

する。また、解析の便宜上、流体域を図-1に示すように、港口 AB と、港口より任意の距離 d の位置に設けた仮想境界 CD ($y=d$) によって、領域 (I)、領域 (II)、領域 (III) に分け、各領域における ϕ を、それぞれ ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 と表わすこととする。

(1) 未知関数 ϕ_1 , ϕ_2 の表示

図-1 に示すように、($x \geq 0$) の部分の各境界について、領域 (I) の側壁を S_1 、領域 (II) の側壁を S_3 、港口を S_2 、仮想境界を S_4 と表わし、さらに、領域 (I) の境界線に対する内向き法線を n 、領域 (II) の境界線に対する外向き法線を ν とする。このとき、各領域の任意点 (x, y) における ϕ_1 および ϕ_2 は次式で表わす事ができる。

$$\phi_1(X) = \frac{i}{\alpha} \int_{S_1+S_2} \left\{ \phi_1(X_b) \frac{\partial}{\partial n} G(kr) - G(kr) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1(X_b) \right\} ds \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_2(X) = \frac{-i}{\alpha} \int_{S_2+S_3+S_4} \left\{ \phi_2(X_b) \frac{\partial}{\partial \nu} G(kr) - G(kr) \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_2(X_b) \right\} ds \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$G(kr) = H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(1)}(kr^*) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 X と X_b はそれぞれ領域の任意点 (x, y) と境界線上の点 (ξ, η) を意味し、 $H_0^{(1)}(kr)$ は 0 次の第 1 種ハンケル関数、 r は X と X_b 間の距離、 r^* は X_b の鏡像点 ($-\xi, \eta$) と X との距離、 α は X が境界線上にあるときは $\alpha=2$ 、領域内の点であるときは $\alpha=4$ を取る定数である。また積分方向は、領域 (I) では時計回り、領域 (II) では反時計回りに取るものとする。

(2) 仮想境界上の境界条件

本解析では、造波板からの再反射が模型に入射する以前の現象を対象としている。すなわち、理論上は無限遠方に造波板がある場合にあたり、従って、領域 (III) における関数 ϕ_3 は、入射波を表わす $\exp(iky)$ と模型からの反射波を表わす未知関数 $\varphi(x, y)$ の和で表わすことができる。

$$\phi_3(x, y) = \exp(iky) + \varphi(x, y) \quad \dots\dots\dots (7)$$

(2) 式より、 $\varphi(x, y)$ も次の Helmholtz の式を満足すべき関数である。

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$\varphi(x, y)$ が、 $\varphi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ と変数分離形で表わせるものと仮定し、(8) 式より得られる $X(x)$ および $Y(y)$ に関する 2 次の微分方程式を、側壁 ($x = \pm b$) での境界条件 $\partial X / \partial x = 0$ 、および $\varphi(x, y)$ は y の正方向への反射波を表わすという条件のもとで解いて次式を得る。

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \beta_n(y) \cos \frac{n\pi x}{b} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta_n(y) = \begin{cases} \exp \left\{ -iy \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \right\} & n=0, 1, \dots, n^* \\ \exp \left\{ -y \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2} \right\} & n=n^*+1, n^*+2, \dots \end{cases}$$

上式で、 c_n は定数で、 n^* は $k > (n\pi/b)$ なる整数 n のうちで最大の値を意味する。(9) 式は、 y 軸に関し波数 $\sqrt{k^2 - (n\pi/b)^2}$ ($n=0, 1, \dots, n^*$) の波のみが反射波として水槽内を造波板方向へ進行する事を示している。

仮想境界 S_4 において (9) 式は $\varphi(x, d)$ のフーリエ級数展開であって、係数 $c_n \beta_n(d)$ は次式で与えられる。

$$c_n \beta_n(d) = \frac{2\varepsilon}{b} \int_0^b \varphi(x, d) \cos \frac{n\pi x}{b} dx \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\varepsilon = 1/2 \quad (n=0), \quad = 1 \quad (n \neq 0)$$

従って (9), (10) 式より $\varphi(x, y)$ の形式解として次式を得る。

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n(y)}{\beta_n(d)} \left\{ \frac{2\varepsilon}{b} \int_0^b \varphi(s, d) \cos \frac{n\pi s}{b} ds \right\} \cdot \cos \frac{n\pi x}{b} \quad \dots\dots\dots (11)$$

仮想境界 S_4 上で流体運動の連続条件 ($\phi_2 = \phi_3$, $\partial \phi_2 / \partial y = \partial \phi_3 / \partial y$) が成り立つべき事より、(7), (11) 式を用いて、 ϕ_2 に関する S_4 上での境界条件として次式を得る。

$$\phi_2(\xi, d) = \exp(ikd) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2\varepsilon}{b} \int_0^b \varphi(s, d) \cos \frac{n\pi s}{b} ds \right\} \cdot \cos \frac{n\pi \xi}{b} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \phi_2(\xi, d)}{\partial \nu} = ik \exp(ikd) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha_n \frac{2\varepsilon}{b} \int_0^b \varphi(s, d) \cos \frac{n\pi s}{b} ds \right\} \cdot \cos \frac{n\pi \xi}{b} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、(13) 式で

$$\alpha_n = \begin{cases} -i \sqrt{k^2 - (n\pi/b)^2} & (n=0, 1, \dots, n^*) \\ -\sqrt{(n\pi/b)^2 - k^2} & (n=n^*+1, n^*+2, \dots) \end{cases}$$

(3) 側壁 S_1 , S_3 および港口 S_2 上の境界条件

完全反射側壁の条件より

$$\left. \begin{aligned} \partial \phi_1 / \partial n &= 0 & (S_1 \text{ 上で}) \\ \partial \phi_2 / \partial \nu &= 0 & (S_3 \text{ 上で}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

港口では、流体運動の連続条件より

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_3 \\ \partial \phi_1 / \partial n &= \partial \phi_2 / \partial \nu \end{aligned} \right\} (S_2 \text{ 上で}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

3. 数値計算法

本章では、 $\xi, \eta, \dots$ 等の変数は次のような無次元量を

表わすものとする。

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \xi/h, & \eta &\equiv \eta/h, & s &\equiv s/h, & b &\equiv b/h \\ \gamma &\equiv \gamma/h, & \lambda &\equiv kh, & \bar{\phi} &\equiv \bar{\phi}/\partial(\nu/h)\end{aligned}$$

(4), (5) 式を, 境界条件 (12), (13), (14), (15) のもとで解析的に解くのは困難であるため, 数値的に解く事になる。境界線 S_1, S_2, S_3, S_4 を, それぞれ N_1, N_2, N_3, N_4 の微小な要素 ΔS_j ($j=1\sim N_1, 1\sim N_2, 1\sim N_3, 1\sim N_4$) に分割するものとし, (3), (4) 式を, 任意点 X が境界線上にある場合について, 離散化して表わすと (16), (17) 式を得る³⁾。

$$\begin{aligned}\phi_1(i) = & - \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} + \sum_{j=1}^{N_2} \right\} \{ \bar{G}_{ij} \phi_1(j) - G_{ij} \bar{\phi}_1(j) \} \\ (i=1\sim N_1, 1\sim N_2) & \dots\dots\dots (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(i) = & \left\{ \sum_{j=1}^{N_2} + \sum_{j=1}^{N_3} + \sum_{j=1}^{N_4} \right\} \{ \bar{G}_{ij} \phi_2(j) - G_{ij} \bar{\phi}_2(j) \} \\ (i=1\sim N_2, 1\sim N_3, 1\sim N_4) & \dots\dots\dots (17)\end{aligned}$$

上式で, $\phi_1(j)$ は ΔS_j 要素の midpoint (ξ_j, η_j) における ϕ_1 の値を意味し, $\bar{\phi}_1(j), \phi_2(j), \dots$ 等も同様である。また $G_{ij}, \bar{G}_{ij}$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned}G_{ij} = & \left\{ -\frac{i}{2} \{ H_0^{(1)}(kr_{ij}) + H_0^{(1)}(kr_{ij}^*) \} \Delta S_j \right. \\ & \left. \frac{1}{\pi} \left\{ (\gamma-1) + \log \frac{\lambda \Delta S_i}{4} - \frac{i\pi}{2} \right\} \right. \\ & \left. -\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr_{ij}^*) \Delta S_j \right. \\ \bar{G}_{ij} = & \frac{i\lambda}{2} \left[H_0^{(1)}(\lambda r_{ij}) \frac{1}{r_{ij}} \{ (\xi_j - \xi_i) \Delta \eta_j \right. \\ & \left. - (\eta_j - \eta_i) \Delta \xi_j \} + H_0^{(1)}(\lambda r_{ij}^*) \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{r_{ij}^*} \{ (\xi_j + \xi_i) \Delta \eta_j - (\eta_j - \eta_i) \Delta \xi_j \} \right]\end{aligned}$$

ただし, $\gamma=0.5772156\dots$ (Euler の定数) で, r_{ij} は (ξ_i, η_i) と (ξ_j, η_j) 間の距離, r_{ij}^* は (ξ_i, η_i) と $(-\xi_j, \eta_j)$ 間の距離である。

(12), (13) 式における積分項を次式で近似すると

$$\int_0^b \varphi(s, d) \cos \frac{n\pi s}{b} ds \approx \sum_{p=1}^{N_4} \varphi(p) \cos \frac{n\pi \xi_p}{b} \Delta S_p \dots\dots\dots (20)$$

境界 S_4 上境界条件は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\phi_2(j) = & \exp(i\lambda d) + \sum_{p=1}^{N_4} \varphi(p) Q(p, j) \\ \bar{\phi}_2(j) = & i\lambda \exp(i\lambda d) + \sum_{p=1}^{N_4} \varphi(p) \bar{Q}(p, j) \\ (j=1\sim N_4) & \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

上式で, $\varphi(p)$ は, $\phi_1(j), \bar{\phi}_1(j), \dots$ と同様に, 要素 ΔS_p ($p=1\sim N_4$) 上の midpoint (ξ_p, η_p) における φ の値を意味し, $Q(p, j), \bar{Q}(p, j)$ は次式で与えられる。

$$Q(p, j) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_p \cos \frac{n\pi \xi_p}{b} \cos \frac{n\pi \xi_j}{b} \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}(p, j) = & \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{2\varepsilon}{b} \Delta S_p \cos \frac{n\pi \xi_p}{b} \cos \frac{n\pi \xi_j}{b} \dots\dots\dots (22) \\ (p=1\sim N_4, j=1\sim N_5) & \dots\dots\dots\end{aligned}$$

(16) 式に, (14), (15) 式を代入し, また (17) 式に (14), (21) 式を代入して (23), (24) 式を得る。

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^{N_1} (\bar{G}_{ij} + \delta_{ij}) \phi_1(j) \\ & + \sum_{j=1}^{N_2} \{ (\bar{G}_{ij} + \delta_{ij}) \phi_2(j) - G_{ij} \bar{\phi}_2(j) \} = 0 \\ (i=1\sim N_1, 1\sim N_2) & \dots\dots\dots (23) \\ & \sum_{j=1}^{N_2} \{ (\bar{G}_{ij} - \delta_{ij}) \phi_2(j) - G_{ij} \bar{\phi}_2(j) \} \\ & + \sum_{j=1}^{N_3} (\bar{G}_{ij} - \delta_{ij}) \phi_2(j) + \sum_{p=1}^{N_4} \left[\left\{ \sum_{j=1}^{N_4} \bar{G}_{ij} Q(p, j) \right. \right. \\ & \left. \left. - G_{ij} \bar{Q}(p, j) \right\} - \delta_{ip} \right] \varphi(p) \\ = & -\exp(i\lambda d) \sum_{j=1}^{N_4} \{ (\bar{G}_{ij} - \delta_{ij}) - i\lambda G_{ij} \} \\ (i=1\sim N_2, 1\sim N_3, 1\sim N_4) & \dots\dots\dots (24)\end{aligned}$$

上式で, δ_{ij} は (i) 点と (j) 点とがともに同一境界上の同じ点 ($i=j$) のとき 1, それ以外は 0 を取るものとし, δ_{ip} も同様である。

(23), (24) 式は, S_1 上の $\phi_1(j)$, S_2 上の $\phi_2(j)$ と $\bar{\phi}_2(j)$, S_3 上の $\phi_2(j)$, および S_4 上の $\varphi(p)$ を未知数とする複素係数連立一次方程式を与える。したがって, (23), (24) 式を連立して解いて $\phi_1(j), \phi_2(j), \dots$ 等が求まれば, 湾内の側壁上の波高増幅率は (3) 式より $|\phi_1(j)/2|$ で与えられる。また, 領域 (I), (II) 内の任意点における ϕ_1, ϕ_2 の値は, (4), (5) 式を X が領域内の点である場合について, (16), (17) 式と同様に離散化し, これに (23), (24) 式の解である境界上の $\phi_1(j), \bar{\phi}_1(j), \dots$ 等を用いて計算される。

4. 理論解と実験による検証

数値計算例として, 図-3 中に示す矩形湾について計算を行った。任意の湾形状の場合には, 単に計算プログラムにおける境界要素の入力座標を変更すればよい。境界要素の大きさは, $\Delta S_j/h=0.25$ に固定して計算したが, これは $kh=2.0$ において, 波長のほぼ $1/12$ にあたると³⁾。

数値計算を行うにあたっては, 仮想境界の位置, および (9) 式の無限級数を数値計算上有限項で打切るための, 必要な最低打ち切り項数 N^* を決める必要がある。仮想境界については, それが物理的な意味を有するものではなく, 単に, (4) 式を適用するための有限な領域を設定するという意味のみを持つことから, 仮想境界位置は任意に設定してよく, 仮想境界位置の違いによって解に有意の変動は生じないはずである。この事を確かめるため, 水槽幅 $B(=2b)$ が, $B/h=7.0$ の場合について, 仮

表-1 仮想境界位置による解の変動

$B/h=7.0$				
d/h	$kh=0.6$	$kh=1.0$	$kh=1.5$	$kh=2.0$
2.0	7.46	1.09	0.95	1.18
4.0	7.42	1.07	0.96	1.19
6.0	7.44	1.08	0.96	1.20

想境界位置を $d/h=2.0, 4.0, 6.0$ と変えた計算を行い、その結果を湾奥中央点における増幅率について表-1に示す。予期されたように、仮想境界位置による解の変動は、ほとんど生じない。打ち切り項数 N^* は、入射波の波数および水槽幅によって変わるものと考えられる。このため $B/h=7.0$ と $B/h=17.0$ の2つの水槽幅について N^* を変えて計算した結果を、湾奥中央点の増幅率 $\bar{A}$ について示すと表-2のようである。これより、 B/h が大きくかつ kh が大きい程収束の度合は悪くなるが、それでも $N^*=10$ 程度に取れば一定値に収束する事がわかる。ただし表-2には示していないが、 N^* が S_4 上の分割要素数の2倍よりも大きいと、計算値は全く異なる値となる。これは(20)式の積分の離散近似が、係数 $C_n \beta_n(d)$ の有限フーリエ展開となるため、 $N^* \geq 2N_4$ では同じ条件を2重に用いる事になるためで、 N^* は $N^* < 2N_4$ に取る必要がある。

表-2 打ち切り項数 N^* と解の収束

N^*	$B/h=7.0$			$B/h=17.0$		
	$kh=0.6$	$kh=1.0$	$kh=2.0$	$kh=0.6$	$kh=1.0$	$kh=2.0$
0	7.59	0.86	1.19	7.50	1.16	1.49
1	7.45	1.09	1.62	5.17	1.22	1.81
2	7.46	1.09	1.18	5.16	1.12	2.26
4	7.46	1.09	1.18	5.17	1.10	2.01
6	7.46	1.09	1.19	5.17	1.10	1.39
10	7.46	1.09	1.19	5.17	1.10	1.39
20	7.46	1.09	1.19	5.17	1.10	1.39

図-2, 3は、異なる水槽幅 B について、湾奥の中央点における波高増幅率を、入射波の波数 kh に対して示したもので、図-2には、比較のため外海に面した条件での増幅率も示している。普通、外海に面した湾で、単一の矩形湾のような単純な湾形状の場合には、湾奥において $\bar{A}=0$ となることはない⁶⁾が(ただし、複雑な湾形状の場合には、湾内での部分的な干渉によって $\bar{A}=0$ となる場合もある^{7),9)}、模型港湾内では、 $k=n\pi/b$ ($n=1, 2, \dots$) において、水槽横方向の重複波が生じるため、湾内へのエネルギーの流入が生じず $\bar{A}=0$ となる。図-2より、水槽幅が小さくなるとともに1次モードの増幅率は減少し、逆に2次のモードの増幅率が增大する傾向が見られる。また、水槽幅が大きくなるにつれて、図-3

にみられるように、2次モードの近傍では外海に面した場合の増幅率に近づぐが、1次モードの近傍で $k=n\pi/b$ となるため、水槽幅 B によって増幅率は種々異なった特性を示すことになる。

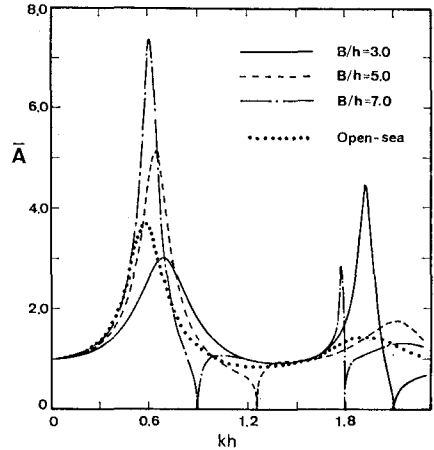


図-2 波高増幅率

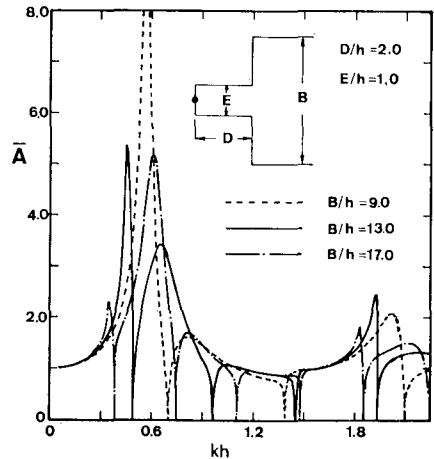


図-3 波高増幅率

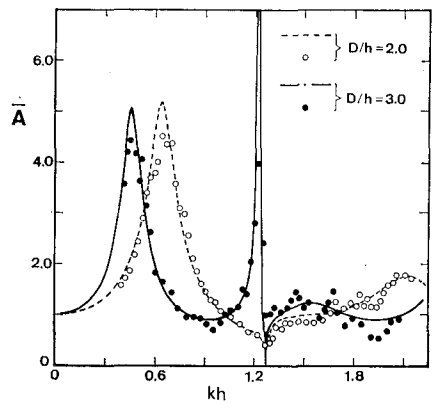


図-4 理論値と実験値との比較

解析法の妥当性を検証するため、模型実験を行って、湾奥の中央点の水面振動の振幅と入射波の振幅を測定し、波高増幅率を用いて理論解と比較した。その結果を図-4に示す。実験は、水深 0.2m とし、幅 1m ($B/h=5.0$)、水路長 20m の 2 次元造波水路の後端に設けた、湾幅 0.2m、湾長 0.4m ($D/h=2.0$) と 0.6m ($D/h=3.0$) の矩形湾について行った。実験に用いた入射波の波高は 1cm 程度である。

$D/h=3.0$ の場合に、 $kh>1.5$ において実験値が理論解のまわりに波打つようにばらついているが、全体として、実験値と理論解は良く一致しており、 $D/h=3.0$ の場合に $kh=1.2$ 近傍で理論解に現われる増幅率の急峻なピークも実験値に良く取らえられていることから、本解析法による解は妥当な結果を与えているものと考えられる。

4. あとがき

湾口あるいは湾内に、防波堤等による湾幅の狭小部を有する港湾の副振動を、数値シミュレーションによって十分な精度で推定するためには、狭小部で生じる渦等によるエネルギー損失の効果が、ポテンシャル理論に基づく理論解に妥当に評価されている事が必要である。理論解析上エネルギー損失の効果を、狭小部での流体運動に対する抵抗として表わすことが出来^{9),10)}るが、具体的に数値シミュレーションを行うにあたって、湾形状や、防波堤位置およびその開口幅、副振動周期などが異なる個々の港湾について、流体抵抗の係数をどのように取ればよいかについては、必ずしも十分究明されてはおらず、数値シミュレーションの結果に十分な信頼がおけない原因になっていると思われる。副振動は通常、不時に発生

し、理論解と比較するための実測データが得にくい事もあり、種々の条件について、ある程度の異なるスケールでの実験を行って、抵抗係数等の検討を行う事も必要と思われる。本文に述べた解析法はその際の理論解法として用いる事ができる。

最後に、本研究は文部省科学研究費奨励研究 (A) によった事を付記する。

参 考 文 献

- 1) 奥菌英明・吉田明德・井島武士：遊水部をもつ消波護岸の周波数特性と斜め入射波に対する反射率，土木学会論文報告集，第 355 号，1983.
- 2) Raichlen, F. and A. T. Ippen: Wave induced oscillations in harbors, J. of ASCE, Vol. 91, No. HY2, 1965.
- 3) 高橋秀俊：線形分布定数系論，岩波書店.
- 4) 榎木 享・久保雅義・青木伸一：港湾 Slip 内における船体運動および定常漂流力について，第 29 回海岸工学講演会論文集，1982.
- 5) 井島武士・周 宗仁・湯村やす：任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱，土木学会論文報告集，第 225 号，1974.
- 6) 合田良実：長方形および扇形の港の副振動について——フーリエ変換を用いた一解法——，第 10 回海岸工学講演会講演集，1963.
- 7) Mei, C. C. and Ü. Ünlüata: Resonant scattering by a harbor with two coupled basins, J. of Engineering Math., Vol. 10, 1976.
- 8) Su C. L.: Asymptotic solutions of resonances in harbors with connected basins, J. of ASCE, Vol. 99, No. WW3, 1973.
- 9) Ünlüata, Ü. and C. C. Mei: Effects of entrance loss on harbor oscillations, J. of ASCE, Vol. 101, No. WW2, 1975.
- 10) 村上仁士・野口英二：湾口部のエネルギー損失を考慮した湾水振動の解析，土木学会論文報告集，第 288 号，1979.