

砕波後の波の波高変化におよぼす平均水位の影響

佐 藤 道 郎*

1. ま え が き

海浜流や平均水位の変化などの波の存在によって生じる nearshore zone 特有のさまざまな水理現象の把握には、この領域での波高分布の推定が重要である。特に砕波後の波の波高変化の推定は難しい内容を含む問題であるが、砕波限界を越える波は存在せず余分なエネルギーを砕波によって放出するという観点に立てば、波エネルギーの逸散過程にそれほど立ち入らなくても簡単に砕波条件を用いて波高を見積ることができる。だが、一方においては砕波後の波エネルギーの逸散機構を明らかにして波高変化を求めようと立場から努力もなされてきた。そこで考慮されてきたのは砕波によって生じる乱れや底面摩擦によるエネルギー逸散が主で、さらに空気混入の影響なども検討されてきた。

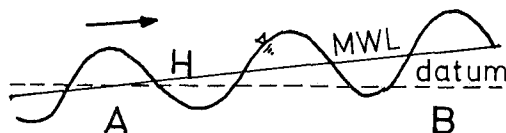
砕波後の波の減衰を支配する主要なものはおそらくそれらのものであろう。だが、もしそのような機構で砕波帯での波エネルギーのほとんどが逸散されてしまうものとする wave setup を維持したり、海浜流を発生させるエネルギーの source は一体何なのかという素朴な疑問につきあたる。それらの現象が質量と運動量の保存式で解析されることが多いのであるいは見過ごされてる点かもしれないが、波の存在下であれば砕波帯の波エネルギーが前述のような機構で逸散されるばかりでなく、平均状態のエネルギーに変換され、それらを養っている部分があると考えられるはずである。

ところで著者はかつて粘性や乱れによる波エネルギー逸散が無い場合でも wave setup のような平均水面の勾配があると波エネルギーの変化の生じることがあり得ることを指摘したことがある¹⁾。これは波エネルギーの一部が波の伝播する場のポテンシャルエネルギーに変換されたことによるものと考えることができる。それでは一体どの程度のエネルギーが変化し、平均水面勾配の存在が波高変化にどの程度効いてはるのかという点について概観を得るために大まかな検討を加えてみた。

2. 平均水面が勾配を有するときの波エネルギーと波高の変化

(1) 基礎となる考え

平均水面に勾配があるとき波エネルギーがどうなるかという点をまず簡単に考察しておく。図—1 に示すように A 点で波高が H であった波が B 点まで進む。もし B 点でも変わらずに H であったとすると、B 点は A 点より平均水面が高いから A 点と同じ高さの基準点からポテンシャルエネルギーを測れば B 点では A 点よりも大きなエネルギーを有することになる。したがって、A 点から B 点に至る過程でエネルギーの補給が無ければ同じ波高ということはあり得ず、この場合には B の方が波高が小さくなるはずである。



図—1 水面勾配があるところを進む波

(2) 波エネルギーの収支

Whitham²⁾ (1962) は流れと波の共存場における質量、運動量、エネルギーの収支式を与えており、また後に Phillips³⁾ (1966, 1977) の本で詳しく論じられている。ここでは波と流れの全体のエネルギー収支を求め、波以外のものを差し引いて波エネルギー収支が得られており、かなり複雑な計算を要する。だが、その計算結果からは前述のような効果は計算されない。

まず、波エネルギー収支を求めておく。 x_1, x_2 は水平面方向の座標、 x_3 は鉛直上向きを正にとる。定常流成分を U_i ($i=1, 2, 3$) とし、鉛直および水平方向にシアをもつ一般的な状況を想定しておく。波の軌道流速成分を u_i 、粘性応力成分を σ_{ij} 、圧力を P とする。運動および連続の式と、水面および水底での境界条件は次のとおりである。 h を水深、 ζ を水面の高さとして、

$$\rho \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} \right\} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \dots\dots\dots (1)$$

* 正会員 工博 鹿児島大学助教授 工学部海洋土木開発工学科

$$\frac{\partial(U_i+u_i)}{\partial x_i}=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(U_3+u_3)_\zeta=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+(U_\alpha+u_\alpha)_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha} \quad \text{at } x_3=\zeta \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$(U_3+u_3)_{-h}=-(U_\alpha+u_\alpha)\frac{\partial h}{\partial x_\alpha} \quad \text{at } x_3=-h \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $X_1=X_2=0$ 、 $X_3=-g$ である。 g は重力加速度である。添字 $i, j=1, 2, 3$ を $\alpha, \beta=1, 2$ とするものとする。

(1) 式に u_i を乗じて変形し、それを $x_3=-h \sim \zeta$ までは積分し、(2)～(4)を用いて変形していくと次のような式が得られる。波周期で平均し、上付き bar で表すと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\zeta} \frac{\rho}{2} u_i^2 dx_3 + \frac{1}{2} \rho g (\zeta - \bar{\zeta})^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\int_{-h}^{\zeta} \left\{ \frac{\rho}{2} u_i^2 + p + \rho g (x_3 - \bar{\zeta}) \right\} u_\alpha dx_3 \right. \\ & \left. + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\rho}{2} u_i^2 U_\alpha dx_3 + \frac{1}{2} \rho g (\zeta - \bar{\zeta})^2 U_\alpha \right] \\ & = -\rho g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} \int_{-h}^{\zeta} u_\alpha dx_3 - \int_{-h}^{\zeta} \rho u_i (U_j + u_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_3 \\ & + \frac{\rho g}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} \Big|_\zeta + \rho g (\zeta - \bar{\zeta}) \left[U_3 - U_\alpha \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} \right]_\zeta \\ & + \int_{-h}^{\zeta} u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dx_3 \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

左辺の第一項のカッコ内のものは波のエネルギー密度を表し、第二項のカッコ内は、ある断面を波自身および流れによって単位時間に横切る波のエネルギー流束を表している。右辺にはいろいろな項が現れており、どのように整理し解釈するかが問題である。この(5)式までは流れの分布や変化のしかたについて特別な制約を設けてるわけではなく、波についても近似を用いてるわけではない。しかし、そのぶん右辺がつかみにくい。水平や鉛直方向にシアーを有する流れの場で高次の波理論に基づいてエネルギーや波高変化を論ずる場合、この点を考慮しておく必要があると思われる。

さて、話を少し簡単にするために、次のような仮定をおく。(i) 流れは深さ方向に一樣な速度分布をしており非回転流れである。(ii) 水深の変化はゆるやかである。このとき、右辺第二項は

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\zeta} \rho u_i (U_j + u_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_3 \\ & = \int_{-h}^{\zeta} \rho (u_\alpha u_\beta - \delta_{\alpha\beta} \cdot u_3^2) dx_3 \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \\ & + \int_{-h}^{\zeta} \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q^2}{2} \right) dx_3 \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ は $\alpha=\beta$ で 1、 $\alpha \neq \beta$ で 0 である。又、 $q^2=U_i^2$ 。ところで(2)式と(4)式の一周周期平均から

$$U_3 = - \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) (x_3 + h) - U_\alpha \frac{\partial h}{\partial x_\alpha}$$

であるから、これを用いて(5)式右辺第4項は

$$\rho g (\zeta - \bar{\zeta}) \left[U_3 - U_\alpha \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} \right]_\zeta = -\rho g (\zeta - \bar{\zeta})^2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

したがって、第3項と合わせて、

$$\begin{aligned} & \frac{\rho g}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} + \rho g (\zeta - \bar{\zeta}) \left[U_3 - U_\alpha \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_\alpha} \right] \\ & = -\frac{\rho g}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^2 \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

となる。仮定(ii)から(6)式右辺第2項は $U_1, U_2 \gg U_3$ より、

$$\int_{-h}^{\zeta} \rho u_\alpha dx_3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{q^2}{2} \right)$$

で近似でき、さらに(6)式右辺第一項と(7)式右辺を組み合わせると

$$\left[\int_{-h}^{\zeta} \rho (u_\alpha u_\beta - \delta_{\alpha\beta} \cdot u_3^2) dx_3 + \delta_{\alpha\beta} \frac{\rho g}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^2 \right] \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}$$

話を二次のオーダーの範囲に限ってしまえば(ii)より

$$-\rho \bar{u}_3^2 = \bar{p} + \rho g (x_3 - \bar{\zeta})$$

で近似できるので、上式の[...]は

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\zeta} \rho \bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta dx_3 \\ & + \delta_{\alpha\beta} \left\{ \int_{-h}^{\zeta} \bar{p} dx_3 - \frac{\rho g}{2} (\bar{\zeta} + h)^2 + \frac{\rho g}{2} (\zeta - \bar{\zeta})^2 \right\} \end{aligned}$$

と表すことができる。これは波の radiation stress $S_{\alpha\beta}$ である。

(5)式右辺の最後の項も実際に効いてくるのは一部であって波エネルギー逸散を与えることになるが、ここでの主題ではないのでそのままにしておく。そうすると結局前述のような三つの前提のもとでは(5)式は簡単になって次のように表されることになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (F_\alpha + E U_\alpha) + S_{\alpha\beta} \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \\ & = -g M_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\zeta} + \frac{q^2}{2g} \right) + \int_{-h}^{\zeta} u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} dx_3 \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここに、

$$E = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\rho}{2} u_i^2 dx_3 + \frac{1}{2} \rho g (\zeta - \bar{\zeta})^2 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$F_\alpha = \int_{-h}^{\zeta} \left\{ \frac{\rho}{2} u_i^2 + p + \rho g (x_3 - \bar{\zeta}) \right\} u_\alpha dx_3 \quad \dots\dots(10)$$

$$M_\alpha = \int_{-h}^{\zeta} \rho u_\alpha dx_3 \quad \dots\dots\dots(11)$$

である。

右辺第一項は $\bar{\zeta} + q^2/2g$ が一定に保たれるような流れでは0となり効いてこないが、定常流それ自体がエネルギー損失を伴う場合は効いてくることがあり、2次元流

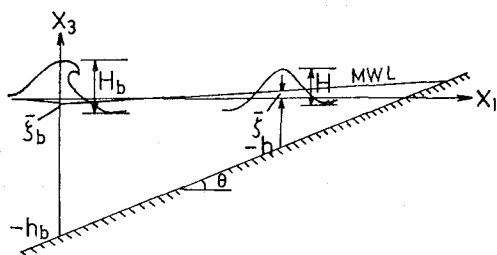


図-2 記号説明図

れについて著者はかつて検討した。ここでは流れの場を伝播する波を論じようというわけではなく、砕波後の波にこの項がどの程度効いてはるかを調べようというのが目的である。そこで、以下に図-2に示すような一様勾配斜面上での砕波後の波の波高変化を考察する。

3. 砕波後の波の波高変化におよぼす wave setup の影響

ここでは底面摩擦や乱れなどによるエネルギーの逸散は考えない。この場合、ある断面を通過する質量流束は 0 となるから

$$\rho(\xi+h)U_1+M_1=0 \quad \text{より}$$

$$U_1=-\frac{M_1}{\rho(\xi+h)} \quad \dots\dots\dots(12)$$

の流れが波の質量輸送と釣り合うために存在することになる。しかし、これによる(8)式右辺第一項の $q^2/2g$ の項は(8)式の近似においてはより高次の項として無視される。このとき(8)式は $F_1=EC\alpha$ ($C\alpha$ は群速度)として

$$\frac{d}{dx_1}(EC\alpha)=-gM_1\frac{d\xi}{dx_1} \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。 ξ については一様勾配斜面上で wave setup のに関する次式を用いる。

$$\xi=K(h_b-h)+\xi_b \quad \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 h_b は砕波水深、 ξ_b は砕波点での平均水位、 K は

$$K=\frac{1}{1+8/(3\gamma^2)} \quad \dots\dots\dots(15)$$

である。 $\gamma=H/(\xi+h)$ で 1 のオーダーの定数である。波速を C とすると $M_1=E/C$ で表され、底の傾きを θ とすると $h=h_b-x_1 \tan \theta$ である。これと(14)式より

$$\frac{d\xi}{dx_1}=-K\frac{dh}{dx_1}=K \cdot \tan \theta \quad \dots\dots\dots(16)$$

したがって、これを(13)式に代入して

$$\frac{d}{dx_1}(EC\alpha)=-gK \cdot \frac{E}{C} \cdot \tan \theta \quad \dots\dots\dots(17)$$

$C=C\alpha=\sqrt{gh}$ として上式を解くと、砕波点波高を H_b として、次の関係を得る。

$$\frac{H}{H_b}=\left(\frac{h}{h_b}\right)^{-1/4}\left(\frac{h}{h_b}\right)^{K/2} \quad \dots\dots\dots(18)$$

右辺の $(h/h_b)^{-1/4}$ は浅水変形による波高変化を与えるも

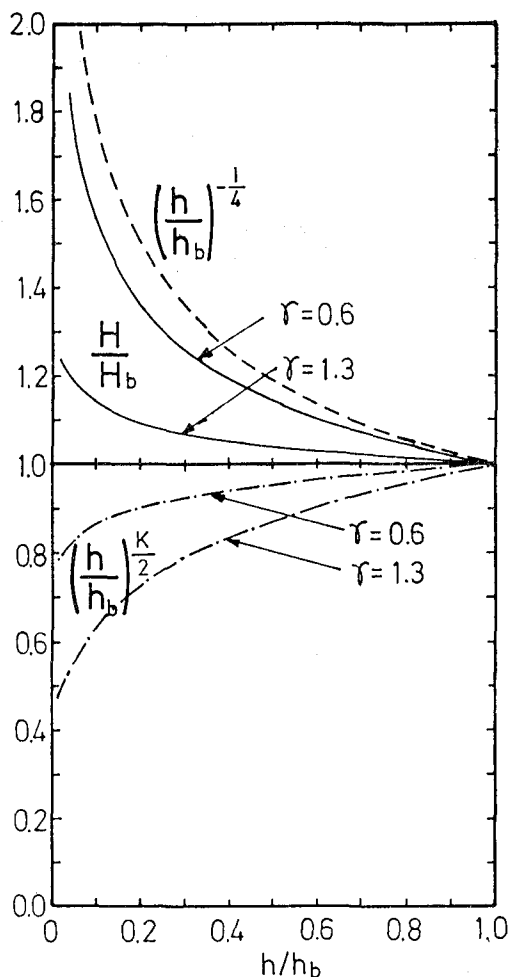


図-3 計算結果

ので、 $(h/h_b)^{K/2}$ が平均水面の勾配によって生じたものである。これは K の値によって異なるが、 γ がだいたい 0.6~1.3 程度の間と考えて、 $K=0.119$ ($\gamma=0.6$) と $K=0.388$ ($\gamma=1.3$) について計算を行い、図-3に示した。 $(h/h_b)^{K/2}$ は一点鎖線で示してある。 $(h/h_b)^{-1/4}$ は破線で、また、それらの積として(18)式で計算される波高 H/H_b を実線で示した。この結果を見ると底面摩擦などによるエネルギー損失にくらべて、平均水面勾配の存在の影響は砕波後の波高変化を決める決定的な因子というわけではないが、無視できるものでもないように思われ、無視した場合には他の要因をいくぶん過大に見積ることになることが考えられる。

4. あとがき

砕波後の波の波高変化に及ぼす平均水面勾配の影響を大まかに検討した。まず、基礎となる波エネルギー収支を考察し、一様勾配斜面上で定常的な水位勾配ができているところを波が伝わる最も単純な場合について、微小振

巾波の長波近似を用いて波高変化を計算した。その結果、乱れや底摩擦などによるエネルギー損失にくらべたら砕波後の波高変化に対する寄与は小さいが、無視できるものでもないように思われた。

参 考 文 献

- 1) 佐藤道郎: 不等流を遡る波の波高変化に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 242 号, pp. 15~29, 1975.10.
- 2) Whitham, G. B.: Mass, Momentum and energy flux in water waves, J. Fluid Mech., Vol. 12, pp. 135~147, 1962.
- 3) Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, Camb. Univ. Press, 1966 (2nd ed. 1977).
- 4) Mei, C. C.: A note on the averaged momentum balance in two-dimensional water waves, J. Marine Research, Vol. 31, No. 2, pp. 97~104, 1973.

【補 遺】

波のエネルギー収支を与えるものとしては本文でも述べたように Phillips のものが良く知られており、他の多くの本にも載せられている。だが、その計算のもとになっている運動量の保存則を導く過程で、すでに Mei (1973) が指摘しているが、圧力の表現中で $O(ka)^2$ の項を無視した扱いをしている。 k は波数、 a は振巾である。すなわち、本文 (1) 式から運動量の収支は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u'_\alpha dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{-h}^{\zeta} (\rho u'_\alpha u'_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) dx_3 \\ &= \overline{p-h} \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} \end{aligned}$$

となる。ここに、 $u'_\alpha = U_\alpha + u_\alpha$ である。右辺の $\overline{p-h}$ を Phillips の本では $\overline{p-h} = \rho g(h + \bar{\zeta})$ として計算している。水平床で流れの変化がない場合にはこれでもよいが、水深が変化したりするような一般的な場合には圧力 p は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p = & \rho g(\zeta - x_3) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_3}^{\zeta} u'_3 dx_3 \\ & + \rho \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{x_3}^{\zeta} u'_\beta u'_3 dx_3 - \rho u'^2_3 \end{aligned}$$

したがって、 $x_3 = -h$ として波周期で平均をすると $\rho g(h + \bar{\zeta})$ だけでなく、 $O(ak)^2$ の項が多く現われてくる。エネルギー方程式を求めるにあたって、波と流れの全エネルギーから、運動量の式に $\tilde{U}_\alpha$ を乗じて引く操作が行われるので波エネルギー収支式にも影響してくることになる。 $\tilde{U}_\alpha = U_\alpha + M_\alpha / \{\rho(\bar{\zeta} + h)\}$ である。したがって、Phillips の本にあるエネルギー収支式は、水深や流れの変化がゆるやかで、流れは平面的にも渦度はもたず、 $O(ak)^2$ までの議論に用いられるもので、一般的な場合について、高次までの議論に用いられるものではないように思われる。