

非線形分散波理論の数値的な検討

藤間 功司*・後藤 智明**・首藤 伸夫***

1. 序

昭和 58 年 5 月に発生した日本海中部地震津波では、ソリトン分裂が起こり短周期の波列が来襲した様子がカメラやビデオに多く記録された。ソリトン分裂を説明するためには、Boussinesq¹⁾、Korteweg・De Vries²⁾、Mei・LeMéhauté³⁾、Peregrine⁴⁾、角谷⁵⁾といった、いわゆる非線形分散波理論を用いる必要があるが、これらの各式はすべて波高水深比 $\epsilon (= \eta_0/H_0)$ と相対水深 $\sigma (= H_0^3/L_0^3)$ が、 $\epsilon \sim \sigma \ll 1$ 、すなわち $U_r \sim 1$ の近似で導かれており、水平床では $O(\epsilon^2)$ の精度で一致する。しかし、これら非線形分散波の式は数値計算の結果が水理実験に比べ波形分裂が早過ぎたり、浅水域への適用が困難であるといった問題点が指摘されている。本研究では、MAC 法を用いてソリトン分裂の数値計算を行ない、非線形分散波理論の精度を検討する。ただし、MAC 法の計算にも当然誤差が含まれており、その結果が必ずしも正しいとは言えないが、それに代わる計算方法が無いので、MAC 法の計算結果が正しいと見なすことにする。また、ソリトン分裂のメカニズムについても検討する。

2. MAC 法の計算方法

本計算法は、MAC 法の一つである SOLA-VOF⁶⁾に、斜面の境界条件と水表面セルでの水の授受に関して著者が工夫を加えたものである。

(1) 差分式

基本方程式は、式 (1)～(3) に示した連続の式、及び Euler の運動方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3)$$

計算領域を x 方向と z 方向に格子状に区切り、セルに対し 図-1 (a) の場所で u, w, p を定義する。式

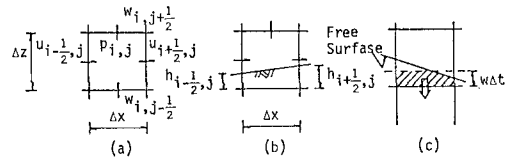


図-1 計算方法

(1)～(3) を差分化し、式 (4)～(6) を得る。ただし移流項には風上差分を用いている。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} [u_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j}] \\ & + \frac{1}{\Delta z} [w_{i, j+1/2} - w_{i, j-1/2}] = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i+1/2, j}^{n+1} = & u_{i+1/2, j}^n + \Delta t \left\{ -\frac{1}{\rho \Delta x} (p_{i+1, j} - p_{i, j}) \right. \\ & - \frac{u_{i+1/2, j}}{2} [DUL + DUR + \text{sgn}(u)] \\ & \times (DUL - DUR)] \\ & - \frac{w_{i+1/2, j}}{2} [DUB + DUT + \text{sgn}(w)] \\ & \times (DUB - DUT)] \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{i, j+1/2}^{n+1} = & w_{i, j+1/2}^n + \Delta t \left\{ -g - \frac{1}{\rho \Delta z} (p_{i, j+1} - p_{i, j}) \right. \\ & - \frac{u_{i, j+1/2}}{2} [DWL + DWR + \text{sgn}(u)] \\ & \times (DWL - DWR)] \\ & - \frac{w_{i, j+1/2}}{2} [DWB + DWT + \text{sgn}(w)] \\ & \times (DWB - DWT)] \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、DUL, DUR 等は

$$DUL = (u_{i+1/2, j} - u_{i-1/2, j}) / \Delta x$$

$$DUR = (u_{i+3/2, j} - u_{i+1/2, j}) / \Delta x$$

$$DUB = (u_{i+1/2, j} - u_{i+1/2, j-1}) / \Delta z$$

などを表す。

(2) 境界条件

底面の境界条件は、法線方向流速をゼロとするものであるが、本計算では式 (4) を用いる時に斜面セルにおいて、式 (7) を用いることとし、連続の式に組み入れ

* 学生会員 東北大学大学院工学研究科

** 正 会 員 工博 東北大学助手 工学部土木工学科

*** 正 会 員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

た形で用いている(図-1(b)参照).

$$\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1/2,j}\gamma_{i+1/2,j}-u_{i-1/2,j}\gamma_{i-1/2,j}) + \frac{w_{i,j+1/2}}{\Delta z}=0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\gamma_{i+1/2,j}=(dz-h_{i+1/2,j})/dz$$

$$\gamma_{i-1/2,j}=(dz-h_{i-1/2,j})/dz$$

自由表面での境界条件は, 水表面で圧力をゼロとするものであり, 水表面セルでの圧力は隣接するセルから直線補間で求める. また, 水表面セルでの水の授受に関しては, 例えば 図-1(c) の斜線部の水が隣接するセルへ移動すると考える.

(3) アルゴリズム

計算は次の手順で行なう. $t=n\Delta t$ 時の u と w , $t=(n-\frac{1}{2})\Delta t$ 時の p と波形が決まっているとする.

i) u, w により隣接するセル間で水を移動させ, $t=(n+\frac{1}{2})\Delta t$ 時の波形を決める.

ii) 式(5), (6) から $t=(n+1)\Delta t$ 時の u, w を求める. ただし, p は $t=(n-\frac{1}{2})\Delta t$ 時の値を用いる.

iii) この流速値は前ステップでの p の値を準用したものであり, 式(4)を厳密には満たしていない. そこで, 全てのセルで式(4)が収束条件を満たす様 p の値を変化させ繰返し計算を行ない, $t=(n+\frac{1}{2})\Delta t$ 時の p と $t=(n+1)\Delta t$ 時の u, w を決める. もちろん, i) で決めた水表面を境界条件として用いる.

3. 計算結果

図-2 に示す計算条件により数値計算を行った. 初期条件は, $x/h=10.0$ に波頂が位置する孤立波の第2次近似解を与えた. 初期波高水深比は 0.12 である. 底面形状は $x/h=0\sim 20, 30\sim 60$ が水平床, $x/h=20\sim 30$ は勾配 1/20 の一様斜面である. 計算は東北大学大型計算機センター ACOS-1000 システムにより, $t/\sqrt{h/g}=41.4$ まで行ない, 演算時間は約9時間30分であった.

計算結果を図-3(a)~(c)に示す. (a)は波形変化である. $t=40$ まで, 時間間隔 2.5 で書かれている. (b)は本計算と同じ問題を Madsen・Mei⁷⁾が Mei・LeMéhauté の式を特性曲線法を用いて数値計算を行った結果との比較である. (c)は, 本計算と Street ら⁸⁾の実験結果及び上述の Madsen・Mei の計算結果との比較である. A点, B点, C点 ($x/h=$

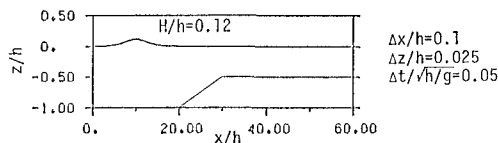


図-2 計算条件

14.65, 30.0, 41.65)での波高経時変化で示してある. A点で実験値が本計算や Madsen・Mei の計算に比べ険しい波形を示しているのは, 実験では造波装置の制約で孤立波の理論波形よりも険しい初期波形を造っているためと考えられる. C点では実験値は両計算値より緩かな波形を示しており, また両計算値を比べると, MAC 法の結果が Madsen・Mei の結果よりも緩かな波形となっている. (b)の結果とも考え合せ, 本計算は Madsen・Mei の計算に比べて分裂が遅く, 実験に比べれば分裂が早いことが分る. これは, MAC 法では従来の方法に比べ実験に近い結果を得ることができるが, 摩擦の影響を考慮していないため, 完全には一致しない, と解釈できる.

4. 非線形分散波理論の精度の検討

(1) 検討の方法

式(1)~(3)を鉛直方向に積分し, 波形連続条件と水底での条件を用いてまとめると, 式(8)~(10)を得る.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + g(h+\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz \int_{\eta}^z \frac{dw}{dt} dz + \frac{\partial h}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \frac{dw}{dt} dz \dots (9)$$

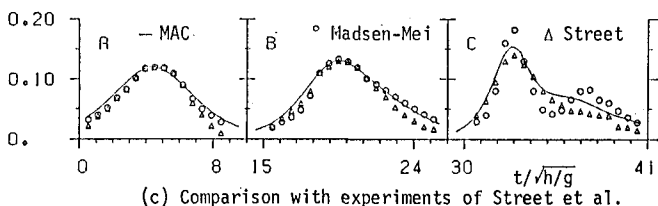
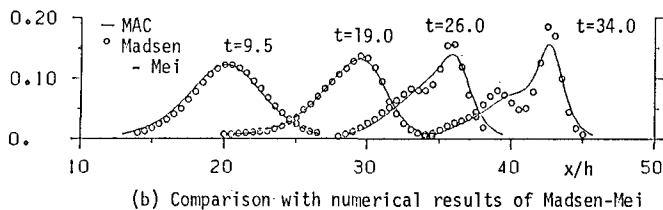
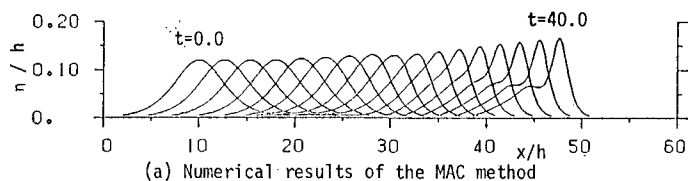


図-3 計算結果

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz \quad \dots\dots\dots (10)$$

以下、簡単のため水平床において考えることとする。 u の断面平均流速 $\bar{u}$ を導入し、

$$\bar{u} = \int_{-h}^{\eta} u dz / (h + \eta), \quad u = \bar{u} + u'$$

と書くと、式 (8)~(10) は式 (11)~(13) と書ける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u}(h + \eta)] = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\bar{u}(h + \eta)] + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u}^2(h + \eta)] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u'^2 dz + g(h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} dz \int_{\eta}^z \frac{dw}{dt} dz \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} [\bar{u}(h + z)] - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u' dz \quad \dots\dots\dots (13)$$

式 (12) の左辺 (第2項+第3項) が移流項、第4項は静水圧の項 (便宜上、線形項と呼ぶ)、右辺は圧力の静水圧とのずれを表わす項である。右辺から分散項が生ずる (ここでは、右辺そのものも分散項と呼ぶことにする)。

Peregrine の式を式 (11), (12) と同じ形で表わすと、連続の式は全く同じで、運動の式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\bar{u}(h + \eta)] + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{u}^2(h + \eta)] + g(h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & = (h + \eta) \left\{ \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 dz \int_0^z \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} dz \right\} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{w}$ は式 (13) の右辺第1項を表わしている。式 (14) の右辺を $\bar{u}$ で表現すると、次式の分散項となる。

$$(h + \eta) \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2}$$

式 (12), (14) の移流項・分散項を MAC 法で計算された u, w, p, η を用いて (式 (14) では $\bar{u}$ を求めて) 各々評価し、両者の差を調べることにより非線形分散波理論式の精度を検討する。

(2) 結 果

結果を図-4 (a)~(c) に示す。(a) は $t=2.5$ の時のもので、まだ斜面に乗り上げる前で孤立波の状態を保っている。(b) は $t=30$ で、斜面を越えた後である。(c) は $t=40$ である。各々、上段に書かれているのが η 、中段は式 (12) の線形項・移流項・分散項をまとめて書いてある。下段は (12), (14) 式の移流項・分散項の比較である。また、各図はそれぞれの図中の最大値を 1 として規格化して書いている。それぞれの最大値は、各図の縦軸の横に示した。

下段の図に注目すると、 $t=2.5$ から $t=40$ にかけて移流項も分散項も式 (12) と (14) の差は増大する傾向がある。しかし、移流項の誤差は本計算範囲では高々 2~3% であり、式 (14) は良好な近似と言える。分散項の誤差は $t=40$ で最大約 10% である。分散項を過少評価している量と線形項の最大値を比べると、 $t=2.5$ で 1% 未満、 $t=40$ では約 3% となる。従って、非線形分散波理論の式の精度について、次の様にまとめられる。

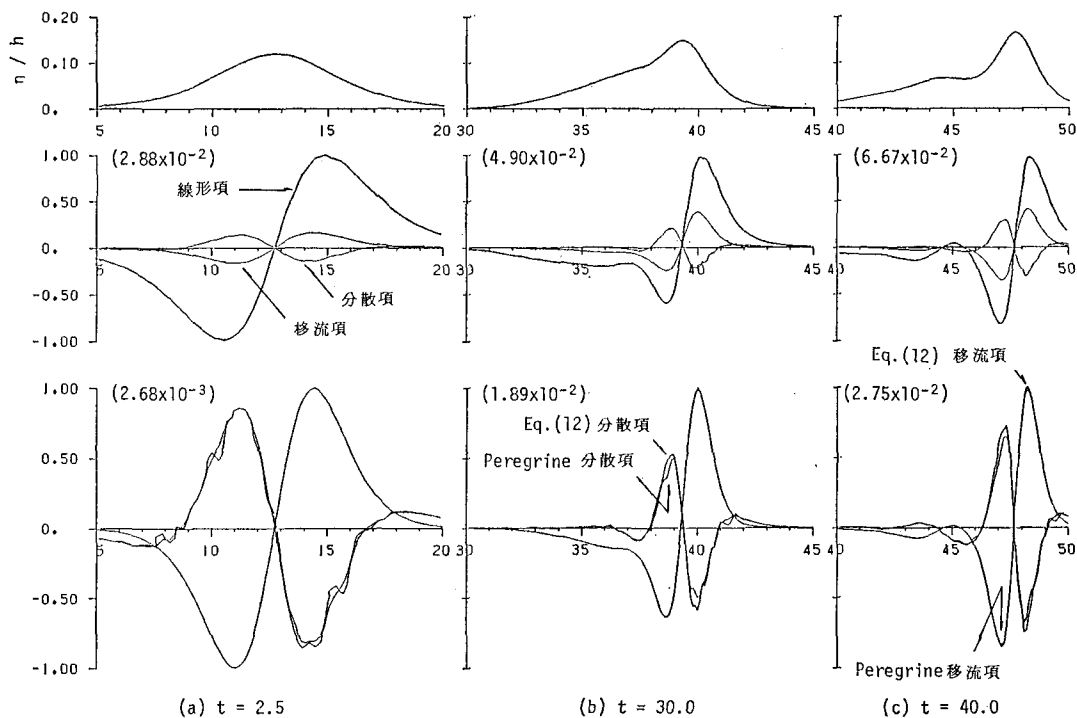


図-4 分裂機構及び非線形分散波理論の精度

i) 移流項の近似誤差は、本計算範囲では高々2~3%であった。

ii) 分散項は $t=40$ で最大時 10% 過少評価している。この時、分散項を過少評価した量は線形項の最大値に対して約 3% に相当する。

(3) ソリトン分裂の機構

現在までのところ、ソリトン分裂の機構については明解な説明はなされていない様である。Peregrine⁹⁾は、波の峰と谷の圧力の静水圧との差に基いて簡単に説明したが、室田・岩田¹⁰⁾が指摘した通り、これは厳密には不合理である。また、室田・岩田の説明によれば、波は

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \text{const.}$$

を満たしながら変形する。しかし、波峰の曲率が負の部分で、曲率が益々負の方向に大きくなる(すなわち、波高が増大する)様に変化する必然性は全くない。仮にその説明に従えば波峰は常に成長することになり、保存波は存在しないことになってしまう。

分裂機構を、図-4 中段の図から説明する。図は運動の式の各項を書いたもので、 $\partial\eta/\partial t$ について書いたものではないが、Peregrine の式のオーダーでは、第2次近似にあたる移流項・分散項は

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial x}$$

と書き換えられるので、これを用いて $\partial(\bar{u}(h+\eta))/\partial t$ を連続の式に代入すれば、結局、図-4 の各項が $\partial\eta/\partial t$ に対して作用すると考えても、ほぼ間違いではない。

図-4 (a) の状態では、波頂で3項とも値がゼロであるので波頂では $\partial\eta/\partial t=0$ で、波高は変わらない。また、移流項と分散項はほぼ完全にキャンセルし、波形そのものも変化しない。(b)は斜面の影響で波形が前傾し、分散項の位相がずれている。これは、波形前傾の影響により $\partial\eta/\partial x=0$ なる点と $\partial^2\eta/\partial x^2=0$ なる点がずれている、すなわち曲率の最大となる点が波頂より前に出ていることを示している。この分散項のゼロ点のずれにより、波頂での分散項は $\partial\eta/\partial t$ を正にする値をとり、波高は増大する。また、本問題では、斜面通過直後、波頂背後の波形が直線に近いので、線形項と移流項は波頂背後の傾きをより緩かにする様に働くが、分散項は波頂付近で正に働いており、分散項がゼロから負に転じる付近では周囲よりも大きく波高が減少することになる。これが第2波目が形成される原因となる。一般に、このような場所は波形が特別な場合を除いては存在すると考えられ、このような場所を生じさせない場合は、波形が孤立波やクノイド波になっている場合であり、波頂背後の波形は変化せず、そのまま進行することになる。図-4 (b)~(c) にかけて、同じ機構によりソリトン分裂が進行している。結局、ソリトン分裂の機構は、次の様にまとめられる。

i) 第1波の波高増幅は、分散項の位相のずれに起因する。

ii) 第2波の形成は、波頂背後に移流項と分散項の和として、周囲よりも大きく波高が減少する場所が生ずるからである。本計算で扱った問題では、斜面を乗り越えた直後に、たまたま波頂背後の波形が直線に近かったので、その場所は分散項がゼロから負に転じる付近であった。

(4) 非線形分散波理論が早い分裂を与える理由

非線形分散波理論式を数値計算すると、実験値に比べ分裂が早い結果を与える傾向にあることは従来より指摘されている。その理由として、例えば『計算値において分散の効果がより著しく、これを抑制する非線形効果が小さく見込まれている¹¹⁾』の様に言われていたが、4. (2) で述べた結果によれば実際にはその逆で、Peregrine など非線形分散波理論調の分散項は過少評価となっている。4. (3) で述べた通り、波高の増大する理由は、波頂で分散項が正の値をとることであるから、分散項を過少評価した方が波高が増大する結果を与える(実際には波頂付近の分散項の値は、ほとんど同じ)という事は一見矛盾している様に見えるが、そうではない。波頂で分散項が正となるのは、波形が前傾化しているからである。図-3 (b) から分る様に分散項が過少評価だと波形は実際よりも前傾化する様に計算されてしまい、波が水平床に乗り上げた時には、Peregrine の式の方が分散項が大きくなる波形を作っていることになる。それに対し、実際には Peregrine で作られた波形に比べ、分散項が小さくなる波形となっているため、トータルの波高増幅としては Peregrine の方が大きくなるのであろう。

逆に、分散項を

$$\frac{1}{3}(h+\eta)^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2}$$

の様に評価すると、40% 近くも過大評価となるが、斜面を乗り越えた後でも波形はあまり前傾化せず、分散項の効果が大きくなり波高に計算される。その様な波形であるにもかかわらず分散項を過大評価しているために結局、波高の増幅に関してのみ言えば、本計算で取り上げた問題では、むしろ Peregrine の式よりも MAC 法に近い結果となる(波速は多少遅れる)。しかし、いずれにしても結果が MAC 法に比べ異なるのは、分散項の近似の精度に問題がある。

5. 結 論

主要な結論を列挙する。

(1) 本研究で用いた MAC 法は、従来の SOLA-VOF 法に著者らが若干の工夫を加えたものであるが、これにより精度の良いソリトン分裂の計算ができる。

(2) ソリトン分裂は次の様にして生ずる。第1波の波

高増幅は分散項の位相のずれが原因である。第2波の形成は、第1波背後で移流項と分散項の和として周囲より波高が大きく減少する場所が生ずるからである。

(3) 非線形分散波式の移流項の誤差は高々 2~3% であったが、分散項の誤差は最大 10% に達する。

(4) 従来の非線形分散波式で分裂が早過ぎるのは分散項を過少評価しているために実際よりも前傾化した波形が計算されるためである。

参 考 文 献

- 1) Boussinesq, J.: Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal de vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, Liouvillés J. Math. 17, pp. 55~108, 1872.
- 2) Korteweg, D. J. and G. De Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. S. 5, Vol. 39, No. 240, 1895.
- 3) Mei, C. C. and B. Le Méhauté: Note on the equation of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol. 71, No. 2, pp. 393~400, 1966.
- 4) Peregrine, D. H.: Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol. 27, part 4, pp. 815~827, 1967.
- 5) Kakutani, T.: Effect of an uneven bottom on gravity waves, J. Phys. Soc. in Japan, Vol. 30, 1971.
- 6) Nichols, B. D., C. W. Hirt and R. S. Hotchkiss: SOLA-VOF: A Solution Algorithm for Transient Fluid Flow with Multiple Free Boundaries, Los Alamos Sci. Labo. Rep. LA-83355, 1980.
- 7) Madsen, O. S. and C. C. Mei: The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, J. Fluid Mech., vol. 39, part 4, pp. 781~791, 1969.
- 8) Street, B. L., S. J. Burges and P. W. Whitford: Dept. Civ. Engng., Stanford Univ. Tech. Rep. No. 93, 1968.
- 9) Peregrine, D. H.: Calculations of the development of an undular bore, J. Fluid Mech., Vol. 25, part 2, 1966.
- 10) 室田 明・岩田好一朗: 段波の変形に関する研究, 土木学会論文集, 第160号, pp. 49~58, 1968.
- 11) 岩崎敏夫: ソリトン分裂——分散波動論——, 1979年度(第15回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B-5, 1979.