

傾斜海浜上の非線形 Schrödinger 方程式

土屋 義人*・安田 孝志**・山下 隆男***・平本 高志****

1. 緒 言

非線形波動において、厳密な意味での分散関係の定義はなされていないが、非線形波動の位相速度が波数または角周波数に依存するものを分散関係と考えることにすれば、海岸波浪は代表的な非線形分散波であるといえよう。最近 20 年間における非線形波動に関する研究の進展は目ざましく、約 10 年前に非線形波動の変調現象が非線形 Schrödinger 方程式で記述されることが示された。

波動の非線形変調に関する研究は、共鳴干渉理論¹⁾に始まり、Benjamin & Feir の変調不安定説²⁾の理論的取扱いにおける特異摂動法^{3),4)}と Whitham の平均操作法^{5),6)}の 2 通りの手法によって研究が進展し、振幅がゆるやかに変化する場合の wave envelope の共鳴干渉が非線形 Schrödinger 方程式で定式化される⁷⁾ことがわかってきた。

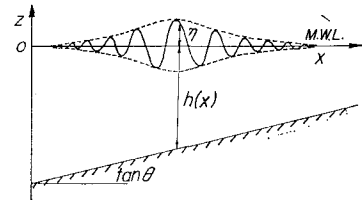
さらに、Whitham の平均操作法は特異摂動法のひとつである微分展開法の低次近似で一致することが示され⁸⁾、今日では永年項を生じ易い異なるスケールの混在する非線形問題には、微分展開法のひとつである multiple-scale method が一般的に用いられるようになってきた。

本研究では、波群を形成する波浪が傾斜海浜上に侵入する場合の波群の変形を解析する基礎方程式として、multiple-scale method を用いて傾斜海浜上での非線形 Schrödinger 方程式を誘導し、この方程式の特性を検討する。

2. 非線形 Schrödinger 方程式の誘導

図一に示す座標系と記号を用い、完全流体を仮定すると、基礎方程式および境界条件は、以下のように与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$



図一 座標系と記号

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} = 0 \Big|_{z=\eta} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Big|_{z=\eta} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Big|_{z=-h} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 ϕ は速度ポテンシャルである。式 (2) および (3) から η を消去し、 $z=0$ の回りに Taylor 展開すると、自由表面における境界条件として、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \eta \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \\ & + 2 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \\ & + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \dots \\ & + 2\eta \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \dots = 0 \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

以上の基礎方程式および境界条件は、波動場を記述する方程式系であるが、自由表面における境界条件は非線形であるため、Mei にならって multiple-scale method⁹⁾ を適用する。すなわち、微小パラメーター ε を用いて、次のようなスケールの異なる時空間の独立変数を定義する。

$$x_i = \varepsilon^i x, \quad y_i = \varepsilon^i y, \quad t_i = \varepsilon^i t \quad \dots\dots\dots (6)$$

これらを用いて未知数を次のように摂動展開する。

$$\phi = \sum \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum \varepsilon^n \eta_n, \quad h = h(x_2), \quad k = k(x_2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
 ** 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科
 *** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所
 **** 正会員 工修 川崎製鉄(株)エンジニアリング事業部

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \phi_n(x, x_1, x_2, \dots, z, t, t_1, t_2, \dots) \\ \eta_n &= \eta_n(x, x_1, x_2, \dots, z, t, t_1, t_2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ただし、水深 h および波数 k は $O(\varepsilon^2)$ でゆるやかに変化するものと仮定する。通常の摂動法と同様に、永年項が生じない条件を用いて微小パラメータ ε の次数毎に計算を進めて、摂動解を求める。式(7)を式(1)、(4)および(5)に代入して、 $O(\varepsilon^3)$ まで展開する。これらを系統的に展開するため、それぞれ次のような関数 F_n, G_n, B_n を定義する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_n = F_n, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_n = G_n, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial z} = B_n \Big|_{z=-h}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

ここで、速度ポテンシャル ϕ_n は、搬送波が調和成分 $e^{im\theta}$ で分離して表せるとすれば、 F_n, G_n についても同様で、 ϕ_n, F_n, G_n は次式のようになる。

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^n e^{im\theta} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\} \quad (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{n-m} &= \phi_{nm}^* \\ \phi_{nm} &= \phi_{nm}(x_1, x_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \\ F_{nm} &= F_{nm}(x_1, x_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \\ G_{nm} &= G_{nm}(x_1, x_2, \dots, z, t_1, t_2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

式(12)を式(9)~(11)に代入すれば、次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{nm} = F_{nm} \quad (14)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{nm} = G_{nm} \Big|_{z=0} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_{nm}}{\partial z} &= 0 \Big|_{z=-h}, & n=1, 2 \\ \frac{\partial \phi_{nm}}{\partial z} &= i \frac{\partial h}{\partial x_2} m k \phi_{1m} \Big|_{z=-h}, & n=3 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

以上の諸式(14)~(16)を ε の次数 n と調和成分項の次数 m について $O(\varepsilon^3)$ まで表示すると、次のようになる。

1) $O(\varepsilon)$ の場合

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{1m} = 0 \quad (17)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{1m} = 0 \Big|_{z=0} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi_{1m}}{\partial z} = 0 \Big|_{z=-h} \quad (19)$$

$$m=0;$$

$$\phi_{10} = \phi_{10}(x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots) \quad (20)$$

$$m=1;$$

$$\phi_{11} = \frac{g \cosh k(h+z)}{2\omega \cosh kh} iA \quad (21)$$

ここに、 ω は角周波数であり、線形の分散関係 $\omega^2 = gk \tanh kh$ を用いると、 ϕ_1 および η_1 が求まる。

2) $O(\varepsilon^2)$ の場合

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{2m} \\ &= \frac{g \cosh k(h+z)}{\omega \cosh kh} \left(-k \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} + \text{C.C.} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{2m} = G_{2m} \Big|_{z=0} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \phi_{2m}}{\partial z} = 0 \Big|_{z=-h} \quad (24)$$

$$m=0;$$

$$\phi_{20} = \phi_{20}(x_2, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots) \quad (25)$$

$$m=1;$$

$$\phi_{21} = -\frac{\omega(h+z) \sinh k(h+z)}{2k^2 \sinh kh} \frac{\partial A}{\partial x_1} \quad (26)$$

$$m=2;$$

$$\phi_{22} = -\frac{3\omega \cosh 2k(h+z)}{16 \sinh^4 kh} iA^2 \quad (27)$$

これより、次の解が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_{20} - \frac{\omega k(h+z) \sinh k(h+z)}{2k^2 \sinh kh} \\ &\quad \times \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} + \text{C.C.} \right) \\ &\quad - \frac{3\omega \cosh^2 k(h+z)}{16 \sinh^4 kh} \left(iA^2 e^{i2\theta} + \text{C.C.} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= -\left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_0}{\partial t_1} + \frac{k|A|^2}{2 \sinh 2kh} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\omega} \left(i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} + \text{C.C.} \right) \\ &\quad - \frac{h \sinh kh}{2k \cosh kh} \left(i \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} + \text{C.C.} \right) \\ &\quad + \frac{3k \cosh kh}{16 \sinh^3 kh} (2 \cosh^2 kh + 1) \\ &\quad \times (A^2 e^{i2\theta} + \text{C.C.}) \quad (29) \end{aligned}$$

ただし、式(26)を求める場合、永年項が生じないための条件として、次式を用いてある。

$$\int_{-h}^0 \phi_{21} \cosh k(h+z) dz = 0 \quad (30)$$

3) $O(\varepsilon^3)$ の場合、同様に次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{3m} = F_{3m} \quad (31)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{3m} \Big|_{z=0} = G_{3m} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \phi_{3m}}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{1m}}{\partial x} \Big|_{z=-h} \dots\dots\dots (33)$$

したがって, $m=0$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - gh \frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial x_1^2} &= \frac{\omega^3 \cosh^2 kh}{2k \sinh^2 kh} \frac{\partial}{\partial x} (AA^*) \\ &\quad - \frac{\omega^2}{4 \sinh^2 kh} \frac{\partial}{\partial t_1} (AA^*) \end{aligned} \dots\dots\dots (34)$$

また, $m=1$ に対して, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} F_{31} &= \frac{i\omega}{k \sinh kh} \left\{ k(h+z) \sinh k(h+z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cosh k(h+z) \right\} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \\ &\quad - \frac{\omega \cosh k(h+z)}{\sinh kh} \frac{\partial A}{\partial x_2} \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned} G_{31} &= \frac{\omega^3 k \cosh k(h+z)}{16 \sinh^5 kh} \\ &\quad \times [\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh] i |A|^2 A \\ &\quad - \frac{\omega k}{\sinh 2kh} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t} - \frac{2\omega \cosh^2 kh}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) i A \\ &\quad + \frac{i\omega \cosh kh}{2k \sinh kh} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - i \frac{h\omega^2}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial t_1} \\ &\quad + \frac{\omega^2 \cosh kh}{k \sinh kh} \frac{\partial A}{\partial t_2} \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

ただし, 式 (30) の条件は,

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 F_{31} \cosh k(h+z) dz \\ = \frac{\cosh kh}{g} G_{31} + \frac{gk}{2\omega \cosh kh} \frac{dh}{dx_2} A = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

式 (37) を式 (35) および (36) に代入して, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + c_g \frac{\partial}{\partial x_1} \right) A + i\epsilon \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right. \\ + \frac{\omega k^2 (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh)}{16 \sinh^4 kh} |A|^2 A \\ - \left(\frac{k^2}{2\omega \cosh^2 kh} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t} - k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial x_1} \right) A \\ \left. - \frac{i\omega}{\epsilon \sinh 2kh} \frac{dh}{dx_2} A \right\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

ここに,

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \omega}{dk^2} \right) = \frac{c_g}{2\omega} - \frac{\omega h \cosh^2 kh}{k \sinh 2kh} + \frac{h \sinh kh}{\omega \cosh kh} c_g \dots\dots\dots (39)$$

さらに,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\epsilon} \int \frac{dx_2}{c_g(x_2)} - t_1 \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int \frac{dX}{c_g(X)} - t_1 \\ X &= \epsilon^2 x = \epsilon x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

による変数変換を行い, 式 (34) の関係を用いると, 式

(38) は, 次のように変形される.

$$-i \frac{\partial A}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \beta |A|^2 A + \gamma A = 0 \dots\dots (41)$$

ここに,

$$\alpha = \frac{1}{2c_g^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \dots\dots\dots (42)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega k^2 (\cosh 4kh + 8 - \tanh^2 kh)}{16 \sinh^4 kh} \\ &\quad - \frac{\omega (2\omega \cosh^2 kh + kc_g)^2}{2 \sinh^2 2kh (gh - c_g^2)} \end{aligned} \dots\dots\dots (43)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{S(X)k}{2\omega c_g \cosh^2 kh} (2\omega \cosh^2 kh + kc_g) \\ &\quad - \frac{i\omega}{\epsilon \sinh^2 kh} \frac{dh}{dX} \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

この式は, 水深変化を考慮した非線形 Schrödinger 方程式である.

いま, 一様な傾斜海浜を考え, 水深 h を,

$$h = h_0 - \epsilon X \tan \theta \dots\dots\dots (45)$$

で表わし,

$$A = B \exp \left(- \int \gamma dX \right) \dots\dots\dots (47)$$

とおけば, 式 (41) は, 次式のように変形される.

$$i \frac{\partial B}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + \beta |B|^2 B = 0 \dots\dots\dots (47)$$

これが, 一様な傾斜海浜上の非線形 Schrödinger 方程式である. ただし, A および B の関係は, 次式で表される.

$$\begin{aligned} A &= B \exp \left\{ -i \int \frac{S(X)k(X)}{2\omega c_g \cosh^2 kh} \right. \\ &\quad \times (2 \cosh^2 kh + kc_g) dz \Big\} \\ &\quad \times \exp \left(\int \frac{\omega \tan \theta}{\sinh 2kh} dX \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

式 (48) でアンダーラインを施した部分が shoaling 効果を表わす.

3. 傾斜海浜上における包絡波形的変形

前述した一様な傾斜海浜上の非線形 Schrödinger 方程式を数値計算することにより, 波群構造をもつ波浪の伝播特性を調べる. すなわち, 包絡ソリトンの伝播を表わす非線形 Schrödinger 方程式を次式のように, 差分化する.

$$\begin{aligned} B_j^{n+1} &= B_j^n - \Delta X \left\{ \frac{i\alpha}{\Delta \xi^2} (B_{j+1}^{n+1} - 2B_j^{n+1} + B_{j-1}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + i\beta |\tilde{B}_j^{n+1}|^2 B_j^{n+1} \right\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (49)$$

これを, 両端境界で $B=0$ として, 陰解法によって数値計算を行う. 式 (49) は, 群速度 c_g で働く座標系からみた時間波形的空間発展の方程式となっている.

以下では, 計算結果の数例を示す. 初期包絡波形とし

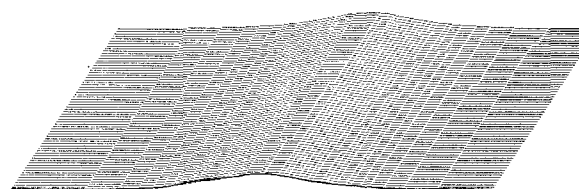
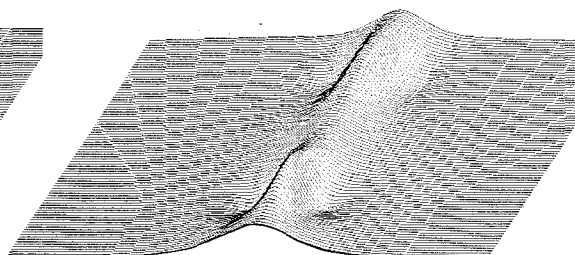
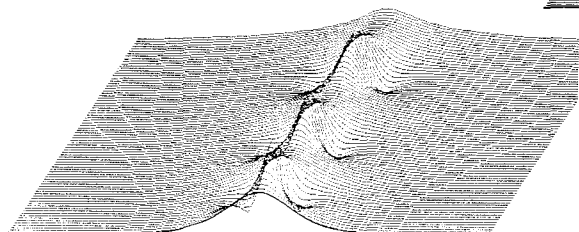
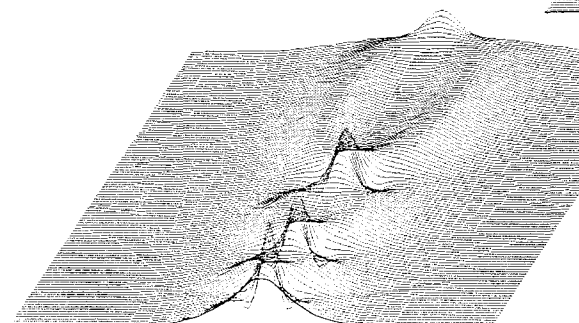
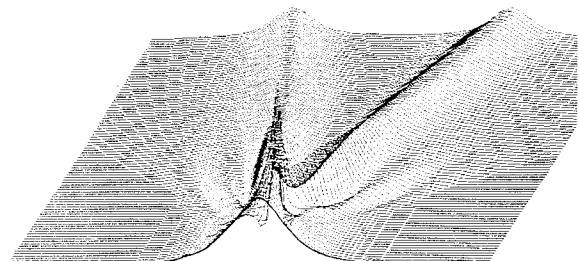
(a) $A_0=0.5$ m(b) $A_0=1$ m(c) $A_0=1.3$ m(d) $A_0=2$ m(e) $A_0=3$ m

図-2 初期包絡波高による包絡波形の変形特性

ては、振幅 A_0 の sech 型の波形を与え、初期水深 $h_0 = 20$ m、海底勾配 0.01 および包絡波形の波長 $L = 400$ m として、 A_0 の値を変化させた場合の計算結果を図一

図-3 包絡波形の変化に及ぼす海底勾配の影響

2 に示す。図中、太線は初期包絡波形の片振幅を示し、細線でそれが伝播に伴って変形する様子を示している。一連の数値計算の結果から、初期振幅の与え方によって、(i) 安定な形で伝播する場合、(ii) 再帰性を有する場合および (iii) 分裂する場合に分類されることがわかった。ただし、この図には、式 (48) で表される shoaling の効果は含まれていないので、実際には図より若干振幅が増大することになる。

図-2 (a) に示した $A_0 = 0.5$ m の場合は、安定な形で伝播する場合の計算結果で、(b)、(c) に示した $A_0 = 1.3$ m および 1.5 m の場合では再帰性を伴いながら変形、伝播することがわかり、(d) に示した $A_0 = 2$ m の場合では、2 包絡ソリトンに、さらに (e) の $A_0 = 3$ m の場合は、3 包絡ソリトンに分裂し、伝播に伴ってその間隔が広がっていくことがわかる。

一方、図-3 は海底勾配の効果を調べるため、それを 2 通りに変化させた場合の計算結果であり、勾配の緩やかな $\tan \theta = 0.01$ の場合には、再帰性がみられるが、勾配の急な $\tan \theta = 0.05$ の場合では、一担尖鋭化した後、包絡波形が次第に平坦化していくことがわかる。

以上示した数値計算の結果は、搬送波は線形として、初期包絡波形としては sech 型の任意波形を与えて計算を行ったものであり、浅海域における波群特性を直接シミュレーションしたものとはいえない。しかし、ここで得られた数値計算の結果は、浅海域で観測された波浪のデータにもよくみられるような波群特性や

その分裂現象の複雑さと特徴ある変形の実態と比較して極めて興味深い。

4. 結 語

以上, multiple-scale method を用いて傾斜海浜上における非線形 Schrödinger 方程式を誘導し, それに基づいた若干の数値計算結果について述べた. その結果, 深海から浅海に至る海岸波浪の場の方程式, 非線形 Schrödinger 方程式の持つ役割がきわめて大きいことを再認識することができた. 今後は, 搬送波の非線形性が卓越する場合に拡張し, 波群の崩壊過程を究明していく必要がある.

参 考 文 献

- 1) Benney, D. T.: Nonlinear gravity waves interactions, Jour. Fluid Mech., Vol. 14, pp. 577~584, 1962.
- 2) Benjamin, T. B. and J. E. Feir: The disintegration of wave trains on deep water, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 417~430, 1967.
- 3) Hashimoto, H. and H. Ono: Nonlinear modulation of gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, No. 3, pp. 805~811, 1972.
- 4) Davey, A. and K. Stewartson: On three-dimensional packets of surface waves, Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 338, pp. 101~110, 1974.
- 5) Whitham, G. B.: A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, Jour. Fluid Mech., Vol. 22, pp. 273~283, 1965.
- 6) Chu, V. H. and C. C. Mei: On slowly varying Stokes waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 837~887, 1970.
- 7) Benney, D. J. and G. Roskes, Stud. Appl. Meth., Vol. 48, pp. 377, 1969.
- 8) Lighthill, M. J.: Some special cases treated by the Whitham theory, Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 299, pp. 28~53, 1967.
- 9) Mei, C. C.: The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, Wiley-Interscience, 740 p., 1983.