

エントロピーによる多ソリトン系のエネルギー分布

安田 孝志*・三島 豊秋**・土屋 義人***

1. 緒 言

著者らは、現地波浪のソリトンモード表示に関する一連の研究^{1),2)}によって、広範な海象下の海岸波浪においてソリトンを基準モードとする力学的秩序、すなわち、ソリトン構造が形成されており、その主要部分に対して、多ソリトン系としての取扱いが可能であることを示してきた。対象とする海岸波浪がこのような力学的秩序を持つとするなら、その系の状態は各モードへのエネルギー配分を不変的に表現するソリトンスペクトルによって決定され、その変化はソリトンスペクトルに従う多ソリトン解によって決定論的に記述される。この観点からすれば、ソリトン構造を持つ海岸波浪の力学的特性の究明とは、究極的にはそのソリトンスペクトルを明らかにすることにあるとさえ言える。また、このようなソリトンスペクトルを持つ不規則波理論は、ソリトンモードに基づく単なる不規則波の表示法から、物理学に立脚した波動理論として位置付けられることになる。

そこで本研究では、ソリトンを基準モードとした統計力学的手法に準拠し、各ソリトンモードへのエネルギー配分問題を、いわゆる初期確率の立場から確率論的に取り扱い、エントロピー最大条件に基づいて多ソリトン系のエネルギー準位分布を求め、これがエントロピー最大下のソリトンスペクトルに相当していることを明らかにする。さらに、こうして理論的に導かれるソリトンスペクトルと現地波浪のそれとの比較を行い、ソリトンモードの励起機構に関する若干の考察を試みる。

2. 局在多ソリトン解

(1) 微分展開法による波動方程式の誘導

ソリトンモードへのエネルギー配分問題を統計力学的に取扱うには、無限領域に有限個のソリトンが局在した場を考える必要がある。しかしながら、これまでの扱い¹⁾では、遠方場においてもソリトンが存在するとして、粒子性波動であるソリトンを基準モードとしながら、平

均海面周りの水位変動の連続条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} z' dx = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

を満足させているため、統計力学的記述に必要な水位変動の局在条件

$$x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow z' \rightarrow 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

を満足させることが不可能となっている。このため、式(1)および(2)を同時に満足する局在多ソリトン解の表示を新たに与える必要がある。ここでは、従来のソリトンモードに基づく表示法を生かしながら、式(1)および(2)を満足させるため、ソリトンの伝播基準面である波谷面に緩やかな変動を持ち込むことにする。

非回転波動を考え、

図-1のように座標系および記号を定めれば、このときの流体力学の基礎方程式は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2 + gz' &= 0|_{z=h+z'} \\ z_t' + z_x' \phi_x - \phi_z &= 0|_{z=h+z'} \\ \phi_z &= 0|_{z=0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ϕ ；速度ポテンシャル、 h ；平均水深、および g ；重力の加速度である。

ついで、未知関数および従属変数に対して次式の摂動展開を行なう。

$$\frac{\phi}{h\sqrt{gh}} = \varepsilon^{1/2} \{ \phi_1(x_i, \zeta, t_i | i=1 \sim 3) + \varepsilon \phi_2(x_i, \zeta, t_i | i=1 \sim 4) + \dots \} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{z'}{h} = \varepsilon \eta_1(x_i, t_i | i=1 \sim 3) + \varepsilon^2 \eta_2(x_i, t_i | i=1 \sim 4) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \varepsilon^{i-1/2} \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h} \\ t_i &= \varepsilon^{i-1/2} t \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

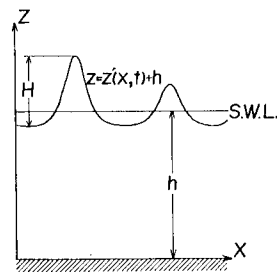


図-1 座標系および記号

* 正 会 員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科
 ** 学生会員 岐阜大学大学院 工学研究科
 *** 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

ここに、 $\varepsilon=(h/L)^2$ および L ；波峰間隔の代表値である。これらの諸式を式 (3) に代入し、 $O(\varepsilon^2)$ において整理すれば、次式が導かれる。

$$\eta_{1\tau} + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad (7)$$

$$\eta_1 = \eta_1(\xi, \tau, x_3, t_3) \quad (8)$$

ここに、

$$\xi = x_1 - t_1, \quad \tau = t_2 \quad (9)$$

式 (7) は形式的に KdV 方程式に一致しており、 η_1 は式 (8) に示されるように x_3 および t_3 に依存した緩やかな変動成分を含んでいる。 η_1 の x_3 および t_3 への依存性は式 (7) からでは決まらず、前述の式 (1) および (2) の束縛条件から決定されることになる。このことは、 η_1 に含まれる ξ および τ に依存する波動成分は、 $O(\varepsilon^2)$ で考える限り、束縛条件に独立であることを示している。

ここでは、 $O(\varepsilon^2)$ 、すなわち、KdV 方程式のオーダーで波動場を扱うため、

$$\frac{z'}{h} = \eta \doteq \varepsilon \eta_1 \quad (10)$$

と仮定し、式 (7) をこのときの波動方程式とする。

(2) 局在多ソリトン解の誘導

式 (7) の解を束縛条件に独立なソリトンモード成分 η_s および束縛条件に支配される変動成分 η_0 に分け、前者に対しては局在 N ソリトン解を与えることにすれば、 η は次式のように表される。

$$\eta = \eta_s(\xi, \tau) - \eta_0(x_3, t_3) \quad (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta_s &= 4(\log |F_{ij}|)_{\xi\xi}/3 \\ F_{ij} &= \delta_{ij} + 2B_i f_i / (B_i + B_j) \\ f_i &= \exp \{ B_i (\xi - c_i \tau - \delta_i) \} \\ c_i &= A_i/2 - 3\eta_0/2 \\ B_i &= \sqrt{3A_i} \quad 1 \leq i, j \leq N \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、 δ_{ij} ；Kronecker のデルタ、 δ_i ；ソリトンの位相定数、 N ；ソリトンの個数、 c_i ； $\sqrt{gh}$ の速度で進む動座標上での波速、および A_i ；ソリトンの固有値である。 η_0 は、式 (11) によって表わされる水位変動の下で前述の式 (1) および (2) の束縛条件を満足する任意関数であり、超関数による一般的表示は、次式のように与えられる。

$$\eta_0(x_3, t_3) = U \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i\omega_n x_3) \quad (13)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \sigma}{\sigma} \exp\left(\frac{i\sigma x_3}{R}\right) d\sigma \\ R(t_3) &= (\varepsilon^{-2} c_i t_3 + \delta_i)_{\max} - (\varepsilon^{-2} c_i t_3 + \delta_i)_{\min} \\ \omega_n &= \frac{n\pi}{R} \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

であり、 R ；ソリトンの存在領域、 r ； η_0 の滑らかさの程度を与える定数、および a_n ；式 (1) および (2) を満足させるように r と共に決定される Fourier 係数である。

図-2 は、式 (13) によって η_0 を与えたときの式 (11) による局在ソリトン合成波形の一例である。これによって、ソリトン数が任意の局在多ソリトン系の記述が可能となることがわかる。

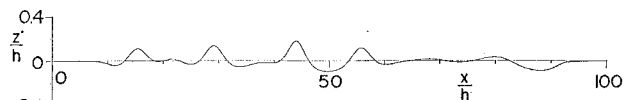


図-2 局在したソリトン合成波形

3. 多ソリトン系のエネルギー分布

(1) 多ソリトン系の確率的構造

エントロピー最大条件によって多ソリトン系のエネルギー分布の計算を行うには、エネルギー分布が偶然外力に支配される不確定現象として扱えるものでなければならぬ。ソリトンを基準モードとする限り、局在多ソリトン系の状態変化は前述の式 (11) によって決定論的に記述されてしまうため、不確定性の介入する余地は皆無である。しかしながら、 N が十分大きな数であり、 N ソリトン系がソリトン構造を持つ海岸波浪の標本集合であるとすれば、海の波の発達過程が偶然外力下での現象であることに加え、ソリトンモードの励起機構の決定論的記述が困難であるなどのために、 N ソリトン系にも当然不確定性が持込まれているものと判断される。したがって、ソリトンモードのエネルギー分布を支配する N 個の固有値 $\{A\}$ および空間分布を支配する N 個の位相定数 $\{\delta\}$ を確率変数として扱うことは十分に可能と判断される。ただし、固有値 $\{A\}$ が不変量であり、各ソリトンの伝播も固有値に支配されているため、 N ソリトン系の発展過程は上述のように必然現象となり、いわゆる初期確率の立場で扱われることになる。

ここでは、以上の考察を基に、ソリトン構造を持つ海岸波浪におけるモード励起は、沖波のパワースペクトルなどの束縛条件に一切無関係に偶然外力の下で一瞬のうちに行われ、各モードへのエネルギー配分も完全に確率論的に決定されるものとし、こうした海岸波浪の確率論的構造が N ソリトン系にもそのまま引き継がれているものと仮定する。

(2) 微視的エントロピーの定義

前述の初期確率の立場から、このときの多ソリトン系は必然的に孤立系（小正準集合）として扱われ、そのエネルギー分布をエントロピー最大条件によって決定することは十分可能と判断される。固有値 A_i を持つソリトン 1 個当りの ρgh^3 で無次元化された全エネルギー E_i

は次式によって与えられる。

$$E_i = (8\sqrt{3}/9)A_i^{3/2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

これは、Planck 定数のような物理定数を媒介とすることなく、ソリトンモードを支配する固有値 A_i と多ソリトン系におけるエネルギー準位 E_i とが一意的に対応していることを示している。また、これから、各モードへのエネルギー配分を表現するソリトンスペクトルと各エネルギー準位へのエネルギー配分を表すエネルギー分布関数との関係が明瞭となり、ソリトンスペクトルが統計力学的手法によって決定できることが理解される。

しかしながら、こうしたエネルギー準位と固有値との対応は、固有値の離散性にエネルギー準位を依存させ、エネルギー準位の設定に大きな制限を加えることになる。また、ソリトンが量子力学におけるフェルミオンに対応しているためエネルギー配分をフェルミ統計に従わせる。前者の固有値の離散性の問題は将来の課題とし、ここでは、固有値の上限 $A_{\max}$ が砕波によって砕波水深以下に抑えられている点に着目して $A_{\max}=1$ とし、現地波浪のソリトンスペクトルの標本分布の平滑性を考慮して固有値 A_i を次式のように離散化する。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= i\Delta A \\ \Delta A &= \frac{A_{\max}}{M} \quad i=1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 M ；固有値の離散化数である。これより、エネルギー準位は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_i &= i\Delta E \\ \Delta E &= \frac{(4A_{\max}/3)^{3/2}}{M} \quad i=1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

後者のフェルミ統計の件に関しては、対象としている現地波浪が主としてうねりであり、無限領域場での多ソリトン系として扱われるため、稀薄理想気体に対応していると仮定し、エネルギー配分を古典統計によって扱う。

以上の考察から、多ソリトン系におけるエネルギー分布問題を以下のように確率論的に扱う。

N 個のソリトンをもつ M 通りのエネルギー準位 E_i に古典統計の下で配分する仕方の数 W は、次式によって与えられる。

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_M!} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 n_i ；エネルギー準位 E_i に配分されるソリトン数を示す。式(8)に対して、ソリトン数保存則

$$N = \sum_{i=1}^M n_i \quad \dots\dots\dots(19)$$

およびエネルギー保存則

$$E_T = \sum_{i=1}^M n_i E_i \quad \dots\dots\dots(20)$$

を満足させる。これより、式(19)および(20)の保存則の下で W を最大にするエネルギー配分が最も生じ易いことになるから、微視的エントロピー s を次式のように

に定義する。

$$s = k \left\{ \log W + \alpha \left(N - \sum_{i=1}^M n_i \right) + \beta \left(E_T - \sum_{i=1}^M n_i E_i \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 k ；Boltzmann 定数に対応する定数、 α および β ；Lagrange の未定係数である。

(2) 巨視的エントロピーの定義

多ソリトン系のエネルギー分布が前述の微視的エントロピー s に支配されるとすれば、 s の変化による影響が巨視量にも当然現れる。この場合、巨視量としてエネルギー分布に依存するものを考えれば、それはソリトン1個当たりの平均エネルギー

$$\bar{E} = \frac{E_T}{N} \quad \dots\dots\dots(22)$$

によって与えられる。すなわち、多ソリトン系も熱力学第1法則の例外ではあり得ないが、系のエネルギーの変化は必ずエネルギー分布の変化を伴う。これより、エネルギー分布の変化を表す量として巨視的エントロピー S を定義すれば、その変化量 δS はエネルギー変化量 δE_T と対応するため、次式のように表される。

$$\delta S = \frac{\delta E_T}{\bar{E}} \quad \dots\dots\dots(23)$$

(3) エントロピー最大条件

前述したように、微視的エントロピー s が最大になるのは、式(19)および(20)の保存則の下で最大の生起確率を持つエネルギー配分が実現される場合と考えられる。したがって、最も実現し易い多ソリトン系のエネルギー分布は、式(21)の極値問題を解くことによって、次式のように与えられる。

$$n_i = \frac{\exp(-\beta E_i)}{\exp(1+\alpha)} \quad \dots\dots\dots(24)$$

この式は各エネルギー準位ごとの度数を表わすが、固有値の離散化数 M を無限大にして、

$$\rho(A_i) = \frac{n_i}{N} \quad \dots\dots\dots(25)$$

のように置き換えれば、次式のような固有値の分布関数 $\rho(A)$ が導かれる。

$$\rho(A) = \frac{\exp\{-\beta E(A)\}}{\exp(1+\alpha)} \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここに、

$$E(A) = (8\sqrt{3}/9)A^{3/2} \quad \dots\dots\dots(27)$$

であり、このとき、式(19)および(20)はそれぞれ次式のように書き換えられる。

$$\int_0^{A_{\max}} \rho(A) dA = 1 \quad \dots\dots\dots(28)$$

$$\int_0^{A_{\max}} E(A) \rho(A) dA = \bar{E} \quad \dots\dots\dots(29)$$

同時に、未知定数 α および β に対して、

$$\alpha = \log \left\{ \int_0^{A_{\max}} \exp(-\beta E) dA \right\} - 1 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$k\beta = \left(\frac{\partial s}{\partial E_T} \right)_{M, N=\text{const.}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

の関係が導かれ、 β は系の状態に依存し、 α は β が決まれば同時に決定されることがわかる。

前述したように、微視的および巨視的エントロピーは共に系のエネルギー分布に関わる状態量であり、 $s_{\max}$ が実現される条件下では、系内の δE_T のエネルギー変化に対応するエネルギー分布の変化量は一義的に定まり、次式の関係が成立するものと考えられる。

$$(\delta s = \delta S)_{M, N=\text{const.}} \quad \dots\dots\dots (32)$$

したがって、上式の関係を変定すれば、式 (23) および (31) より、直ちに

$$\beta = \frac{1}{k\bar{E}} \quad \dots\dots\dots (33)$$

の関係が導かれる。そこで、式 (28) および (29) に式 (26) を代入し、その 2 式より $\exp(1+\alpha)$ を消去すれば、 β を変数扱いすることにより、式 (29) は次のようになる。

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \left\{ \int_0^{A_{\max}} \exp(-\beta E) dA \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで、Boltzmann 因子に相当する関数 $\exp(-\beta E)$ のゼロへの収束が十分速いものとすれば、

$$\int_0^{A_{\max}} \exp(-\beta E) dA \doteq 8\Gamma(2/3)\beta^{2/3} \quad \dots\dots\dots (35)$$

のように近似できる。ここに、 Γ はガンマ関数である。式 (35) の関係を用いれば、式 (33) および (34) から、

$$k \doteq 1.5 \quad \dots\dots\dots (36)$$

となり、定数 k は、式 (32) によって微視的および巨視的エントロピーの変化量を結合させる物理定数であり、系のエネルギー状態に無関係に一定値を持つものと考えられる。 $A_{\max} \rightarrow \infty$ では、式 (35) から明らかのように、 $k=1.5$ となるが、砕波条件によって一般に $A_{\max}$ は 1 以下になるため、この範囲においても $k=1.5$ と

普遍定数扱いが出来ることを明らかにしておく必要がある。

図-3 には、巨視量をパラメータとして k と $A_{\max}$ の関係を示す。これから、 $\bar{E}$ が大きくなると k の値も増大する傾向にあるが、 $A_{\max}=1$ としておけば、通常の $\bar{E}$ に対しては $k=1.5$ とできることがわかる。図中の観測値は大湊海岸におけるうねり (DNO 7) によるものであり、ここで示した程度の現地波浪に対しては、 k を 1.5 の値を持つ普遍定数として取扱えるであろう。

これらの定数を式 (26) に適用すれば、固有値の分布関数 $\rho(A)$ は、次式のように表される。

$$\rho(A) = \exp \left(-\frac{2E}{3\bar{E}} \right) / \exp(1+\alpha) \quad \dots\dots\dots (37)$$

これは、多ソリトン系全体に対しては系内の固有値の頻度分布を表し、1 個のソリトンに対してはそれがある固有値を持つ確率を与える。また、この分布関数は、確率変数である固有値の初期確率を与える確率密度関数であるが、固有値が不変量であるため、多ソリトン系の巨視的特性を決定することにもなる。

(4) エネルギー分布

エントロピー最大条件下における多ソリトン系のエネルギー分布は、式 (37) の分布関数を用いることにより、

$$p(E) = E \exp \left(-\frac{2E}{3\bar{E}} \right) / \exp(1+\alpha) \quad \dots\dots\dots (38)$$

によって表される。これを固有値に関して表示すれば、式 (38) は

$$p(A) = E(A) \exp \left\{ -\frac{2E(A)}{3\bar{E}} \right\} / \exp(1+\alpha) \quad \dots\dots\dots (39)$$

となり、各ソリトンモードへのエネルギー配分を表現するソリトンスペクトルに書き換えられる。これからも、多ソリトン系においては、式 (15) によってエネルギー準位と基準モードとの一義的対応関係が与えられるので、エネルギー分布とソリトンスペクトルが一致することがわかる。

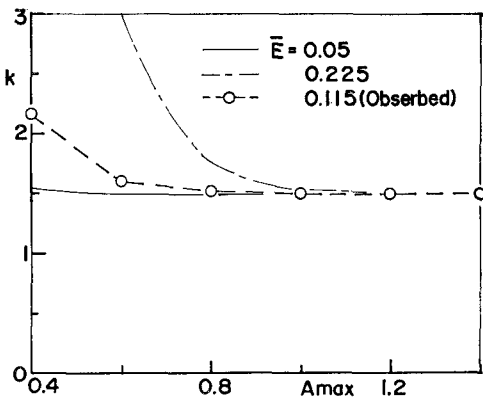


図-3 $\bar{E}$ に応じた $A_{\max}$ と k の関係

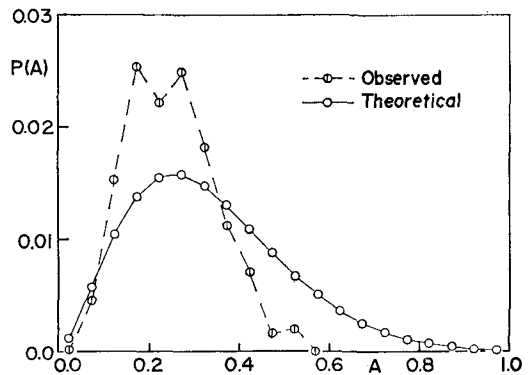


図-4 ソリトンモードに基づく現地波浪のエネルギー分布と理論分布との比較

図-4 には、式 (39) に基づくソリトンスpekトルの理論分布と前述の図-3 に用いられた観測記録 (DNO7) から求められたソリトンスpekトル分布との比較を示す。分布形状の細部に相違は見られるものの、全体的にはほぼ対応しているものと判断されることから、ソリトンモードへの遷移が十分に進んでいると考えられるうねりの場合には、ここで定義したエントロピー最大条件がエネルギー配分の支配条件になっているものと推察される。

4. 結 語

対象とする海岸波浪はソリトン構造を持つとの仮定の下に、その標本集合を局在多ソリトン系として扱い、その厳密表示を導いたのち、各ソリトンモードへのエネルギー配分を初期確率の立場からエントロピー最大条件に

よって求め、エネルギー分布関数とソリトンスpekトルが同一の関数形を持つことを示した。さらに、ソリトン構造を持つ海岸波浪に Boltzmann 定数に相当する普遍定数が存在することを示し、ソリトンスpekトルの理論分布と現地波浪の観測結果との比較をして、現地波浪におけるソリトンモードの励起機構が統計力学的手法によって取扱える可能性のあることを述べた。

参 考 文 献

- 1) 土屋義人・安田孝志・山下隆男・武山保徳： 海岸波浪のソリトンスpekトル表示，第 29 回海岸工学講演会論文集，pp. 41～45, 1982.
- 2) 土屋義人・安田孝志・山下隆男： 海岸波浪の非線形性の卓越に伴うソリトン構造への遷移について，第 30 回海岸工学講演会論文集，pp. 74～78, 1983.