

底面近傍の流体場におよぼす波の有限振幅性の影響について

裊 義 光*・ 辻 俊 一**・ 岩 垣 雄 一***

1. 序 論

底質粒径が比較的大きい海浜の変形機構を解明するためには、底質移動の外力となる流体場、とくに底面に発達する境界層とその近傍における流速や摩擦応力の変動特性を明らかにし、底質粒子に作用する流体力を正しく評価することが必要となる。振動流および正弦的な波形を有する波動場については、従来より多くの研究が行われてきており、底面境界層に関する理論的および実験的成果も数多い。

しかしながら、振動流の流体場では、質量輸送が存在しないこと、および流速の鉛直方向の成分がないことなど、底質の移動に重要な関係をもつこれらの要素の効果を明らかにすることができない。また、海浜変形が問題となる波動場は勾配を有する海浜であるために、浅水変形にともなう波の有限振幅性の影響によって底面近傍の流体場は変化すると考えられ、対称な波形を有する波動場とは異なる変動特性を有すると思われる。

本論文では、波形の非対称性を取り入れることができる Dean の流れ関数理論を適用し、それより得られる水粒子速度を境界層外縁流速として与え、層流境界層方程式にもとづいて境界層内の流速と底面摩擦応力を計算し、これらにおよぼす波の有限振幅性の影響について検討するとともに、境界層内の鉛直方向成分と底面摩擦応力の変動特性とにもとづいて底質の移動機構を考察する。さらに、Longuet-Higgins¹⁾によって求められた底面における質量輸送速度の理論値と著者らの実験値を用いて、底面における質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響について検討する。

2. 層流境界層理論にもとづく波動底面境界層内の流体場特性

(1) 理論式の概説

いま、底面に沿って波の進行方向に x 軸、鉛直方向に z 軸をとり、底面に発生する境界層内の速度成分を

u および w とすれば、2 次元場の層流境界層内の運動方程式、連続式および境界層外の運動方程式はそれぞれ次のようにあらわされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} + w_b \frac{\partial u_b}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \cdots (3)$$

ここに、 P は圧力、 u_b および w_b は境界層外縁における x 方向の流速成分および z 方向の流速成分であり、ポテンシャル理論にもとづく波の理論から底面における値としてそれぞれ与えることができる。

式(1)および式(3)において、 $u(\partial u/\partial x)$ 、 $w(\partial u/\partial z)$ 、 $u_b(\partial u_b/\partial x)$ および $w_b(\partial u_b/\partial z)$ を他の項に比べて小さいとして無視し、 u_b として微小振幅波理論による

$$u_b = U_m \cos \theta, \quad \theta = kx - \sigma t \quad \cdots (4)$$

を用いると、境界層内の水平方向流速成分が次式のように求められる。

$$u = U_m \{ \cos \theta - \exp(-\beta z) \cos(\theta + \beta z) \} \quad \cdots (5)$$

$$U_m = \pi d_0 / T, \quad d_0 = 2a_m = H / \sinh kh \quad \cdots (6)$$

ここで、 H : 波高、 T : 波の周期、 h : 水深、 $k = 2\pi/L$: 波数、 L : 波長、 $\sigma = 2\pi/T$: 角周波数、 U_m : 底面流速 u_b の振幅、 a_m : 水粒子軌道振幅、 d_0 : 水粒子軌道全振幅、 $\beta = (\sigma/2\nu)^{1/2}$ 、 ν : 水の動粘性係数。

底面に働く摩擦応力 τ_0 は、

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \sqrt{2} \mu \beta U_m \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad \cdots (7)$$

以上のように、境界層外縁主流速度として微小振幅波理論にもとづく値を与えた場合の層流境界層の線形解が得られる。

一方、境界層外縁の水粒子速度として Dean の流れ関数表示による値を用いた場合の層流境界層方程式の解は次のように求められる²⁾。

流れ関数理論による波の底面における水粒子速度 u_b は、

$$u_b = - \sum_{n=2,4}^{10} \frac{n\pi}{L} \{ X_{n+2} \cdot \cos(n/2)\theta + X_{n+3} \cdot \sin(n/2)\theta \} \quad \cdots (8)$$

* 正会員 工修 京都大学研究生 工学部土木工学科

** 学生員 京都大学大学院工学研究科

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

ここに, X_{n+2} および X_{n+3} は水面の変位量を与えることにより求まる定数である. なお, 式 (8) で表わされる水粒子速度は 5 次のオーダーのものである.

式 (3) における u_0 として式 (8) における値を用い, さらに式 (1) および式 (2) における u および w を波形勾配 H/L を展開パラメータとして

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ \varepsilon &= H/L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と摂動級数展開することにより, 式 (1) の非線形偏微分方程式の解が線形偏微分方程式の摂動解として得られる. 簡単のため第 1 近似解の u_0 と w_0 のみを示すと,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=2,4}^{10} U_{0n} \left\{ 1 - \exp \left(-(1-i) \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}} z \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left(-i \frac{n}{2} \sigma t \right) \\ w_0 &= -\frac{\sqrt{\nu T}}{L} \sum_{n=2,4}^{10} n \pi U_{0n} F(z, t) \\ F(z, t) &= \frac{z}{\sqrt{\nu T}} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \exp \left(\frac{\pi i}{4} \right) \\ &\quad \times \left\{ \exp \left(-(1-i) \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\nu T}} z \right) - 1 \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left(-\frac{n}{2} \sigma t + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned} \right\}$$

となり, 底面摩擦応力 τ_0 は

$$\tau_0 = \rho \sqrt{\sigma \nu} \sum_{n=2,4}^{10} \sqrt{\frac{n}{2}} U_{0n} \exp \left\{ i \left(-\frac{n}{2} \sigma t - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となる. ここに,

$$U_{0n} = -\left(\frac{n\pi}{L} \right) (X_{n+2} - iX_{n+3}) e^{ikx} \dots\dots\dots (12)$$

であり, 式 (10), (11) および式 (12) は実数部のみが物理的意味を有する.

式 (10) で表わされる u_0 に関する式の右辺第 2 項の z に関する減衰項は, 式 (5) における β に対応するものであり, n の値が大きくなると減衰が増加する. また, $n=2$ とすると, u_0 の減衰項は $\exp(-\sqrt{\pi/\nu T} z)$ となり, 式 (5) における β と一致する.

さらに, 式 (11) において $n=2$ とおくと,

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho \sqrt{\sigma \nu} U_{02} \exp \left\{ i \left(-\sigma t - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \mu \beta U_{02} \exp \left\{ i \left(-\sigma t - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \dots\dots\dots (11)' \end{aligned}$$

となり, 式 (7) と同じ形で表現される.

このように, 境界層外縁の水粒子速度として Dean の流れ関数理論による波の水粒子速度を用いた場合の層流境界層方程式の第 1 次近似解での基本周波数成分は式 (5) および式 (7) で表わされる線形理論による結果と

同じ形であることがわかる.

(2) 底面境界層の流体場におよぼす波の有限振幅性の影響

図-1 および図-2 は, 式 (8) で表わされる境界層外縁の水粒子速度と式 (11) で表わされる底面摩擦応力の波の 1 周期間における変動を示したものである. 図-1 はアーセル数 $Ur = HL^2/h^3$ が 68 (合田³⁾によるパラメータ $\Pi = (H/LA) \cot^3 k_A h$ では 1.0, ここに添字 A は微小振幅波理論にもとづく値を意味する) の場合である. 各図において, (a) は 3 次のオーダー ($n=6$) まで含んだ値であり, (b), (c) および (d) は基本周波数成分, 2 倍周波数成分および 3 倍周波数成分の値をそれぞれ示している.

図-1 より次のことがわかる. 底面摩擦応力 τ_0 と境界層外縁の水粒子速度 u_0 との位相差については, (1) 正の最大値の位相を比較すれば (a) は (b) に比べて小

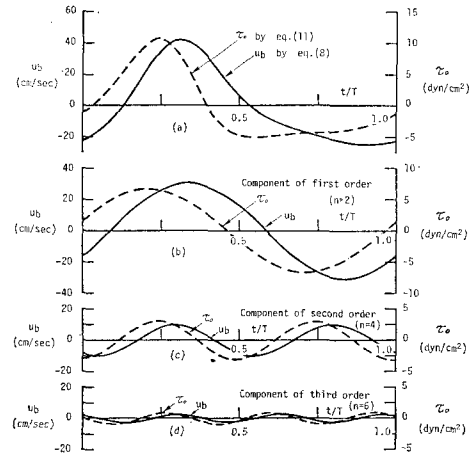


図-1 底面流速および底面摩擦応力におよぼす波の有限振幅性の影響 ($HL^2/h^3=68$)

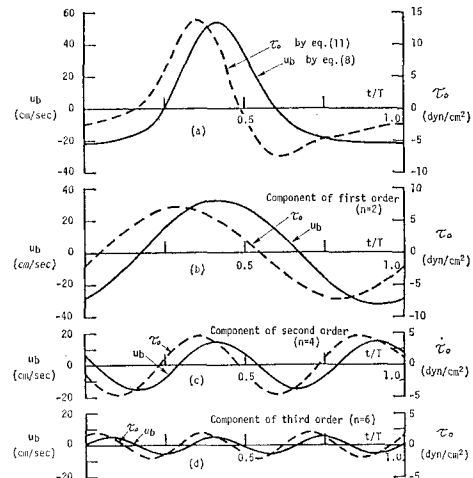


図-2 底面流速および底面摩擦応力におよぼす波の有限振幅性の影響 ($HL^2/h^3=197$)

さくなる。この位相差の減少は τ_0 の2倍成分および3倍成分の変動に起因している。なお、波の浅水変形にともなう非線形性の増大とともに τ_0 と u_b との位相差が小さくなるという事実は Fisher, Johnson, McCormick⁴⁾ の実験結果と一致する。(2) τ_0 の負の最大値が出現する位相は、線形理論による場合より早く現われ、 u_b が岸向きから沖向きへと変化する位相付近である。

図-2 は波の有限振幅性が 図-1 に比べてさらに大きい場合の結果である。線形理論との関係は 図-1 の結果と同様であるが、波の有限振幅性が大きくなると τ_0 の負の値の変動に特徴が現われる。すなわち、波の有限振幅性が增大すると、 τ_0 の正の最大値は遅れ、負の最大値はより早く現われるようになるので、正から負への変化が急になる。

図-3 および 図-4 は境界層内の流速分布の計算例であり、 $U_r=102$ ($H=2.12$) の場合と $U_r=197$ ($H=4.39$) の場合とを示したものである。波による水粒子速度は、波の有限振幅性が増すにつれて、岸向き成分は値が大きく、その出現時間は短くなり、沖向き成分は値が小さく、出現時間は長くなる。

図-3 および 図-4 から、 $u/u_{b\max}$ の分布におよぼす波の有限振幅性の影響は、水粒子の沖向き流速時において顕著となり、アーセル数が大きいほど $u/u_{b\max}$ の分布形状がやせ細ってくる。したがって、底面境界層内の流速分布におよぼす波の有限振幅性の影響は、境界層外縁の水粒子速度に支配されることが知られる。

(3) 境界層内の流速分布にもとづく底質の移動に関する考察

図-5 は境界層内の水粒子速度の鉛直方向成分 w と底面摩擦応力 τ_0 の時間変化を水位変動とともに示したもので、 $U_r=197$ の場合の結果である。 w の上向きおよび下向き成分が最大となる位相は、両者とも水位変動が 0 となる位相の近傍であるが、前者は位相が少し遅れ、後者は $\pi/10$ 程度先行する。 w の上向き成分は境界層のいずれの高さにおいても同じ位相で最大となるが、下向き成分が最大となる位相は底面に近づくにつれて早く現われる傾向を示している。 τ_0 の変動特性は 図-1 および 図-2 について検討した通りで、 τ_0 の岸向き最大値は水位変動が最大となる位相よりも先行し、また τ_0 の沖向き成分は境界層外縁の水粒子速度の水平成分が岸向きから沖向きへと変化する位相(水位が静水面を切る点でもある)付近で最大となる。

このような流速場・応力場の変動特性にもとづいて底質の移動機構を考えると、次のようになる。境界層内の

水粒子速度の鉛直方向成分の存在は、底質の鉛直移動すなわち浮遊の開始に関係すると考えられるが、 w の上向き最大値が底面摩擦応力 τ_0 や境界層外流速 u_b の最大値に先行することから、 w によって浮遊または移動しやすい状態になった底質が τ_0 の作用(境界層内の水平流速と関連)によって移動を始め、移動を開始した後は周囲の流速(例えば u_b)に対応して運動することになる。このように考えると、底質の岸向き移動は、 τ_0 と w の上向き成分の変動および境界層外縁の水粒子速度の変動とにもとづいて論じることができると思われる。一方、 τ_0 の沖向き成分が最大となる位相付近では、 w の下向き成分が大きく、かつ u_b も 0 に近い値をとることから、波の有限振幅性が大きくなる斜面上の波動場で

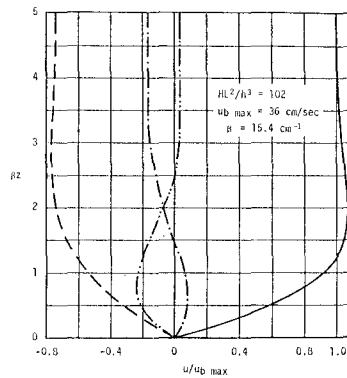


図-3 底面境界層内の流速分布, $\beta = \sqrt{\sigma/2\nu}$, $(HL^2/h^3=102)$

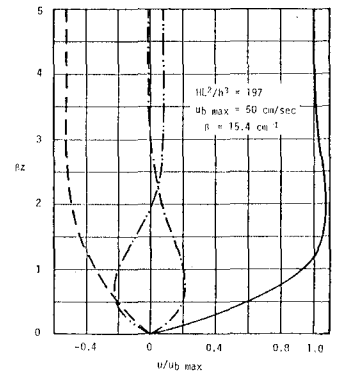


図-4 底面境界層内の流速分布, $\beta = \sqrt{\sigma/2\nu}$, $(HL^2/h^3=197)$

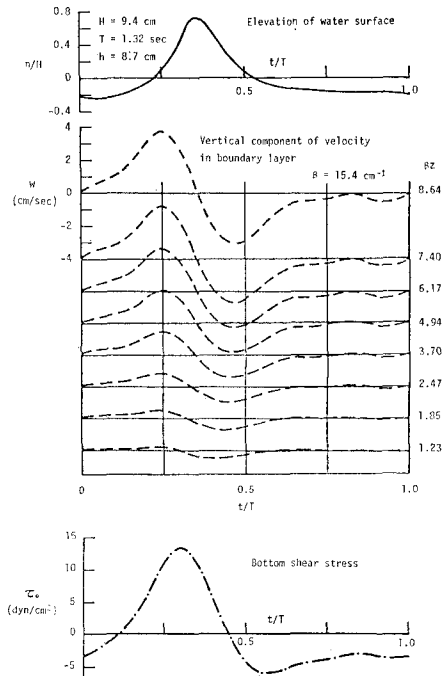


図-5 水位変動、底面境界層内の鉛直流速成分および底面摩擦応力の変動特性 ($HL^2/h^3=197$)

の底質の冲向き移動は岸向き移動に比べてはるかに微弱であると考えてよい。

なお、波の有限振幅性が小さい場合には、岸向きも冲向きも底質の移動を支配する外力はほぼ等しくなってくる。

3. 底面における質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響

底質が掃流状態で移動する場合、底面の質量輸送速度 $\bar{U}_b$ は底質の移動方向に関係する重要なパラメータであると考えられる。ここでは、 $\bar{U}_b$ の理論値として

$$\bar{U}_b = \frac{5}{4} \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) \frac{1}{\sinh^2 kh} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で表わされる Longuet-Higgins による式¹⁾を用いて計算した。式 (13) は非回転非粘性の波における質量輸送速度と粘性効果による質量輸送速度との和を示しており、後者は境界層外縁の速度として微小振幅波理論による水粒子速度を与えて導かれたものである。

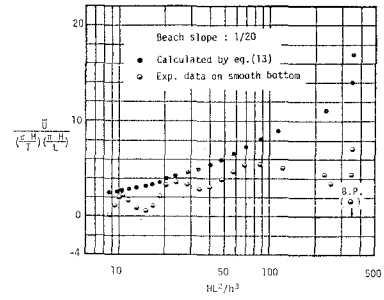
また、実験値は固定斜面上で運動する中立粒子（比重 1.03）の波の 1 周期間における平均移動速度であり、底面が滑らかな場合と粗い場合の結果を用いた。

式 (13) で表わされる理論値と斜面上で得られた実験値とを比較することは次のような意味がある。すなわち、理論値は対称な波形を有する波が一樣水深の流体場を伝播する場合を対象として得られたものであるから、理論値と実験値との不一致の原因は中立粒子の大きさと境界層厚さとの問題および斜面の影響の 2 点に帰着できると考えられる。ここでは、前者の問題点については議論せず、理論値と実験値との不一致を斜面の影響すなわち浅水変形にともなう波の有限振幅性の影響という観点から検討する。

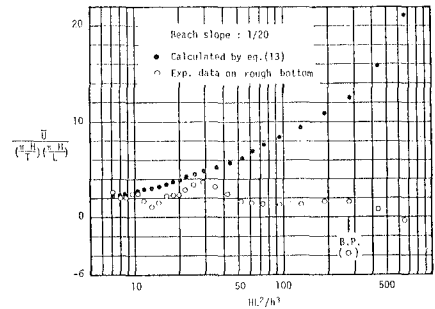
図—6 (a) および (b) は沖波波形勾配 H_0/L_0 が 0.007 の場合の理論値と実験値とをアーセル数 HL^2/h^3 ($\equiv U_r$) に対してプロットしたものであり、(a) は底面が滑らかな場合、(b) は粗い場合の結果である。底面が滑らかな場合、実験値は U_r の値が 10, 25 および 80 付近で理論値に近づくが、他のところでは離れている。 $U_r \leq 10$ の領域でアーセル数が小さくなるにつれて実験値は理論値よりも小さくなるのは、中立粒子の冲向き重力成分の効果によるものと考えられる。

底面が粗い場合、 $U_r \leq 10$ の領域では両者はほぼ一致しており、底面が滑らかな場合の傾向とは異なる。10 < $U_r \leq 30$ の領域では、実験値は理論値よりも小さい値となるが、変動傾向が同じである。30 < U_r の領域では、アーセル数が大きくなるにつれて実験値は理論値よりも小さい値となり、両者の不一致が著しくなる。

図—7 は $H_0/L_0 = 0.047$ の波が作用する場合の結果であり、白抜きの記号は粗面のデータを、半黒の記号は滑

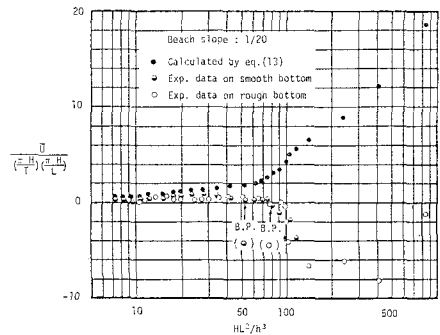


(a) 滑らかな斜面上の場合



(b) 粗い斜面上の場合

図—6 底面の質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響 ($H_0/L_0 = 0.007$, 1/20 斜面勾配)



図—7 底面の質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響 ($H_0/L_0 = 0.047$, 1/20 斜面勾配)

面のデータをそれぞれ表わしている。理論値と実験値とは、底面の粗滑にかかわらず $U_r = 30 \sim 40$ よりも小さい領域で良い対応を示すが、アーセル数がそれより大きくなるにつれて、実験値は理論値よりも急速に小さくなる。

このように、底面における質量輸送速度の理論値と実験値はアーセル数の変化に応じて異なる対応関係を示し、底面の粗滑および沖波波形勾配にかかわらず $U_r \leq 30$ の領域では対応関係が良好である。首藤の研究⁵⁾によると、波高変化の計算において、 $U_r \leq 30$ の領域では微小振幅波理論が適用できるとされている。ここで検討したように、式 (13) で表わされる底面の質量輸送速度の理論値と実験との対応関係から、 $U_r \leq 30$ の領域では波

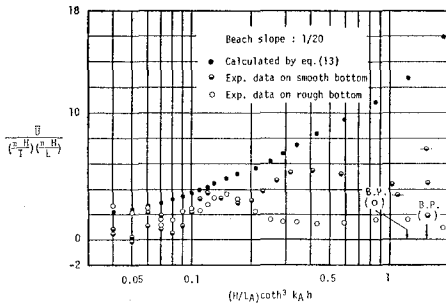


図-8 底面の質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響 ($H_0/L_0=0.007$, $1/20$ 斜面勾配)

高変化のみでなく、底面における質量輸送速度についても微小振幅理論にもとづいて論ずることができると考えられる。

図-8は図-6に示したデータを合田³⁾によって提案された非線形パラメータ $\Pi=(H/L_A) \coth k_A h$ に対してプロットしたものである。理論値と実験値との対応関係はアーセル数での表示の場合と変わらない。

4. 結 論

本研究では、底面層流境界層内の流体場および底面における質量輸送速度におよぼす波の有限振幅性の影響について検討した。その結果、底面境界層内の流体場は、

波の有限振幅性が大きくなるにつれて、線形理論にもとづいて予想される流体場と異なった変動特性を示すので、底質の移動機構を考える場合には波の有限振幅性の影響をも考慮する必要があることがわかった。また、Longuet-Higgins によって導かれた底面における質量輸送速度は、波の有限振幅性が大きくなるにつれて実験値との差が増大するが、アーセル数が 30 以下の領域では実験値との対応が良く、この領域では波の有限振幅性の影響は顕著でないこともわかった。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M. S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 245, No. 903, pp. 535~581, 1953.
- 2) 岩垣雄一・斐 義光: 波により水底斜面上に作用する摩擦力について, 第 24 回海岸工学講演会論文集, pp. 37~41, 1977.
- 3) 合田良実: 波浪の非線形性とその記述パラメーター, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 39~43, 1983.
- 4) Fisher, J., B. Johnson and M. E. McCormick: Time dependent shear stress beneath a shoaling wave, International Sym. on Ocean Wave Meas. and Analysis, Vol. 1, pp. 799~816, 1974.
- 5) 首藤伸夫: 非線形長波の変形——水路幅, 水深の変化する場合——, 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 57~63, 1976.