

流れ関数による波と流れとの相互作用の解析

堀 口 孝 男*

1. 流速分布と摂動法の表示

静水面上で波の進行方向に x 軸をとり、 z 軸を鉛直上方にとる一様水深の水路において、水平流速の鉛直分布が表面で最大の値をとるものとして、 z の 2 次形式もしくは対数形式の分布は次のように表わすことができる。

$$u_0 = U_0 \left\{ 1 - \frac{z^2}{h^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u_0 = U_0 \frac{\log(h+1+z)}{\log(h+1)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで h は水深を示し、 $z=-h$ では $u_0=0$ となること表わしている。 u_0 は x に関して一様で、これによる水面勾配は十分に小さいものとして、 $h=\text{Const}$ と近似的に取扱い、鉛直流速 w_0 は無視する。 x によって流速が変化する場合には、変化する流速を u'_0, w'_0 、圧力を p'_0 とおき、密度 ρ を一定とすると、連続式と運動方程式とは次のようになる。

$$\frac{\partial u'_0}{\partial x} + \frac{\partial w'_0}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$u_0 \frac{\partial u'_0}{\partial x} + w'_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_0}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$u_0 \frac{\partial w'_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_0}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$z=0$ の表面において、 η'_0 を水位変化を示す量とすると、

$$u_0 \frac{\partial \eta'_0}{\partial x} = w'_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$u_0 \frac{\partial p'_0}{\partial x} - \rho g w'_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

また $z=-h$ の底面において、

$$u'_0 = 0, \quad w'_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

である。式 (4) を式 (7) へ代入することにより、

$$\{w'_0\}_{z=0} = - \left\{ \frac{u_0^2 \frac{\partial u'_0}{\partial x}}{u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} + g} \right\}_{z=0} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。式 (3) より $u'_0 = - \int \frac{\partial u'_0}{\partial x} dz + \text{Const}$ と積分を行ない、式 (8)、(9) を考慮して Const を定めれば w'_0 を決定することができる。いま u_0 に式 (1) の 2 次形

式を用い、それに準じて u'_0 も 2 次形式として

$$u'_0 = U(x) \left\{ A + Bz - \frac{z^2}{h^2} \right\}$$

とおくならば、 A, B は上述の方法から決定されて次のように表わされる。

$$u'_0 = -U(x) \left\{ \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{U_0^2}{gh}}{\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh}} \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$w'_0 = \frac{\partial U}{\partial x} \left\{ \frac{U_0^2}{gh} \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} + \frac{z}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{U_0^2}{gh}}{\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh}} \frac{z^2}{2h} + \frac{z^3}{3h^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

また水面勾配は式 (6) より

$$\frac{\partial \eta'_0}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{U_0}{g} \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。これらの式に含まれる $\frac{U_0^2}{gh}$ は基本流 u_0 の表面におけるフルード数に関係している。

以上の結果を用いて波と流れとの相互作用を解析する場合、次のような摂動法の表現を適用し、微小量のオーダーを示すパラメーターを ϵ, β とするとき、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \beta u'_0 + \epsilon u_1 + \epsilon \beta u_2 + \dots \\ w &= \beta w'_0 + \epsilon w_1 + \epsilon \beta w_2 + \dots \\ \eta &= \beta \eta'_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon \beta \eta_2 + \dots \\ p &= p_0 + \beta p'_0 + \epsilon p_1 + \epsilon \beta p_2 + \dots \\ p_0 &= -\rho g z \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と表わすことができる。ここで suffix の 1 は u_0 による波の挙動を示し、suffix の 2 は、さらに u'_0, w'_0 が加わった場合の挙動を示すことに対応している。

2. $u'_0=0$ の場合の解析

この場合には ϵ の 1 次のオーダーで検討することになる。かかるとき、連続式と運動方程式とは次のように表わされる。

* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (16)$$

境界条件は $z=0$ において、同様に ε の 1 次オーダーで

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = w_1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{Dp_1}{Dt} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$z=-h$ において

$$w_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

いま、流れ関数を Ψ_1 とするとき、これを次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \phi_1(z) \sinh k_1(h+z) e^{i(k_1 x - \sigma t)} \\ u_1 &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \quad w_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式 (15) を z で微分し、式 (16) を x で微分して式 (14) を考慮するならば

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial z} + u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + w_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial t \partial x} + u_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

が導かれ、これに式 (20) を代入すると、

$$\begin{aligned} & (c_1 - u_0) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \\ & + 2k_1(c_1 - u_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \\ & + \phi_1(z) \sinh k_1(h+z) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで $\sigma = k_1 c_1$ で、 c_1 は u_0 があるときの波の伝播速度を示している。

式 (22) の方程式は $c_1 \neq u_0$ となるため、 z の $-h < z \leq 0$ の範囲で、 z の正則点となり、 $\phi_1(z)$ の z に関する級数解は次のように示すことができる。

$$\phi_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad \dots\dots\dots (23)$$

式 (23) において、 a_0, a_1 は境界条件から決定される任意定数である。ところで式 (18) は波速 c_1 を決定する方程式で、 x の関数となっている。これを x で微分し、式 (15)、(16) の $z=0$ における値を考慮し、式 (20)、(23) の表現を用いて演算を進めると、次の方程式に導かれる。

$$\begin{aligned} & \{c_1 - (u_0)_{z=0}\}^2 \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{\tanh k_1 h}{k_1} \right\} \\ & + \{c_1 - (u_0)_{z=0}\} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)_{z=0} \frac{\tanh k_1 h}{k_1} \\ & = \frac{g}{k_1} \tanh k_1 h \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

いま流速 u_0 が存在しないときは、 $u_0=0, c_1 \rightarrow c_0, k_1 \rightarrow k_0$ に帰着し、式 (24) は

$$c_0^2 \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{\tanh k_0 h}{k_0} \right\} = \frac{g}{k_0} \tanh k_0 h$$

となる。一方、微小振幅波においては、

$$c_0^2 = \frac{g}{k_0} \tanh k_0 h$$

となる故に、任意定数の一つ a_1 は $a_1=0$ となることが判明する。したがって式 (24) より

$$\begin{aligned} c_1 &= (u_0)_{z=0} + \sqrt{\frac{g}{k_1} \tanh k_1 h} \\ & \times \sqrt{1 + \frac{1}{4g} \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)_{z=0}^2 \cdot \frac{\tanh k_1 h}{k_1} \right\}} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)_{z=0} \cdot \frac{\tanh k_1 h}{k_1} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

という結果が得られる。

式 (17) は波形を求めるのに用いられ、

$$\eta_1 = A_1 e^{i(k_1 x - \sigma t)}$$

とおくとき、式 (20)、(23) を代入すると

$$A_1 = -\frac{a_0 \sinh k_1 h}{c_1 - (u_0)_{z=0}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

いま、 $u_0=0$ ならしめると、 A_1 は流れのないときの振幅 A_0 となり、

$$A_0 = -\frac{a_0 \sinh k_0 h}{c_0}$$

すなわち、任意定数の a_0 は

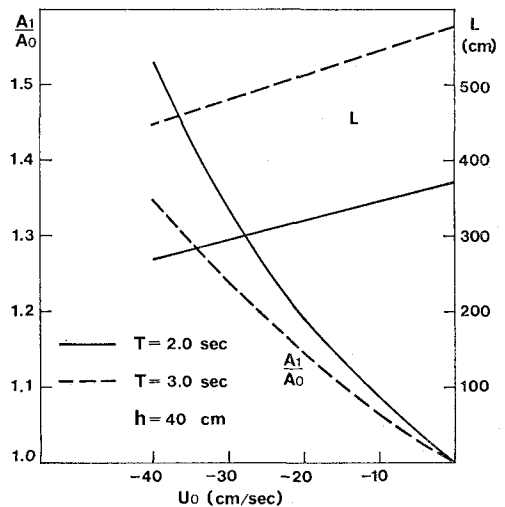
$$a_0 = -\frac{A_0 c_0}{\sinh k_0 h} \quad \dots\dots\dots (27)$$

と決定される。これより A_1 は、

$$A_1 = \frac{c_0}{c_1 - (u_0)_{z=0}} \frac{\sinh k_1 h}{\sinh k_0 h} A_0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

と示される。

式 (27) から求まる a_0 を用いるとき、式 (22)、(23) より級数解の各係数が求められる。たとえば、 u_0 に式 (1) の 2 次形式を用いれば、



図—1 流れをさかのぼる波の振幅と波長の変化

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{U_0}{h^2(c_1 - U_0)} a_0 \\ a_3 &= -\frac{2}{3} \frac{U_0}{h^2(c_1 - U_0)} \frac{k_1 a_0}{\tanh k_1 h} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

などである。

式(25)の計算には逐次近似法を用いる。まず右辺の k_1 に k_0 を代入して c_1 を算定し、次に $\sigma = k_1 c_1$ から k_1 を求め、この k_1 を再び式(25)へ代入する。かくして得られた c_1 から k_1 を算定して同様な操作を繰返す。10 回程度の iteration で値は確定する。図-1 は、水深 $h=40$ cm, 周期 $T=2.0$ 秒, 3.0 秒 の波が流れをさかのぼる場合、その振幅の増大と波長の変化を示したものである。流速分布は式(1)を用いている。

3. $u'_0 \neq 0$ の場合の解析

$\varepsilon\beta$ のオーダーの項の検討が、さらにこの場合には必要となる。連続式と運動方程式は、

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u'_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u'_0}{\partial x} + w'_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ + w_1 \frac{\partial u'_0}{\partial z} + w_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x} + u'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial w'_0}{\partial x} + w'_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ + w_1 \frac{\partial w'_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

非圧縮性の条件を考慮して、式(21)を導いたのと同様な操作を行なうと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial z} + u_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} + w_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t \partial x} - u_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \\ - u'_0 \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right\} + w_1 \frac{\partial^2 u'_0}{\partial z^2} \\ + w'_0 \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right\} - u_1 \frac{\partial^2 w'_0}{\partial z^2} \\ + w_1 \frac{\partial^2 u'_0}{\partial x^2} - u_1 \frac{\partial^2 w'_0}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

が得られる。繁雑を避けるために u_0, u'_0 には式(1), (10)の2次形式を採用し、また式(10)の $U(x)$ は線形的に変化するものとして、

$$U(x) = U_1 \cdot x, \quad U_1 \text{ は正, 負の定数}$$

とおくと、式(33)の最後の2項は消失する。

いま流れ関数を

$$\Psi_2 = \Psi_2^{(1)} + \Psi_2^{(2)} \quad \dots\dots\dots (34)$$

とおき、まず、

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(1)} &= \phi_2^{(1)}(z) \sinh k_2(h+z) e^{i(k_2 x - \sigma t)} \\ &= \phi_2^{(1)}(z) \sinh k_2(h+z) e^{i(k_2 - k_1)x} e^{i(k_1 x - \sigma t)} \end{aligned}$$

の表現において、波数の差 $(k_2 - k_1)$ が十分小さく、

$e^{i(k_2 - k_1)x} \approx 1 + i(k_2 - k_1)x$ とおける範囲で検討すると、近似的に次のように示される。

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(1)} &= \phi_2^{(1)}(z) \sinh k_1(h+z) \{1 + i(k_2 - k_1)x\} \\ &\quad \times e^{i(k_1 x - \sigma t)} \\ u_2^{(1)} &= -\frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial z}, \quad w_2^{(1)} = \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

式(35)を式(33)へ代入し、 x に関係する項をとりだして、これらが0になるようにすると、次の関係式となる。

$$\begin{aligned} -k_1(k_2 - k_1)x \left[(c_1 - u_0) \frac{\partial^2 \phi_2^{(1)}}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \right. \\ \left. + 2k_1(c_1 - u_0) \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \right. \\ \left. + \phi_2^{(1)}(z) \sinh k_1(h+z) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right] \\ + ik_1 U_1 x \left[\left\{ \frac{1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} + \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{gh} \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \right. \right. \\ \left. \left. + 2k_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \right\} \right. \\ \left. + \frac{2}{h^2} \phi_1(z) \sinh k_1(h+z) \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

したがって、 $\phi_2^{(1)}(z)$ が z のみの関数となるためには $-k_1(k_2 - k_1)x = ik_1 U_1 x$

すなわち、

$$k_2 = k_1 - iU_1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

という結果になる。かくして、

$$\phi_2^{(1)}(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \quad \dots\dots\dots (38)$$

とおくとき、式(36)から各係数が決定されてくる。

次に

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)} &= \phi_2^{(2)}(z) \sinh k_1(h+z) e^{i(k_1 x - \sigma t)} \\ \phi_2^{(2)}(z) &= b'_0 + b'_1 z + b'_2 z^2 + b'_3 z^3 + \dots \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (39)$$

とおくとき、これらを決定する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (c_1 - u_0) \frac{\partial^2 \phi_2^{(2)}}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \\ + 2k_1(c_1 - u_0) \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \\ + \phi_2^{(2)}(z) \sinh k_1(h+z) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \\ + (c_1 - u_0) \frac{\partial^2 \phi_2^{(1)}}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \\ + 2k_1(c_1 - u_0) \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \\ + \phi_2^{(1)}(z) \sinh k_1(h+z) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \\ + \frac{i}{k_1} U_1 u_0 \left\{ \frac{\partial^2 \phi_2^{(1)}}{\partial z^2} \sinh k_1(h+z) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2k_1 \frac{\partial \phi_3^{(1)}}{\partial z} \cosh k_1(h+z) \Big\} \\
& -\frac{i}{k_1} U_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \phi_3^{(1)}(z) \sinh k_1(h+z) \\
& -(c_1-u_0)2k_1 U_1 \phi_3^{(1)} \sinh k_1(h+z) \\
& -\frac{i}{k_1} \left\{ w_0' \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right\} - u_1 \frac{\partial^2 w_0'}{\partial z^2} \right\} = 0 \\
& \dots\dots\dots (40)
\end{aligned}$$

以上の結果から

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_2^{(1)} + u_2^{(2)} \\ w_2 &= w_2^{(1)} + w_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

と表わされる。

波形 η_2 を求める方程式は、やはり $\varepsilon\beta$ のオーダーで検討することになりはなく、 $z=0$ において

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + u_0' \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \eta_0'}{\partial x} = w_2 \dots\dots (42)$$

の方程式となる。式 (37) の関係から、

$$\eta_2 = A_2(x) e^{i(k_2 x - \sigma t)} = A_2(x) e^{U_1 x} e^{i(k_1 x - \sigma t)} \dots\dots\dots (43)$$

とおくと、式 (42) は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
& \frac{dA_2}{dx} - \left\{ i \left(\frac{\sigma}{U_0} - k_1 \right) - U_1 \right\} A_2 \\
& = \frac{U_1}{U_0} x e^{-U_1 x} \frac{i k_1 A_1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} \\
& - \frac{A_1 (c_1 - U_0) U_1}{6g \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right) \tanh k_1 h} e^{-U_1 x} \\
& + \frac{i k_1 + U_1}{U_0} b_0 \sinh k_1 h + \frac{i k_1 b_0'}{U_0} \sinh k_1 h \cdot e^{-U_1 x} \\
& \dots\dots\dots (44)
\end{aligned}$$

いま流速の変化 u_0' は $x \geq 0$ の領域で存在すると考えるならば、 $x=0$ で $A_2=0$ となる条件で式 (44) を解くと、 η_2 の実数値部分で表示すれば式 (45) のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
\eta_2 = & -\frac{A_1}{6 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right)} \frac{U_1}{c_1 - U_0} x \cos(k_1 x - \sigma t) \\
& - \frac{A_1 U_0 U_1}{3 \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right) k_1 (c_1 - U_0)^2} \sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x \\
& \times \cos \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_1 U_0 U_1}{6g \left(\frac{1}{2} - \frac{U_0^2}{gh} \right) k_1 \tanh k_1 h} \sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x \\
& \times \cos \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right) \\
& - 2 \frac{U_0 U_1^2 - k_1^2 (c_1 - U_0)}{(U_0 U_1)^2 + k_1^2 (c_1 - U_0)^2} b_0 \sinh k_1 h \{1 + U_1 x\} \\
& \times \sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x \sin \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right) \\
& - 2 \frac{k_1 c_1 U_1}{(U_0 U_1)^2 + k_1^2 (c_1 - U_0)^2} b_0 \sinh k_1 h \{1 + U_1 x\} \\
& \times \sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x \cos \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right) \\
& + \frac{2b_0' \sinh k_1 h}{c_1 - U_0} \sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x \\
& \times \sin \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right) \dots\dots\dots (45)
\end{aligned}$$

式 (45) において式 (37) の関係から、近似的に

$$e^{U_1 x} \doteq 1 + U_1 x$$

として取扱っている。

式 (45) の第 2 項以下に現われる $\sin \frac{k_1 - \frac{\sigma}{U_0}}{2} x$ は、うなりの現象と類似して、見かけ上、振幅を短い波長で変化させ、また、

$$\cos \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right), \quad \sin \left(\frac{\frac{\sigma}{U_0} + k_1}{2} x - \sigma t \right)$$

の項は、 $\left| \frac{\sigma}{U_0} \right| > k_1$ となるのが普通であるから、流れをさかのぼるときは $U_0 < 0$ となり、負の方向に伝播し、流れと波の進行方向が同方向であれば、 $U_0 > 0$ となり、正の方向に伝播する水面動揺を表わしている。これらはいわゆる転波の発生を示すものと解釈されよう。

参 考 文 献

- 1) 浜田徳一・加藤 始: 流れをさかのぼる波についての一計算, 第 8 回海岸工学講演集, 土木学会, 1961.
- 2) Longuet-Higgins and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, 1961.