

屈折・回折・砕波減衰を含む波浪場の数値解析法

渡 辺 晃*・丸 山 康 樹**

1. 緒 言

平面二次元波浪場の計算に関しては従来より各種の解析手法が提案されており、伊藤・谷本^{1),2)}の数値波動解析法、Berkhoff³⁾の mild slope equation などを経ることができ、前者は浅水変形の評価に、後者は境界条件の設定が困難な点に問題があった。最近、mild slope equation を簡化した放物型方程式⁴⁾に関する研究も多く発表されているが、反射波成分を同時に計算し得ず、適用が制限される場合が多い。また、砕波後の波の変形をも含む構造物周辺の平面波浪場を合理的に計算する手法は未だ確立されていなかった。本研究においては、浅水変形・屈折・反射・回折・砕波減衰の全てを包含する平面二次元波浪場の数値解析法を開発し、その妥当性を水理実験結果との比較で検証した。

2. 波浪計算法の基礎理論

(1) 平面二次元波浪場の基礎式

数値波動解析法の基礎式は、線形化した運動方程式と連続式を水底から水面まで積分することにより得られ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + C^2 \nabla \zeta &= 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot Q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と表わされる。ここに、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ で、 ζ は水面変位、 C は波速、 t は時間、 $Q = (Q_x, Q_y)$ は線流量ベクトルで、

$$Q_x = \int_{-h}^0 u dz, \quad Q_y = \int_{-h}^0 v dz \dots\dots\dots (2)$$

である。ただし、 x, y は水平直角座標、 z は鉛直上向きを正とする座標で、 u, v は水粒子速度の x, y 成分、 h は水深である。

一方、mild slope equation は波の場の定常性を仮定して次式のようになる。

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \varphi) + \sigma^2 C_g / C \cdot \varphi = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 φ は速度ポテンシャル、 C_g は群速度、 σ は角

周波数である。式 (3) の φ と水面変位 ζ の関係: $\zeta = i\sigma/g \cdot \varphi e^{-i\sigma t}$ (g : 重力加速度、 i : 虚数単位) を用い、さらに

$$\zeta = a(x, y) e^{i(\chi - \sigma t)} \dots\dots\dots (4)$$

と置いて式 (3) に代入すると、実数部と虚数部から以下の関係式が得られる。

$$\frac{1}{a n C^2} \nabla \cdot (n C^2 \nabla a) + k^2 - \nabla \chi \cdot \nabla \chi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\nabla \cdot (n C^2 a^2 \nabla \chi) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 a は振幅、 χ は位相関数、 n は C_g/C 、 k は波数である。式 (5) は位相関数を決める式で、第一項を回折効果と考えてこれを無視すると (Berkhoff et al.⁵⁾、

$$\nabla \chi = (k \cos \theta, k \sin \theta) \dots\dots\dots (7)$$

が得られ、式 (6) から

$$\nabla \cdot (\sigma a^2 C_g) = 0 \dots\dots\dots (8)$$

の関係が得られる。ただし、 C_g は群速度ベクトルで、 $C_g = C_g(\sin \theta, \cos \theta)$ であり、 θ は波向である。式 (8) は微小振幅波理論のエネルギー保存則と等価である。

ところで、式 (1) から Q を消去し、式 (4) の関係を代入した後、 $\nabla \cdot (C^2 \nabla a) / a C^2$ の項を無視すると、

$$\nabla \cdot (\sigma a^2 C) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

の関係式を得る。ただし、 C は波速ベクトルである。これは波のエネルギー $E (\propto a^2)$ が波速で伝播することに相当し、浅水変形を正しく表現できないことがわかる。

式 (1) は数値計算が式 (3) に比べて容易であり、その利点を生かしながら浅水変形の計算精度を改良する試みが行なわれたが (西村ら⁶⁾)、十分な結果を得るに致っていない。そこで、水深変化の影響をより厳密に表現するため、式 (1) に代えて次式を新たに導いた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{C^2}{n} \nabla (n \zeta) &= 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot Q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

上式の式 (5)、(6) に対応する関係式は以下のようになる。

$$\frac{1}{a n C^2} \nabla \cdot (n C^2 \nabla a) + k^2 - \nabla \chi \cdot \nabla \chi + \frac{1}{C^2} \nabla \cdot \left(C^2 \frac{\nabla n}{n} \right) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部 土木工学科
** 正会員 工修 電力中央研究所 土木研究所 環境部

$$\nabla \cdot (nC^2 a^2 \nabla \chi) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(5)と比較すれば明らかのように、式(11)の最後の項に相違がある。この項は、底勾配の二乗と水深の高階微分とから成っており、底勾配のオーダーでは mild slope equation と一致し、同様に式(8)が成立する。

一方、式(3)と完全に等価な連立系は以下のようになる(西村ら⁹⁾)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q'}{\partial t} + C^2 \nabla \zeta &= 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{n} \nabla \cdot (n Q') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、この場合の Q' と式(10)の Q との間には $\nabla \cdot n$ のオーダーの差異があるが、ほぼ等価とみなせる。

式(10)および式(13)の精度を理論的に比較することは困難で、ここでは実際の計算例を通じてその適用性を論ずることとする。なお、式(13)を本論文では非定常緩勾配方程式と呼ぶことにする。

(2) 砕波減衰項および砕波位置の決定

従来、波浪場計算モデルにおいては砕波帯内の波高を限界波高で規定している例が多いが、一様勾配斜面の場合を除いては不合理な結果を与えることが知られている。パー等が存在する地形に対しても適用可能なモデルは水口ら⁷⁾、泉宮・堀川⁹⁾などにより提案されており、いずれも一次元のエネルギー方程式の中に砕波後の乱れによるエネルギー逸散の項を導入したものである。しかし、一般的な重合状態の波浪場にはそれらを直接適用することはできないので、式(10)の運動方程式に砕波減衰項を付加した次式を導いた。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{C^2}{n} \nabla (n \zeta) + f_D Q = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_D &= \alpha_D \tan \beta \sqrt{(g/h)(\hat{Q}/Q_r - 1)} \\ \hat{Q} &= \sqrt{\hat{Q}_x^2 + \hat{Q}_y^2}, \quad Q_r = \gamma' \sqrt{gh^3} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\tan \beta$ は砕波帯近傍沖側の平均勾配、 $\hat{Q}_x$ 、 $\hat{Q}_y$ は線流量の振幅、 α_D および γ' は定数で、それぞれ 2.5 および 0.25 とすると水口らのモデルにほぼ一致する。また、式(15)では $\hat{Q} < Q_r$ のときに $f_D = 0$ とすることにより波の再生現象を考慮することが可能である。

砕波位置は、渡辺ら⁹⁾により提案された波峰下静水位流速 u_b と波速 C_b の比による新しい砕波指標により決定することができる。具体的な計算法は次のようにすればよい。まず、式(10)あるいは式(13)を用いて計算領域全体の波浪場を計算する。ある任意点における水面変位 ζ と線流量 Q_x 、 Q_y を、それぞれの振幅 $\hat{\zeta}$ 、 $\hat{Q}_x$ 、 $\hat{Q}_y$ と位相角 ε_ζ 、 ε_x 、 ε_y を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \hat{\zeta} \sin(\sigma t + \varepsilon_\zeta) \\ Q_x &= \hat{Q}_x \sin(\sigma t + \varepsilon_x) \\ Q_y &= \hat{Q}_y \sin(\sigma t + \varepsilon_y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表わすことにする。水面変位 ζ が極大(波峰)となる

時刻 t_c は

$$\sigma t_c + \varepsilon_\zeta = \pi/2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

の関係を満たす場合で、この時刻における静水位 ($z=0$) の流速 u_c 、 v_c は、微小振幅波理論の流速鉛直分布を仮定すると以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_c &= k \coth kh Q_x \cos(\varepsilon_x - \varepsilon_\zeta) \\ v_c &= k \coth kh Q_y \cos(\varepsilon_y - \varepsilon_\zeta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって、波峰下静水位流速の絶対値 u_{c0} ならびにそれが x 軸となす角 θ_c は次式で求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} u_{c0} &= \sqrt{u_c^2 + v_c^2} \\ \theta_c &= \tan^{-1}(v_c/u_c) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

一方、波峰の θ_c 方向への伝播速度 C' は次式により求まる。

$$C' = \sigma / (n_\theta \cdot \nabla \varepsilon_\zeta) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 n_θ は θ_c 方向の単位ベクトルである。以上のようにして求まる u_{c0} と C' の比 u_{c0}/C' を計算領域全域に対して計算し、渡辺らの砕波指標で与えられる限界値 u_b/C_b と一致する点を砕波位置とすればよい。こうして砕波位置を求めた後、砕波帯内では式(10)を式(14)に代えて再度領域全体の計算を行い、最終的な波浪場の解が得られることになる。

(3) Radiation stress

複数の波が重合した波浪場において、radiation stress を合理的に計算するには、まず式(16)を展開して

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_s \sin \sigma t + \zeta_c \cos \sigma t \\ Q_x &= Q_{xs} \sin \sigma t + Q_{xc} \cos \sigma t \\ Q_y &= Q_{ys} \sin \sigma t + Q_{yc} \cos \sigma t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と書くことにする。渡辺・塩崎¹⁰⁾が導いた radiation stress 表示式を ζ の位相角 ε_ζ を考慮したものに修正した後、式(21)の ζ_s 、 ζ_c 、 Q_{xs} 、 Q_{xc} 等を用いて表わせば以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho g} S_{xx} &= \frac{Q_{xs}^2 + Q_{xc}^2}{4C^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + \Gamma \\ \frac{1}{\rho g} S_{yy} &= \frac{Q_{ys}^2 + Q_{yc}^2}{4C^2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) + \Gamma \\ \frac{1}{\rho g} S_{xy} &= \frac{1}{\rho g} S_{yx} = \frac{Q_{xs} Q_{ys} + Q_{xc} Q_{yc}}{4C^2} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\zeta_s^2 + \zeta_c^2}{4} \frac{2kh}{\sinh 2kh} - \frac{1}{8\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\zeta_s Q_{xc} - \zeta_c Q_{xs}) + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta_s Q_{yc} - \zeta_c Q_{ys}) \right] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

3. 数値計算の方法

式(10)あるいは式(14)の差分化には、伊藤・谷本¹⁾の計算方法を応用することができる。すなわち、空間差

分間隔を Δx , Δy , 時間間隔を Δt として, ζ , Q_x , Q_y の計算点はスタッガードメッシュ, 時間に対する計算には leap-frog 法を採用して基礎式を差分化する. また, 式 (14) は Q に対して非線形な方程式であるが, $\hat{Q}$ の値を一周期前の値とすることにより線形化した差分スキームを用いる. 静止状態の初期値から出発して定常値が得られるまで逐次計算を行うので, この線形化による影響はほとんど無いものと考えられる.

入射波条件は, 水深が一定であれば式 (2) の線流量が厳密に次式となることを利用して設定すればよい.

$$Q = C \cdot \zeta \dots\dots\dots (24)$$

また, 計算領域の周囲 4 辺の境界条件は, 谷本・小舟⁽¹¹⁾ の提案した任意反射率境界および無反射性造波境界を若干修正して用いることにした. なお, 計算の安定性の要請から, 計算間隔がクーラン条件を満たすことが必要である (計算法の詳細については文献 12) を参照).

4. 浅水・砕波・屈折変形に対する検討

(1) 浅水変形

勾配 1/50 の緩勾配斜面上に波が直角に入射する条件に対し, 式 (10) から得られる計算値 H/H_0 (H_0 : 沖波波高) と微小振幅理論の浅水係数 $\sqrt{C_{g0}/C_g}$ との比較を図-1 に示した. 図には式 (1) の結果も示してある. 図から明らかなように, 式 (10) の結果は理論値とほぼ一致し, 浅水変形に対して十分な精度を持つことがわかる. また, 式 (13) で $Q' = Q$ として計算した場合も式 (10) の結果とほとんど変わらず, 実質上両者に差は無い.

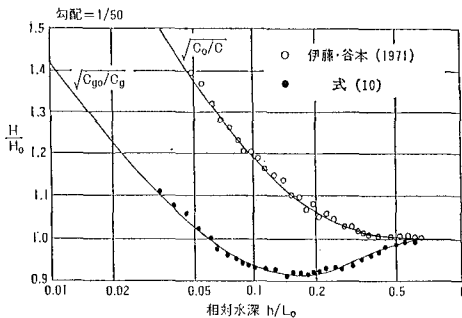


図-1 浅水係数計算例

ところで, 図に見られる計算値の細かな変動は斜面からの反射波の発生が主な原因と思われる. 水深一様な浅海に階段状の水深急変部が存在する場合, 直角に入射する波の反射率と透過率が解析的に得られることが知られている. 水深が一様なならば, 式 (10) および式 (13) は式 (1) に帰着し, 実際に階段部からの反射率を計算すると解析解にほぼ一致する結果が得られる⁽¹²⁾. Booij⁽¹³⁾ は階段部を斜面で繋いだ地形を例に式 (3) の反射率を数値的に検討し, 勾配が 1/3 程度まではラプラス方程式を直

接 FEM で計算した結果と変わらず, 勾配が無限大, 言換えると階段状地形の場合でも両者はほぼ一致すると報告している. いずれの基礎式を用いても, その結果には斜面からの反射波の影響が含まれ, 反射波が存在しないことを前提とした微小振幅波理論の浅水変形とは厳密な意味では一致しないことになる.

(2) 砕波変形

泉宮・堀川⁽⁹⁾の実験結果を例に, 砕波点は実測値として式 (14) から計算される波高比 H/H_i (H_i : 入射波高) と実験値の比較を図-2 に示した. ただし, 式 (15) の定数 α_D については, 計算上の反射波の発生を阻止するため, 砕波点を中心とする半波長の区間で α_D を線形的に増加させる方法を採用している⁽¹²⁾. 図に示めされているように, 砕波点の近傍では有限振幅性の影響により実験値が計算値より大きくなるが, 全体的な傾向は両者とも良く一致している. なお, この計算例では set-up を考慮していないので, これも計算値が実験値とずれる原因である.

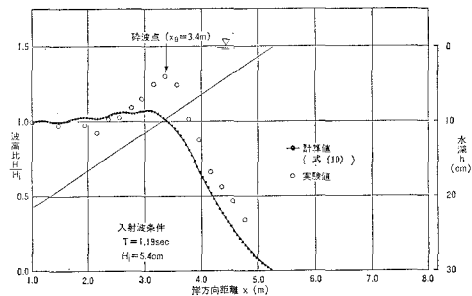


図-2 砕波変形の計算例

式 (13) の非定常緩勾配方程式に式 (14) と全く同一の砕波減衰項を付加して得られる計算結果も図-2 の結果と変わらない. しかし, 泉宮・堀川のステップ状あるいはバー状の地形に対する実験結果に適用すると, 勾配の急変部, 換言すると水深の曲率急変部からの擾乱波の発生が式 (10) では式 (13) に比べて多くなる. これは, 両者の差を意味する式 (11) の最後の項の影響と考えられる. 地形を平滑化した上で式 (10) を適用すると, 平滑化しない地形に対する式 (13) の結果と変わらない値が得られるが, 実際の適用上の便を考えると, 式 (13) の非定常緩勾配方程式が有利と判断される.

(3) 屈折変形

従来, この種の計算法では屈折変形についてはほとんど論じられていない. これは斜め入射波に対する境界条件の設定が困難なことが主な原因と思われる. このような場合, 沖側境界を入射境界とするだけでは不十分で, 入射波側の側方境界も入射境界として取扱う必要がある⁽¹²⁾. 図-3 は, 勾配 1/50 の斜面上に沖波入射角 60° で波が斜めに入射する例に対し, 波高および波向分布を示

したものである。ただし、砕波点を $x=4.5\text{m}$ の位置に設定し、基礎式は式(13)に砕波減衰項を付加したものとしている。波高および波向は沿岸方向にほぼ一様となり、境界条件の設定が妥当であることがわかる。計算領域中央の縦断測線上で、砕波帯外の波向および波高分布から得られる屈折係数は理論値と一致し、この計算法で屈折変形を精度良く評価できることが確認された。

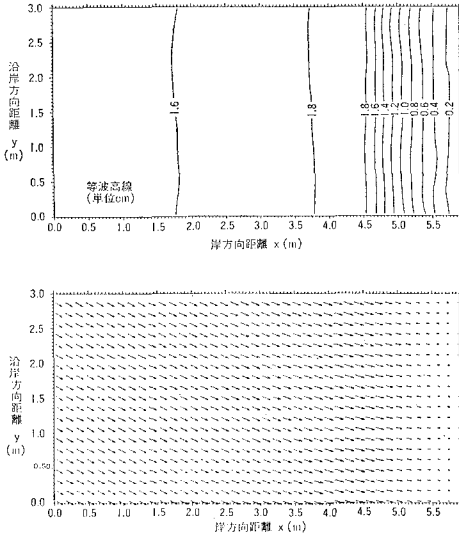


図-3 斜め入射条件での波高および波向計算例

5. 構造物周辺の波浪場への適用

実験は電力中央研究所の $30\text{m} \times 35\text{m}$ の平面水槽に、勾配 $1/50$ のモルタル製斜面を作製して行った¹²⁾。沖波波高 2cm 、周期 1.2sec の波を離岸堤(幅 2.67m 、波長の約3倍)の例では直角に、突堤(長さ 4m)の例では沖波入射角 60° として作用させた。模型はいずれも鉄板製で厚さは実質的に 0 とみなせ、反射率は 1.0 である。

(1) 離岸堤

図-4 に砕波位置、図-5 に波高変化についての実験値と計算値の比較を示した。計算は式(13)を用いて半

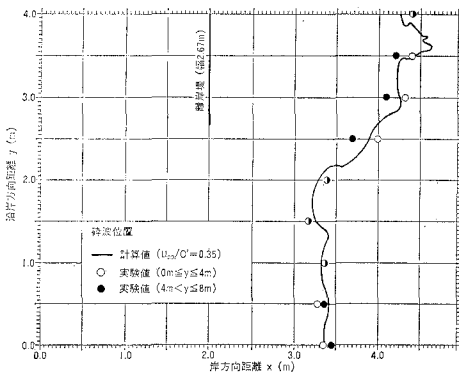


図-4 砕波位置の比較

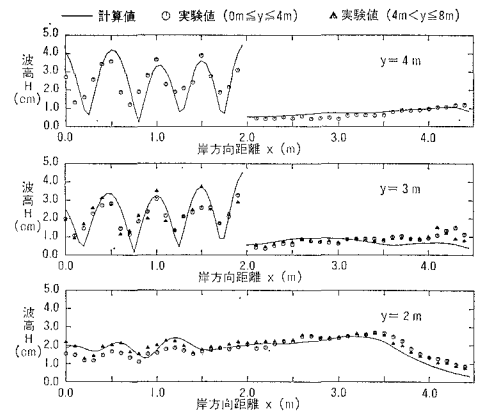


図-5 縦断方向の波高変化の比較

領域について行い、実験値は中心線の両側の値を示してある。また、砕波位置の判定には流速・波速比の限界を渡辺ら⁹⁾の図から読み取り、 0.35 としてある。両図より、砕波位置、波高とも計算値は実験値と良く一致していることがわかる。また、式(22)、(23)から外力項

$$S = \left[-\frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right), -\frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \right] \dots\dots\dots (25)$$

を計算し、 S に比例するベクトルを図-6 に示した。 S は海浜流の基礎式の外力を意味し、この結果を用いた海浜流の具体的な計算例は別報¹⁴⁾に示す通りである。

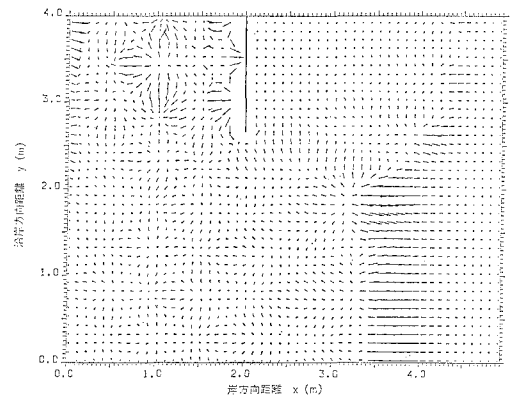


図-6 Radiation stress の勾配 S の計算例

(2) 突堤

図-7 に計算で得られた波高の平面分布を示す。境界条件の設定法は、前述した屈折変形の計算法と基本的には同じである。ただし、入射波側の側方境界では突堤からの反射波分をそのまま透過させてある¹²⁾。突堤から十分離れた部分の等波高線は沿岸方向にほぼ平行で、構造物が内部に存在する場合に対してもこの境界条件が妥当であることがわかる。なお、砕波位置を決める流速・波速比は離岸堤の例と同様に 0.35 とした。図-8 は、突

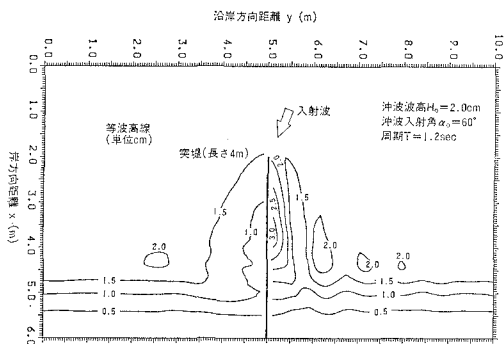


図-7 突堤周辺の波高分布計算例

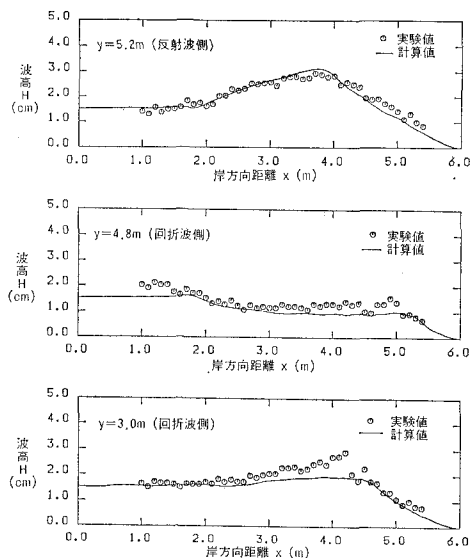


図-8 縦断方向の波高変化の比較

堤からそれぞれ 20 cm 離れた両側 ($y=4.8\text{ m}$, 5.2 m) と突堤の影響の少ない縦断測線 ($y=3\text{ m}$) 上の波高変化を比較したもので、計算値は実験値に良く一致している。

6. 結 語

極めて一般的な波浪場に対して、波浪変形を精度良く

計算できる実用モデルを提案した。この方法により、海浜流あるいは地形変化を計算する際の外力となる波の場を合理的に算定することが可能となった。

なお、本研究を行うにあたり、筑波大学構造工学系の西村仁嗣助教授および横浜国立大学土木工学科の磯部雅彦助教授との討議が有益であった。また、数値計算については開発計算センターの定森良夫氏の協力を得たことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利: 数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——, 第 18 回海講論文集, pp. 67~70, 1971.
- 2) 伊藤喜行・谷本勝利: 波向線交差領域での波の屈折——数値波動解析法の応用 (2)——, 第 19 回海講論文集, pp. 325~329, 1972.
- 3) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction—diffraction, Proc. 13th Conf. on Coastal Eng., pp. 471~490, 1972.
- 4) Raddar, A. C.: On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 6, pp. 255~279, 1979.
- 5) Berkhoff, J. C. W., N. Booy and A. C. Raddar: Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., Vol. 6, pp. 255~279, 1982.
- 6) 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸: 直接数値積分による波の場の解析, 第 30 回海講論文集, pp. 123~127, 1983.
- 7) 水口 優・辻岡和男・堀川清司: 砕波後の波高変化についての一考察, 第 25 回海講論文集, pp. 155~159, 1978.
- 8) 泉宮尊司・堀川清司: 砕波帯における波のエネルギー方程式のモデリング, 第 30 回海講論文集, pp. 15~19, 1983.
- 9) 渡辺 晃・原 哲・堀川清司: 重合した波浪場における砕波について, 第 30 回海講論文集, pp. 5~9, 1983.
- 10) 渡辺 晃・塩崎正孝: 構造物周辺の波浪・海浜流場について, 第 29 回海講論文集, pp. 110~114, 1982.
- 11) 谷本勝利・小舟浩右: 数値波動解析法による港内波高分布の計算, 第 22 回海講論文集, pp. 249~253, 1975.
- 12) 丸山康樹・鹿島遼一: 非定常緩勾配方程式による波の場の計算法とその適用——斜め入射波条件への拡張——, 電力中央研究所報告, 研究報告: 382070, 40 p., 1984.
- 13) Booiij, N.: A note of accuracy of the mild slope equation, Coastal Eng., Vol. 7, pp. 191~203, 1983.
- 14) 西村仁嗣・丸山康樹・桜井 力: 海浜流の数値計算法について, 第 31 回海講論文集, pp. 100~104, 1984.