与えられる。

$$P_H(x_f|\tau) = \int_{x_f}^\infty p(x_f|\tau) d\tau = 1 + \frac{4}{\pi} x_f \exp\left(-\frac{4}{\pi} x_f^2\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} x_f\right) \dots (10)$$

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-t^2} dt \dots (11)$$

これらは狭帯域スペクトルの仮定のもとに導かれた関係であり、以下では数値シミュレーションによる波形データを用いてこれらの関係の適合性を吟味する。

3. 波高分布と周期分布

(1) 不規則波形データ

ここでは次式で表現しうる周波数スペクトルを有する不規則波を対象とする。

$$S(f) = \sum_{i=1}^{N_p} S_{pi} \left(\frac{f}{f_{pi}}\right)^{-m_i} \cdot \exp\left\{\frac{m_i}{n_i} \left[1 - \left(\frac{f}{f_{pi}}\right)^{-n_i}\right]\right\} \dots (12)$$

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木学科

** 学生会員 東京大学大学院 工学系研究科

表-1 各ケースの不規則波のスペクトルと統計量

Case	N_p	(m_i, n_i)	(S_{pi}, f_{pi})	ν	N_w	$r(H, T)$	$\bar{H}$	$\bar{T}$	$H_{1/3}$	$T_{1/3}$
1	1	(5, 4)	(1.0, 1.0)	0.425	695	0.634	2.02	0.717	3.17	0.864
2	1	(4, 2)	(1.0, 1.0)	0.756	880	0.754	2.59	0.567	3.92	0.788
3	1	(10, 8)	(1.0, 1.0)	0.162	554	0.324	1.42	0.900	2.20	0.924
4	2	(5, 4), (5, 4)	(1.0, 1.0), (1.0, 2.0)	0.524	1178	0.652	3.42	0.424	5.24	0.544

ただし, N_p : スペクトルのピーク数, S_{pi} : ピークスペクトル密度, f_{pi} : ピーク周波数, m_i, n_i : スペクトルの形状係数. 通常の風波に対しては $N_p=1, m_i=5, n_i=4$ が適合するといわれているが, 本研究では基礎的な課題を扱っているので, より広範な条件での検討を行うために, 表-1 に示す4ケースのスペクトルを選んで解析を行うことにした. Case 1 は Bretschneider・光易型あるいは Pierson-Moskowitz 型スペクトルに相当し, Case 2 と 3 はそれぞれ Case 1 よりスペクトル帯域が広い場合と狭い場合, Case 4 は双峰型スペクトルである. 図-1 には各スペクトル形状を示してある. なお本研究での議論には, エネルギー密度や波高, あるいは周波数や周期の絶対値は本質的ではなく, それらの表記には任意の単位を用いてかまわないので, 単位は付していない.

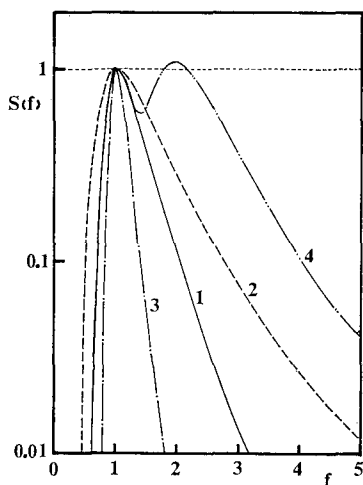


図-1 各ケースのスペクトル形状

各ケースのスペクトルを有する不規則波の波形データは数値フィルタ法⁴⁾により作成した. 各ケースとも波形データの時間間隔を $\Delta t=0.5$ とし, 10 000 ケの時系列データを得た. 得られた波形データに更にゼロクロス法を適用し, 一連の波高・周期データに変換して以下の解析に用いた. 表-1 には, スペクトル帯域幅 ν , ゼロクロス成分波の総数 N_w , 波高周期相関係数 $r(H, T)$, 平均波の波高 $\bar{H}$ と周期 $\bar{T}$, 有義波の波高 $H_{1/3}$ と周期 $T_{1/3}$

等の値も示してある.

(2) 周波数別平均波高と波高分布

波高・周期のデータを用い, $f \pm 0.1$ の周波数帯に含まれる波の平均値をもって周波数別平均波高 $H_m(f)$ を求めた. これを図示したのが 図-2 (a)~(d) である. Longuet-Higgins の理論式 (7) による値も実線で示されているが, 周波数帯域の狭い Case 3 を除いては, 理論曲線の適合度が極めて悪いことがわかる.

さて, $H_m^2(f)$ は周波数 f の近傍の成分波エネルギーの一つの代表値と見なしうる. ($\overline{H^2(f)}$ の方が妥当であろうが.) 厳密には全周波数域の成分波からの寄与がある筈であるが, 最も寄与が大きいのは周波数 f の成分

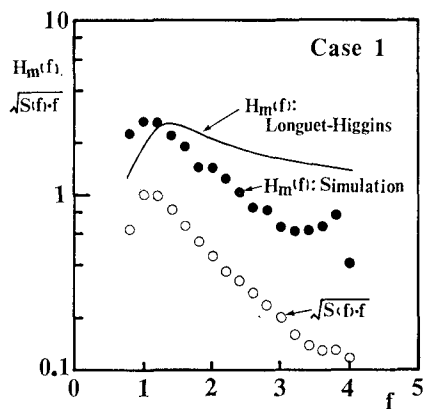


図-2 (a) 周波数別平均波高 (Case 1)

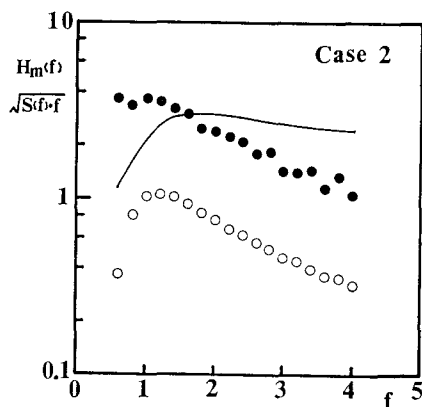


図-2 (b) 周波数別平均波高 (Case 2)

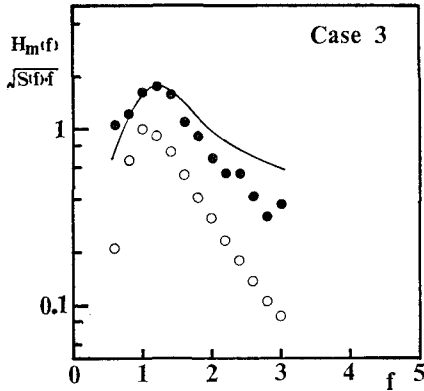


図-2 (c) 周波数別平均波高 (Case 3)

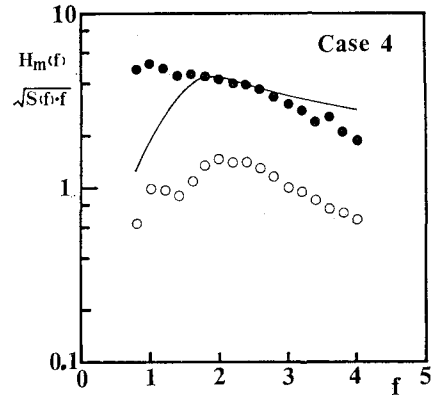


図-2 (d) 周波数別平均波高 (Case 4)

波であり、倍周波数成分相互の影響を無視すれば、周波数がずれるに従いその寄与は小さくなるものと考えられる。更に各周波数帯毎の波形構造の相似性を仮定すれば、 $H_m^2(f)$ の決定に有意な寄与をする周波数帯域の幅 Δf は f に比例すると考えられ、次の関係が予想される。

$$H_m^2(f) \propto \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} S(f) df \propto S(f)f \quad \dots\dots\dots (13)$$

図-2 には、各周波数 f のスペクトル密度 $S(f)$ より求めた $\sqrt{S(f)f}$ の値も示してある。各ケースとも、エネルギー密度の小さい高周波域あるいは低周波域を除いては、式 (13) すなわち $H_m(f) \propto \sqrt{S(f)f}$ の関係がほぼ成立することが認められる。

次に周波数別波高分布を調べる。図-3 (a) ~ (d) はシミュレーションデータより求めた周波数別波高分布を $x_f = H/H_m(f)$ の超過確率 P_H の形で表示したものであ

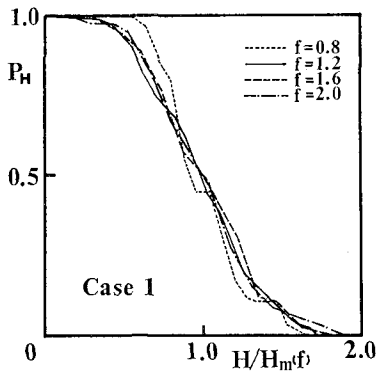


図-3 (a) 周波数別波高超過確率 (Case 1)

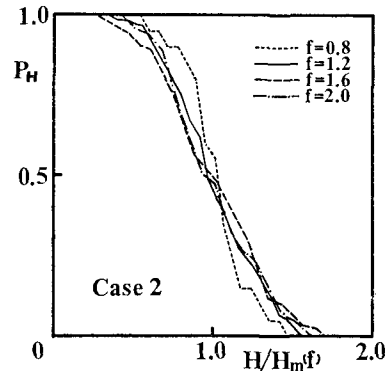


図-3 (b) 周波数別波高超過確率 (Case 2)

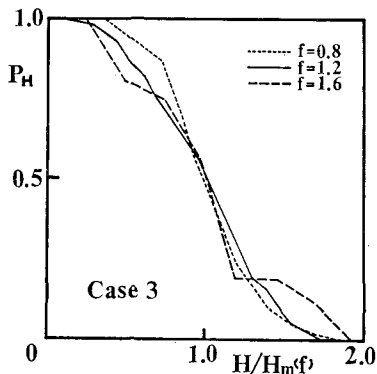


図-3 (c) 周波数別波高超過確率 (Case 3)

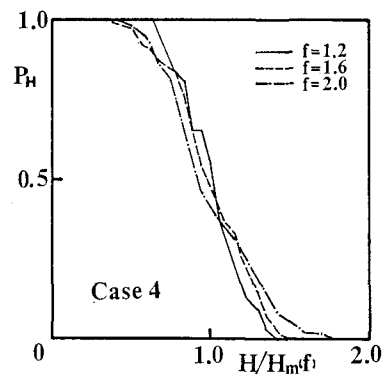


図-3 (d) 周波数別波高超過確率 (Case 4)

る。各周波数帯に入る波の数が余り多くないこともあり十分な精度を得ることができなかったが、各ケース共に式(10)の関係をほぼ満足しているようである。式(10)より更に精度の良い式を得るためには、もっとデータを増して詳細に検討する必要がある。

(3) 周期分布

式(4)で与えられる周期分布 $p(\tau)$ は $\tau < 0$ でも正の値をとり、 $\tau \geq 0$ の範囲の積分値は、

$$\int_0^{\infty} p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} \right) < 1 \quad \text{.....(14)}$$

となってしまう。そこで、 $\int_0^{\infty} p(\tau) d\tau = 1$ を満たし、狭帯域なら式(4)の $p(\tau)$ と一致するよう次式を導いた。

$$p(\tau) = \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{1+\sqrt{1+\nu^2}} \cdot \frac{\nu^2}{[\nu^2 + (\tau-1)^2]^{3/2}} \quad \text{.....(15)}$$

図-4は周波数帯域幅がかなり広い Case 2 ($\nu=0.756$) に対する周期分布を、式(4)および式(15)と比較したものである。式(15)の方が式(4)よりも若干適合度が良くなっているが両者の差は小さく、理論的考察に基づく改良が更に必要であろう。

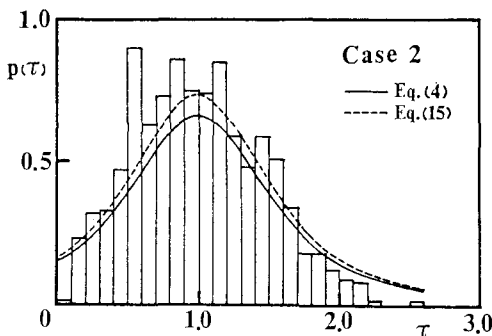


図-4 周期分布 (Case 2)

4. 波高・周期結合分布

さて以上の結果をふまえて波高周期結合分布 $p(x, \tau)$ の式を新たに導くことにする。 $p(x, \tau)$ を式(5), (9)により次式のように表現する。

$$p(x, \tau) = p(\tau) p(x_f | \tau) / x_m(\tau) \quad \text{.....(16)}$$

上述の検討により、この式右辺中の周期分布 $p(\tau)$ については式(15)、周辺数別波高分布 $p(x_f | \tau)$ については式(9)を近似的に用いることができるが、 $x_m(\tau)$ に対する式(7)の適合度は極めて悪いことがわかった。そこで $x_m(\tau)$ については式(7)に代えて式(13)の関係をを用いて次のように書き表わす。

$$x_m(\tau) = H_m(\tau) / \bar{H} = \alpha \sqrt{S(f)} \bar{f} / \bar{H} \quad \text{.....(17)}$$

比例定数 α の値は、 $x_m(\tau)$ が $\int_0^{\infty} x_m(\tau) p(\tau) d\tau = 1$ なる関係を満たさなければならないことを用いれば、

$$\alpha = \bar{H} / \int_0^{\infty} \sqrt{S(f)} \bar{f} \cdot p(\tau) d\tau \quad \text{.....(18)}$$

で評価できる。種々の不規則波に対し、上式で求めた α とスペクトル帯域幅 ν の関係を図示したのが図-5である。 ν が増加するにつれて周辺周波数域からの寄与が増加するので α の値も増加することがわかる。

結局、波高周期結合分布 $p(x, \tau)$ は、式(16)右辺の各項を式(15), (9), (17), (18)で算定することによって評価できることになる。

図-6~9は、Case 1~4の不規則波に対する波高周期結合分布を図示したものである。それぞれ(a)は数値シミュレーション波形データの直接解析結果、(b)は新たに導いた上記の方法、(c)はLonguet-Higginsの式(1)により求めたものである。Longuet-Higginsの式は、狭

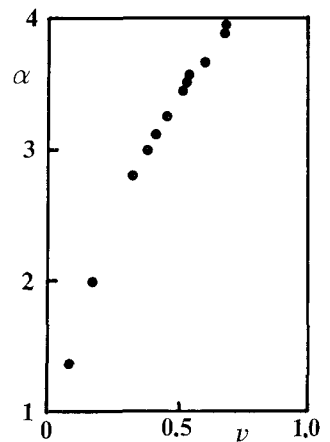


図-5 α と ν の関係

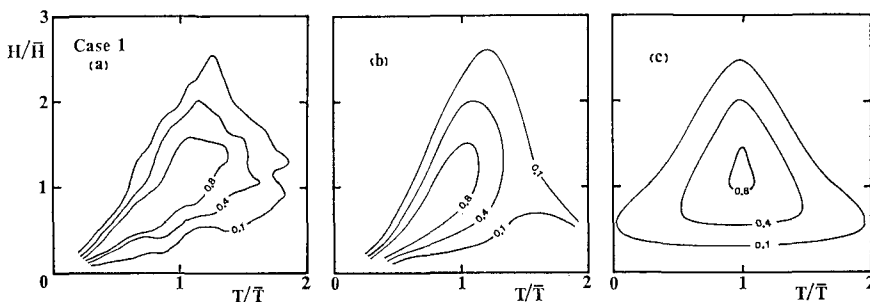


図-6 波高周期結合分布 (Case 1)

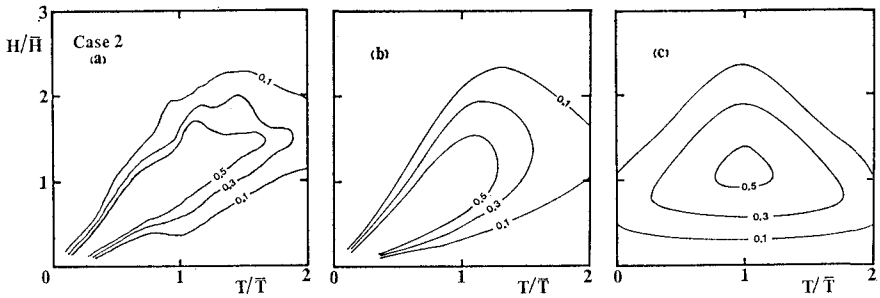


図-7 波高周期結合分布 (Case 2)

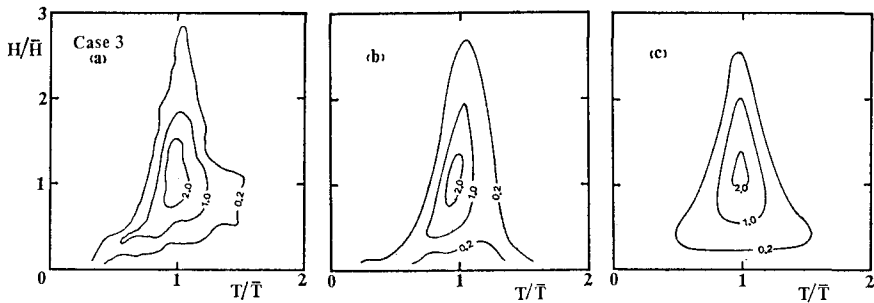


図-8 波高周期結合分布 (Case 3)

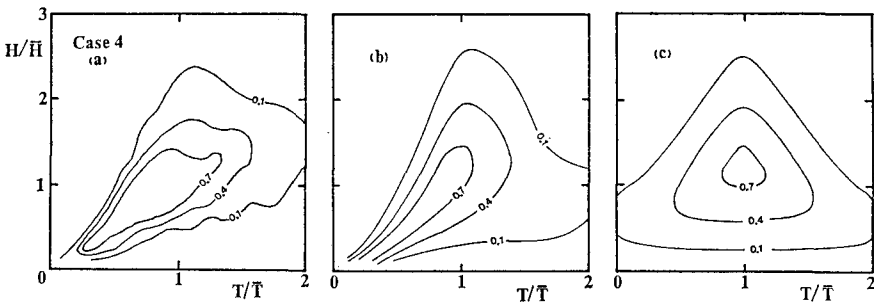


図-9 波高周期結合分布 (Case 4)

帯域である Case 3 を除いては適合度がよくない。ここで提案した方法は計算はやや面倒になるものの、波高と周期の相関に起因して短周期域で分布形がすそをひく傾向や大きな波高の波の周期が平均周期よりも長くなる傾向などをよく表現できることがわかる。

5. おわりに

不規則波形のシミュレーションデータを用いて、周波数スペクトルと波高・周期分布の関係を検討してみた。その結果、周波数別平均波高 $H_m(f)$ が周波数 f でのスペクトル密度 $S(f)$ に対して $H_m(f) \propto \sqrt{S(f) \cdot f}$ の関係をもつことがわかった。周期分布や波高周期結合分布についても、従来の狭帯域スペクトル理論によるものよりも精度のよい評価法を見出した。しかしながら、いずれについても考察はまだ不十分であり更に改良の余地があ

る。今後更に検討を重ね、より高精度で実用的な手法を確立したい。なお、本研究では不規則な水の波を念頭にはおいたが、得られた結果は乱流やノイズなど一般の不規則現象にも応用が可能であろう。

参考文献

- 1) Rice, S. O.: Mathematical analysis of random noise, 1944; reprinted in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Pub., Inc., pp. 133~294, 1954.
- 2) Longuet-Higgins, M. S.: On the statistical distributions of sea waves, Jour. Marine Res., Vol. XI, No. 3, pp. 245~265, 1952.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: The statistical analysis of a random, moving surface, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A(966), 249, pp. 321~387, 1957.
- 4) 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, pp. 145~147, 1977.