

# 浅海長波方程式の有限要素法解析における 問題点とその解決法

高 梨 和 光\*・清 川 哲 志\*\*

## 1. はじめに

浅海長波方程式は津波解析、港内静穏度解析、また最近では海浜変形解析に応用されている。一般に、この方程式を解くのに差分法が用いられているが、境界形状が複雑な実際の地形に対しては有限要素法が有利であると考えられる。しかし、有限要素法による浅海長波方程式の解析は膨大な計算時間を要することと解析上の数値的な減衰、いわゆる人工粘性を生じることによって、現在は実用段階に至っていないものと考えられる。

本研究の目的は浅海長波方程式の実用的な有限要素解析法を提案し、その妥当性について基本的な検討を行うことにある。このため、従来の有限要素法による浅海長波方程式の解法において重大な問題となっている数値的な減衰について理論的検討を行い、これに基づく数値的な減衰を理論上完全に排除した定式化を行う。そして、安定性および解の精度の検討を行う。さらに、水深の変化や水路幅の変化による波の変形について理論解と比較し、十分実用に耐えうる解析が行えることを明らかにする。

## 2. 有限要素法による解析上の問題点と解決法

ここでは微小振幅波を対象にして浅海長波方程式を考えることにする。このとき、浅海長波方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\eta$  は水位上昇量、 $u$ 、 $v$  は断面平均流速、 $h$  は水深、 $g$  は重力加速度である。

一般に、浅海長波方程式を有限要素法によって解く場合、空間方向の離散化に重み付き残差法が用いられ、時間方向へは時間積分法による離散化が行なわれる。(1)

式、(2) 式と (3) 式の重み付き残差方程式は次のようになる。

$$\int_V \eta^* \frac{\partial \eta}{\partial t} dV + \int_V \eta^* \frac{\partial}{\partial x}(hu) dV + \int_V \eta^* \frac{\partial}{\partial y}(hv) dV = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\int_V u^* \frac{\partial u}{\partial t} dV + g \int_V u^* \frac{\partial \eta}{\partial x} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\int_V v^* \frac{\partial v}{\partial t} dV + g \int_V v^* \frac{\partial \eta}{\partial y} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\eta^*$  は仮想水位上昇量、 $u^*$ 、 $v^*$  は仮想断面平均流速である。さらに、(4) 式、(5) 式と (6) 式の重み付き残差方程式に内挿補間関数を用いて離散化を行う。このとき、水位上昇量、断面平均流速と水深に 1 次多項式を用いる。仮想水位上昇量と仮想断面平均流速についても同様に取り扱う。離散化された方程式をマトリクスを用いて表わすと次のようになる。

$$[M]\{\phi\}_{t+\Delta t} + [K]\{\phi\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $[M]$  は質量行列、 $[K]$  は剛性行列と呼ばれ、 $\{\phi\}$  は水位上昇量と断面平均流速によるベクトルである。ここでは、境界条件として自然境界条件を考慮していないので、部分積分によって生じる荷重項はない。重み付き残差法による離散化は差分法による離散化と異なり、左辺第 1 項に質量行列  $[M]$  が作用する。このために、時間方向への離散化に関して適合性や安定性などの問題が生じる。さらに、方程式を解くのに連立 1 次方程式を解かなければならないので、解析を行うのに膨大な計算時間を要することになる。

有限要素法を用いて浅海長波方程式を効率良く解く試みは、川原・竹内・首藤<sup>1)</sup>によって行なわれた。彼らは安定性を考慮して、時間積分法に 2 段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いた。(7) 式に 2 段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いると次のようになる。

$$[M]\{\phi\}^{n+1/2} = [M]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[K]\{\phi\}^n \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$[M]\{\phi\}^{n+1} = [M]\{\phi\}^n - \Delta t[K]\{\phi\}^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\Delta t$  は時間刻みである。また、肩付添字  $n$  は時間ステップを表わす。さらに、高速計算を行うために、(8) 式と (9) 式の左辺の質量行列の集中化を行なった。

\* 正会員 工修 清水建設(株) 大崎研究室

\*\* 正会員 清水建設(株) 大崎研究室

集中化は非対角項の成分を対角項に集めることによって行われ、集中化された行列の成分は次のようになる。

$$M_{ij} = \sum m_{ij} \quad (i=j) \dots\dots\dots (10)$$

$$M_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $m_{ij}$  は質量行列の成分、 $M_{ij}$  は集中化された質量行列の成分である。質量行列は集中化することによって対角行列になる。したがって、左辺の質量行列の集中化を行うことによって、連立1次方程式を解く必要がなくなるので、高速計算が可能になる。左辺の質量行列の集中化を行うと、(8) 式と (9) 式は次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1/2} = [M]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[K]\{\phi\}^n \dots\dots (12)$$

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1} = [M]\{\phi\}^n - \Delta t[K]\{\phi\}^{n+1/2} \dots\dots (13)$$

ここで、 $[\bar{M}]$  は集中化された質量行列である。しかし、(12) 式と (13) 式を用いることによって、高速計算が可能になったものの、数値的な減衰が生じるという実用上の問題を残した。これに対し、川原<sup>2)</sup>は数値的な減衰を取り除くために、(12) 式と (13) 式の右辺の質量行列を整合質量行列  $[M]$  と集中質量行列  $[\bar{M}]$  を混合した行列に置き換えている。川原によって提案された改良2段階ラックス・ヴェンドロフ法は次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1/2} = [\tilde{M}]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[K]\{\phi\}^n \dots\dots (14)$$

$$[\tilde{M}]\{\phi\}^{n+1} = [\tilde{M}]\{\phi\}^n - \Delta t[K]\{\phi\}^{n+1/2} \dots\dots (15)$$

ここで、 $[\tilde{M}]$  は混合行列で、 $[M]$  と  $[\bar{M}]$  の重み付き平均で次のように定義される。

$$[\tilde{M}] = \theta[\bar{M}] + (1-\theta)[M] \dots\dots\dots (16)$$

川原は重み  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) を混合比と呼び、 $\theta$  の値が 0.7 ~ 0.9 を用いる場合に良い結果が得られ、1 を用いる場合には計算が不安定になると言っている。そして、 $\theta = 0.8$  を用いて解析を行なっている。このとき、 $\theta$  の値に 0 を用いると川原・竹内・首藤の方法になる。これによって、数値的な減衰はかなり減ったものの、十分に取り除くことはできなかった。図-1 は水深 10m、水路幅 2m、水路長 100m の 1次元水路の要素分割図である。

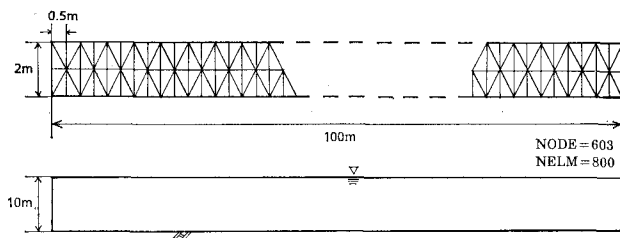


図-1 1次元水路の要素分割図

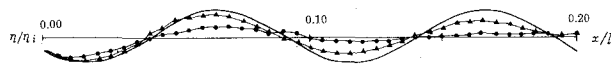


図-2 数値的な減衰がある波の伝播

図-2 はこの水路を用い、川原・竹内・首藤の方法、および川原の方法で波長 10m の波を伝播させ、9 秒後の波形を入口から 2 波長分だけ取り出して理論解と比較したものである。丸印が川原・竹内・首藤の方法、三角印が川原の方法、実線が理論解である。川原・竹内・首藤の方法は数値的な減衰によって波が伝わらない。川原の方法でも波は減衰しながら伝播している。

### (1) 数値的な減衰が生じている原因

このように、数値的な減衰が生じている原因は重み付き残差法を用いた弱形式による定式化であると考えられる。そこで、水深を一定とした 1 次元問題を考え、数値的な減衰が生じている原因が弱形式による定式化であることを明らかにする。(4) 式、(5) 式と (6) 式を 1 次要素を用いて離散化すると次のような漸化式が得られる。

$$(1/6)(\eta_{j-1} + 4\eta_j + \eta_{j+1}), t \\ + (h/2\Delta x)(-u_{j-1} + u_{j+1}) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$(1/6)(u_{j-1} + 4u_j + u_{j+1}), t \\ + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1} + \eta_{j+1}) = 0 \dots\dots\dots (18)$$

このとき、(17) 式と (18) 式は次のように変形することができる。

$$\eta_{j,t} + (h/2\Delta x)(-u_{j-1} + u_{j+1}) \\ + (1/6)(\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}), t = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$u_{j,t} + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1} + \eta_{j+1}) \\ + (1/6)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), t = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここで次の関係式を用いている。

$$\eta_{j-1} + 4\eta_j + \eta_{j+1} = 6\eta_j + (\eta_{j-1} - 2\eta_j + \eta_{j+1}) \dots\dots (21)$$

$$u_{j-1} + 4u_j + u_{j+1} = 6u_j + (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) \\ \dots\dots\dots (22)$$

このとき、(19) 式と (20) 式において、 $\Delta x$  を 0 に近づけると、(0 にはならない) 次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $\Delta x$  は要素幅である。このように、有限要素近似で得られた漸化式には (23) 式と (24) 式の第 3 項のような本来の微分方程式系にはなかった水位勾配や流速勾配の空間および時間変化率に相当する項が付け加わっている。このように、本来の微分方程式系にはなかった項が付加されたのは、有限要素近似が差分近似のような強い近似ではなく、重み付き残差法に基づく弱形式による弱い近似であることによると考えられる。そして、この付加された項が数値的な減衰をもたらしているものと考えられる。(23) 式と (24) 式に付加した項を取り除くには次のように変形すれば良い。

$$\eta_{j,t} + (h/2\Delta x)(-u_{j-1} + u_{j+1}) = 0 \dots\dots (25)$$

$$u_{j,t} + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1} + \eta_{j+1}) = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

このとき、次のように式を置き換えている。これは、質量行列の集中化と同じものである。

$$\eta_{j-1} + 4\eta_j + \eta_{j+1} \Rightarrow 6\eta_j \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$u_{j-1} + 4u_j + u_{j+1} \Rightarrow 6u_j \quad \dots\dots\dots(28)$$

このように、質量行列の集中化は高速計算を行うために振動問題とのアナロジーにより導入されたものであるが、実は同時に有限要素近似を強い近似に変更する機能を持つことが明らかになった。したがって、(7)式は次のように変更することによって、数値的な減衰を完全に取り除くことができる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}_{,t} + [K]\{\phi\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(29)$$

## (2) 数値的な減衰を取り除いた時間積分法

時間積分法として、2段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いて、(29)式を時間方向へ離散化を行うと次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1/2} = [\bar{M}]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[K]\{\phi\}^n \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1} = [\bar{M}]\{\phi\}^n - \Delta t[K]\{\phi\}^{n+1/2} \quad \dots\dots\dots(31)$$

これは、(14)式と(15)式における混合行列 $[\bar{M}]$ の計算式(16)で、 $\theta$ を1にした場合に他ならない。このようにした得られたスキームが安定であることは次節で明らかにする。

次に時間積分法によって、従来提案されているスキームにどのような項が付加しているかを前節と同様に漸化式を用いて検討する。川原・竹内・首藤の方法は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{6}c\Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6}c\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(33)$$

川原の方法は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{6}(1-\theta)c\Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6}(1-\theta)c\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

このとき、次の関係式を用いた。

$$\Delta t = (1/c)\Delta x \quad \dots\dots\dots(36)$$

ここで、 $c$ は後に示すように安定性の条件を満足するように時間刻みと要素幅から設定することができる定数である。(33)式あるいは(35)式の第3項は形式上ナビエ・ストークス方程式の粘性項に対応している。この項の存在が波の伝播に伴う波高の数値的な減衰をもたらしていると考えられる。そして、川原の方法で $\theta$ の値に0.8を用いたということは、見かけ上の粘性係数を川原・竹内・首藤の方法に比べて80%小さい値を用いたという

ことに相当しており、このために数値的な減衰が改善されたのである。それでも数値的な減衰が完全に取り除かれたわけではなく、(34)式と(35)式から明らかなように、 $\theta$ の値に1を用いることによって付加された粘性項を完全に取り除くことができるのである。

## (3) 改良された時間積分法の安定性

(30)式と(31)式のスキームを用いて得られた漸化式の安定性についての検討を行う。スキームの安定性に関してはフォン・ノイマンの方法を用いる<sup>3)</sup>。これから次の安定条件が得られる。

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{1}{\sqrt{gh}} \Delta x \quad \dots\dots\dots(37)$$

この条件を満たして解析を行なわなければならない。

## 3. 数値計算例による検討

### (1) 波の伝播特性

改良された時間積分法を用いた有限要素法による波の伝播特性の検討を行う。図-1の1次元水路を用い、出口の部分に進行波の条件を与えて波が透過するようにして解析を行なった。図-3は波を伝播させ、その水位上

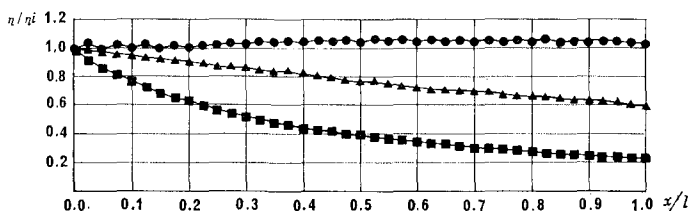


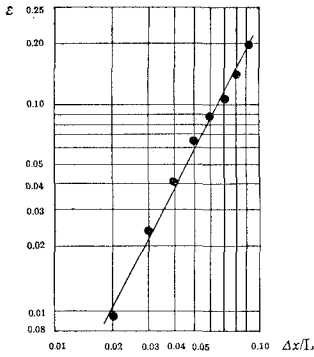
図-3 波の伝播特性

昇量の最大値を表わしたものである。丸印が本解析法、四角印が川原・竹内・首藤の方法、三角印が川原の方法によるものである。実用上、要素幅は有限になるので、川原・竹内・首藤の方法や川原の方法には形式的に粘性項を離散化した項が付け加わっている。このために、波が減衰した結果が得られる。本解析法では数値的な減衰を完全に取り除いたので波の減衰は見られない。ただし、出口で計算誤差による波の反射が見られる。出口での計算誤差による水位上昇量の増加は入射した波の波長を $L$ として、 $\Delta x/L$ が0.05の場合に10%、 $\Delta x/L$ が0.02の場合で5%程度である。

### (2) 要素分割と解の精度

数値計算を行う場合、要素分割を適切に採らないと計算結果として正しい結果が得られない。図-4は図-1の1次元水路に波を入れ、その第10番目に入れた波の波形を理論解と比較したものである。このとき、縦軸の計算誤差 $\epsilon$ は次のように設定した。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum((\eta - \bar{\eta})/\eta_i)^2}{n}} \quad \dots\dots\dots(38)$$

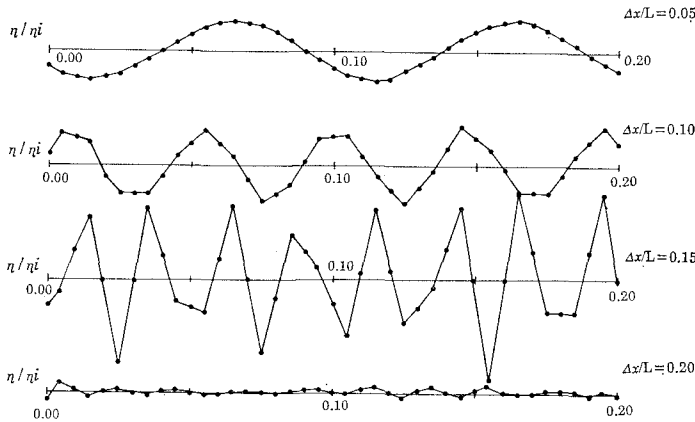


図—4 要素分割と解の精度

ここで、 $\eta$  は各点の水位上昇量、 $\bar{\eta}$  は各点での水位上昇量の理論値、 $\eta_i$  は入口での波の振幅、 $n$  は1波長に含まれる節点数である。横軸  $\Delta x/L$  は単位波長に対する要素幅である。黒丸は計算結果で、実線は計算結果に基づいて決定したものである。計算誤差  $\epsilon$  は  $\Delta x/L$  が 0.05 の場合に 7%、 $\Delta x/L$  が 0.02 の場合で 1% の値である。したがって、解析を行う場合、実用上  $\Delta x/L$  が 0.05 以下、すなわち、1 波長を 20 分割以上する必要がある。また、要素分割と計算誤差との間には次の関係があることがわかる。

$$\epsilon \propto (\Delta x/L)^2 \quad (39)$$

これは、離散化誤差がほぼ波長に対する相対的な要素面積の 2 乗に比例することを表わしている。図—5 は  $\Delta x/L$

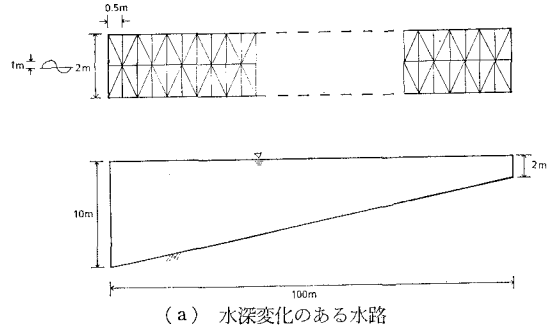


図—5 要素分割と波の伝播

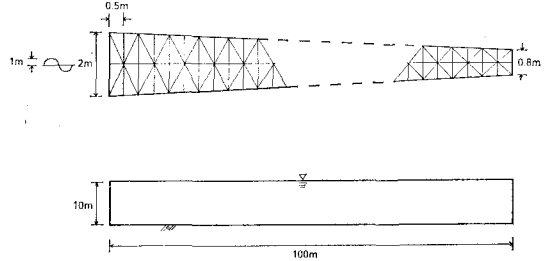
を 0.05, 0.10, 0.15 と 0.20 として波を伝播させ、時刻 9 秒での波形を入口から水路長  $l$  の 1/5 まで表わしたものである。このように、 $\Delta x/L$  の値を大きくすると計算誤差  $\epsilon$  が大きくなるだけでなく、波の形を保たなくなる。 $\Delta x/L$  が 0.10 の場合には波形が角々しくなり、 $\Delta x/L$  が 0.15 の場合には激しく振動する。さらに、 $\Delta x/L$  が 0.20 になると波が伝播しない。したがって、浅水域での波動の解析を行う場合、水深によって波長が変化するので特に単位波長に対する要素幅  $\Delta x/L$  の設定に注意しなければならない。

### (3) 漸変水路における波の変形

水深の変化や水路幅の変化によって波は変形する。このような波の変形をどの程度解析できるかを検討する。



(a) 水深変化のある水路

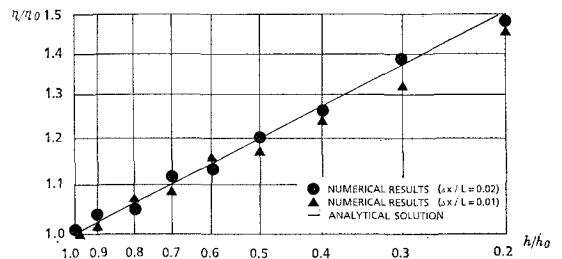


(b) 水路幅変化のある水路

図—6 漸変水路の要素分割図

図—6 (a) は水深の変化による波の変形の計算に用いた要素分割図である。図—6 (b) は水路幅の変化による波の変形の計算に用いた要素分割図である。図—7 は図—6 (a) の水路を用いて、水路の出口に進行波の条件を与え、入口から波を入れた場合の各点での水位上昇量の最大値を表わしたものである。ここで、 $h$  は水深、 $h_0$  は入口での水深、 $\eta$  は水位上昇量の最大値、 $\eta_0$  は入口での水位上昇量の最大値である。丸印は  $\Delta x/L$  が 0.02 の場合、三角印は  $\Delta x/L$  が 0.01 の場合の計算結果である。実線はグリーン公式<sup>4)</sup>による理論解である。実用的な範囲で良

く一致していると思われる。図—8 は図—6 (b) の水路を用いて、水路の出口に進行波の条件を与え、入口から波を入れた場合の各点での水位上昇量の最大値を表わしたものである。ここで、 $b$  は水路幅、 $b_0$  は入口での水路



図—7 水路幅変化による波の変形

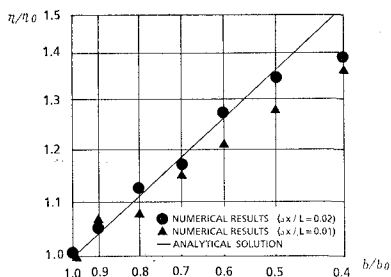


図-8 水深変化による波の変形

幅,  $\eta$  は水位上昇量の最大値,  $\eta_0$  は入口での水位上昇量の最大値である。丸印は  $\Delta x/L$  が 0.02 の場合, 三角印は  $\Delta x/L$  が 0.01 の場合の計算結果である。実線はグリーンの公式による理論解である。この場合も実用的な範囲で良く一致していることがわかる。出口付近で多少合っていないのは水路が細くなっているために反射が起きているものと思われる。

#### (4) 要素分割数と計算時間

本解析法は数値的な減衰を取り除くと同時に高速計算を行うために質量行列の集中化を行っている。図-1 の要素分割を用いて 900 回の計算を行うのに 196.75 秒 (M180-AD II) を要した。したがって, 1 節点当り 362 マイクロ秒になる。これは実用的な計算を行う範囲にあると思われる。

## 4. ま と め

(1) 従来の有限要素解析では形式上ナビエ・ストークス

方程式の粘性項に対応する項が付加され, この項の存在が波の伝播に伴う波高の数値的な減衰をもたらしていることを明らかにした。

(2) 高速計算を行うために導入された質量行列の集中化は有限要素近似を差分近似のように強い近似に変更する機能を持ち, 質量行列の集中化によって正しい解析が行えることを明らかにした。

(3) 数値的な減衰を生じないで高速計算が行える実用的な有限要素法を提案した。本解析法は本質的に不規則格子の差分法と等価であり, 複雑な境界形状に対応できる有限要素法の利点, 高速計算が可能な差分法の利点, 両方を同時に生かした解析法ということができる。

(4) 従来, 精度の問題などの基本的な問題についてほとんど検討されていなかったが, これを検討し, 本解析法が妥当な結果を与えることを明らかにした。

おわりに, 本研究を進めるにあたって清水建設(株)流体力学研究会のメンバー, 特に大山 巧氏との議論は有意義であった。ここに記して謝意を表するものである。

## 参 考 文 献

- 1) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫: 2段階ラックス・ヴェンドロフ有限要素法による潮流解析, 第23回海岸工学講演会論文集, 土木学会, pp. 498~501, 1976.
- 2) 鷗津久一郎 他: 有限要素法ハンドブック, II 応用編, 培風館, pp. 653~668, 1983.
- 3) 川原睦人: 逐次時間積分型有限要素法とその安定性について, 第24回海岸工学講演会論文集, 土木学会, pp. 30~34, 1977.
- 4) 堀川清司: 海岸工学, 東京大学出版会, 1979.