

表層流に起因する砕波

筒井 茂明*・土屋 義人**

1. 緒 言

定形進行波の砕波は、その波形が Stokes¹⁾ による極限波に達するときに生じることが認められている。一方、うねりの上を風が吹き始めると、海面には表層流が発生し、さらに風速が大きくなると white caps にみられる spilling 領域が形成される。海面上での風による表層流は砕波現象において重要であるにもかかわらず、定量的な評価は十分ではない。

Stewart²⁾ と Longuet-Higgins³⁾ は、風による圧力を一定とし、接線応力は波頂で最大となり谷で最小となるとの仮定の下に、表層流の評価を行った。その結果によれば、表層内の最大加速度は接線応力が最大となる波頂で発生し、最小速度および最大表層厚は風下側で生じることになる。これは、風波の発生に関して得られた Miles⁴⁾ および Benjamin⁵⁾ の結果と本質的に一致する。さらに、Banner & Phillips⁶⁾ と Phillips & Banner⁷⁾ は、渦度の保存則から表層流の位相分布をより定量的に求め、これが海面での初期の小規模な砕波を表わすので “incipient breaking” と名付けた。Banner & Melville⁸⁾ は、その結果を実験により検証した。それによると、波のすべての位相で正の表層流が生じること、すなわち、波の谷の位相においても表層流は風下側へと動くことが示されている。また、表層内の粘性効果が無視されているので、表層流の層内分布が得られず、砕波時の風の応力と表層流との関係が不明である。

本研究においては、表層流の層内分布および位相分布を境界層近似により求め、表層流に起因する砕波条件を明らかにするとともに、海面に作用する風の応力について検討する。

2. 基礎方程式

波列とともに波速 c で動く移動座標 (ξ, Z) において、海面 η に形成される渦度をもつ薄層内の水粒子の 2 次元定常運動を考える。ただし、すべての物理量は、平均水深 h 、重力加速度 g 、および水の密度 ρ で無次元化され

ている。海面において表層流が発生する層厚は水深にくらべて十分薄く、表層内の接線速度 q は深さ方向に急変し、無渦運動と仮定できる下層流体の接線速度に一致する。ここで、海面上の流線の任意点に原点を置き、 s 軸を流線に沿って採った直交曲線座標 (s, n) を考える。座標原点での曲率をそれぞれ κ_s , κ_n とすると、原点での運動方程式および連続方程式はそれぞれ次式⁹⁾ で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} + q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} \\ = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) \right] \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \kappa_s q^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial n} \\ = \frac{1}{R} \left[2\kappa_s \frac{\partial q}{\partial s} + 2\kappa_n \frac{\partial q}{\partial n} + q \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\partial q / \partial s + \kappa_n q = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 p ; 圧力、 $R = h\sqrt{gh}/\nu$; レイノルズ数、 ν ; 水の動粘性係数、 Ω ; 外力ポテンシャル、 $q = \sqrt{u^2 + w^2}$ であり、 u および w は表層内の定常化された水粒子速度の水平および鉛直成分である。また、渦度 ω 、接線応力 τ 、および圧力 p_n はそれぞれ次式で与えられる。

$$\omega = -\partial q / \partial n + \kappa_s q \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau = (1/R)(\partial q / \partial n + \kappa_s q) \dots\dots\dots (4)$$

$$p_n = p - (2/R)\kappa_n q \dots\dots\dots (5)$$

以上の諸式は、座標原点の採り方に無関係であるから、流線上の任意点において成立する。

式 (1) に対して境界層近似を行うと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} + q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial s} \doteq \frac{1}{R} \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} \\ \frac{\partial p}{\partial n} + \kappa_s q^2 + \frac{\partial \Omega}{\partial n} \doteq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となり、さらに Ω を消去すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ q \frac{\partial q}{\partial s} \right\} = \frac{1}{R} \frac{\partial^3 q}{\partial n^3} \dots\dots\dots (7)$$

Banner & Phillips の結果は、上式において右辺の粘性項を無視することにより得られる。

式 (7) を連続方程式 (2) を用いて変形すると、

* 正会員 工博 琉球大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} + \kappa_n q^2 \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

が得られ、式(3)を用いると、渦度の伝播と粘性逸散との釣り合いを表わす次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial s} (q\omega) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

次に、下層流体の水粒子速度は鉛直分布しているので、表層の下端における接線流速の連続条件として、

$$\left. \begin{aligned} q &\equiv -\lambda = -\sqrt{(u_w - c)^2 + w_w^2} \\ \partial q / \partial n &= \partial u_w / \partial Z \\ &\quad - \{ \partial u_w / \partial \xi - \lambda \kappa_s (\partial \eta / \partial \xi) \} (\partial \eta / \partial \xi) \end{aligned} \right\} n = -\delta \quad \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。ここに、 u_w および w_w は波の水粒子速度の水平および鉛直成分、 δ は表層厚である。

3. 表層流モデル

変数変換

$$q = -\lambda(s) \cdot f(n), \quad Re = \lambda \cdot R \quad \dots\dots\dots (11)$$

により、基礎方程式(8)および境界条件式(10)はそれぞれ次のように変形される。

$$\frac{\partial}{\partial n} \{ (1/Re) (d^2 f / dn^2) - \kappa_n f^3 \} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= 1 \\ df/dn &= -(1/\lambda) (\partial q / \partial n) \end{aligned} \right\} n = -\delta \quad \dots\dots\dots (13)$$

まず、 $\kappa_n \neq 0$ のとき、式(12)を1回積分すると、

$$(1/Re) (d^2 f / dn^2) - \kappa_n f^2 = \tilde{A}(s) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\tilde{A}(s)$ は s に関する未知関数であり、海面に作用する風の応力条件から決定される。表層厚は水深にくらべて十分薄いとみなされるので、曲率 κ_n は厚さ方向には一定と仮定することができる。したがって、上式はさらに積分することができ、次式となる。

$$\left(df/dn \right)^2 = (f-1) \{ (2/3) \kappa_n Re \tilde{A} (f^2 + f + 1) + 2 Re \tilde{A} \} + \tilde{B}^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここに、 $\tilde{B} = df(-\delta)/dn$ である。上式(15)の解は、右辺3次式の3根を a, b, c とすると、 κ_n の正負に応じて以下の諸式で与えられる。

(D 1) $\kappa_n > 0; a < 1; b, c$; 共役複素数:

$$\left. \begin{aligned} f &= a + A(1 - cnv)/(1 + cnv), & \tilde{B} < 0 \\ f &= a + A(1 + cnv)/(1 - cnv), & \tilde{B} > 0 \\ v &= \sqrt{(2/3) \kappa_n Re \tilde{A}} \cdot (n + \delta) + v_1 \\ k^2 &= (2A - 3a)/(4A) \\ A^2 &= (9/4)a^2 - (1/4)(b - \bar{b})^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

(D 2) $\kappa_n > 0; 1 > a > b > c$:

$$\left. \begin{aligned} f &= b + (a - b)/cn^2 v, & \tilde{B} < 0 \\ f &= -(a + b) + (2a + b)/sn^2 v, & \tilde{B} > 0 \\ v &= \sqrt{(1/6) \kappa_n Re \tilde{A}} \cdot (n + \delta) + v_1 \\ k^2 &= (a + 2b)/(2a + b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

(D 3) $\kappa_n > 0; a > b > 1 > c$:

$$\left. \begin{aligned} f &= (a + 2b)sn^2 v - (a + b) \\ v &= \sqrt{(1/6) \kappa_n Re \tilde{A}} \cdot (n + \delta) + v_1 \\ k^2 &= (a + 2b)/(2a + b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

(D 4) $\kappa_n < 0; a > 1; b, c$; 共役複素数:

$$\left. \begin{aligned} f &= a - A(1 + cnv)/(1 - cnv), & \tilde{B} < 0 \\ f &= a - A(1 - cnv)/(1 + cnv), & \tilde{B} > 0 \\ v &= \sqrt{-(2/3) \kappa_n Re \tilde{A}} \cdot (n + \delta) + v_1 \\ k^2 &= (2A + 3a)/(4A) \\ A^2 &= (9/4)a^2 - (1/4)(b - \bar{b})^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(D 5) $\kappa_n < 0; a > 1 > b > c$:

$$\left. \begin{aligned} f &= b + (a - b)cn^2 v \\ v &= \sqrt{-(1/6) \kappa_n Re \tilde{A}} \cdot (n + \delta) + v_1 \\ k^2 &= (a - b)/(2a + b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(16)~(20)において、 sn および cn は母数 k の楕円関数、 v_1 は $f=1$ のときの v の値であり、 $(\bar{})$ は共役複素数を表わす。

次に、 $\kappa_n = 0$ のときは、連続方程式から $\partial q / \partial s = 0$ となるので、表層流は極値をとり、次の解が得られる。

(D 6) $\kappa_n = 0$:

$$f = (1/2) Re \tilde{A} (n + \delta)^2 + \tilde{B} (n + \delta) + 1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

未知関数 $\tilde{A}(s)$ および表層厚 δ は以下のように決定される。式(6)および(12)から $\tilde{A}$ は海面に作用する圧力勾配に等しく、

$$\tilde{A}(s) = -(1/\lambda^2) (\partial p / \partial s), \quad n = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。圧力¹⁰⁾は、次式で近似することができる。

$$p_s = \sigma_p \cdot (\partial \eta / \partial \xi), \quad \sigma_p \equiv Cs(\rho_a / \rho)(W_a - c)^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 W_a ; 風速、 Cs ; シャヘイ係数、 ρ_a ; 空気密度である。したがって、

$$\partial p / \partial s = -\sigma_p \kappa_s \{ 1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2 \} \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり、結局、次式が得られる。

$$\tilde{A}(s) = \kappa_s (\sigma_p / \lambda^2) \{ 1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2 \}, \quad n = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

一方、連続方程式は表層の下端においても成立し、

$$\left. \begin{aligned} \partial(q_\delta - q) / \partial s + \kappa_n (q_\delta - q) &= 0 \\ q_\delta &\equiv -\lambda, \quad n = -\delta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となるので、排除層厚 δ_1 ;

$$q_\delta \cdot \delta_1 = \int_{-\delta}^0 (q_\delta - q) dn \quad \dots\dots\dots (27)$$

を用いると、

$$\partial(q_\delta \cdot \delta_1) / \partial s + \kappa_n (q_\delta \cdot \delta_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となり、この式の解は次式で与えられる。

$$\delta_1 / \delta_{10} = (\lambda_{01} / \lambda) / \sqrt{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ただし、添字 c は波頂における諸量を表わし、積分に際しては波頂での条件 $q_\delta \cdot \delta_1 = q_{\delta 0} \cdot \delta_{10}$ が用いられている。

4. 砕波条件

波頂においては $\kappa_n=0$ であるから、表層流の層内分布は (D 6) で与えられる。また、Rankine-Stokes の砕波条件を用いると、波頂では $f=0$ となるので、表層厚および排除層厚 δ_{10} はそれぞれ次のようになる。

$$\delta_0 = 2/\{\sqrt{\bar{B}^2 - 2Re\bar{A}} - \bar{B}\} \quad (30)$$

$$\delta_{10} = (1/3)\delta_0 - (1/6)\bar{B}\delta_0^2 \quad (31)$$

海面での接線応力は、

$$\tau = -(\lambda^2/Re)(df/dn + \kappa_s f) \quad (32)$$

$$\tau_0 = (\lambda^2/Re)\sqrt{\bar{B}^2 - 2Re\bar{A}} \quad (33)$$

で与えられる。したがって δ_0 , δ_{10} , および τ_0 はすべて $Re^{-1/2}$ に比例する。

5. 数値計算結果および考察

以下では、下層流体に対する波動理論として、Stokes 波 (S-3)¹¹⁾、擬 Stokes 波 (QS-4)¹²⁾、およびクノイド波 (NC-3)¹³⁾ の各理論を用いる。

上述の表層流モデルでは、非砕波のうねりの波頂において波速 c と波の水粒子速度 u_{wc} との差 $c - u_{wc}$ に相当する表層流 q_0 が発生するときに、砕波が生ずる。

図-1 はこの条件での砕波波高 H_b と波の周期 T との関係を示し、無風時の関係も併記されている。表層流が大きくなると砕波波高は小さくなっている。しかし、風

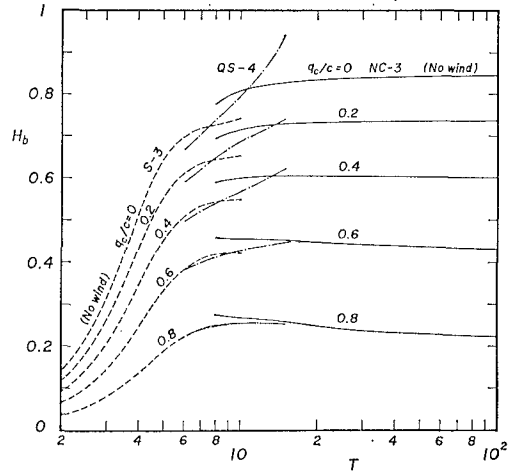
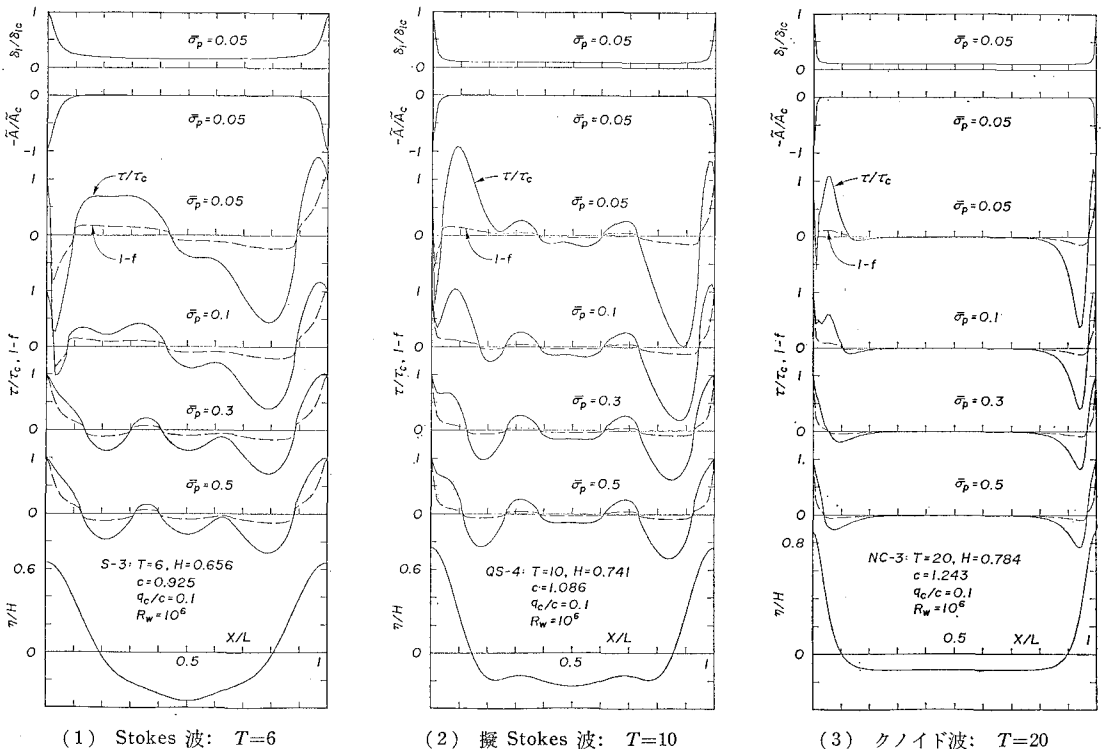


図-1 表層流が存在するときの定形進行波の砕波限界

が作用しているにもかかわらず、波形は理論上対称であるが、ある程度大きい表層流が生じるためには波の周期より長い時間を要し、波形も非対称となるのであろうから、このモデルの適用性については、 q_0/c に上限値が存在する。

図-2 は、砕波時の海面 ($n=0$) での接線応力 τ 、表層流 $1-f$ 、圧力勾配 $\bar{A}$ 、および排除層厚 δ_1 の位相分布を $\bar{\sigma}_p = \sigma_p/c^2$ をパラメータとして示すもので、すべての諸量は波頂での値で正規化されている。ただし、 R_w



(1) Stokes 波: $T=6$

(2) 擬 Stokes 波: $T=10$

(3) クノイド波: $T=20$

図-2 砕波時の接線応力、表層流、圧力勾配、および排除層厚の位相分布 ($q_0/c=0.1$, $R_w=10^6$)

は波のレイノルズ数であり、レイノルズ数 R とは

$$R/R_w=2\pi/(c^2T) \dots\dots\dots (34)$$

で関係付けられる。また、圧力勾配および排除層厚は、図面上他と区別できないので、1種類のみ示されている。

排除層厚は波頂で最大値を採り、圧力勾配は波頂では負であるから、圧力は波頂付近ではサクションとして作用している。一方、接線応力および表層流は、下層流体の速度場と圧力変化に敏感に応答していることがわかる。

波の谷の位相でわずかに2次波峯がみられる 図-2 (1) においては、圧力が小さいときの谷の位相での接線応力および表層流は、波頂の風下側で正、風上側で負となっている。圧力が增大すると、下層の速度場の影響が大きくなり、これらは波の峯付近で正、谷で負となり、2次波峯の影響が認められる。この状況は、2次波峯が明瞭に発生している同図 (2) において顕著である。したがって、接線応力と表層流は、波頂の風下側があたかもしゃへい領域であるかのように分布している。

図-2 の中で、圧力が大きいときのクノイド波に対する接線応力および表層流の位相分布は典型的である。両者とも谷の位相で負であり、波頂の風上および風下側で負の極値を採っている。この特性は、孤立波状の波面に沿う風の応力分布を数値計算した Benjamin⁵⁾ の結果と良く一致している。その解析における風の圧力は、本モデルと同様に海面の傾斜に同位相であると仮定されている。なお、接線応力が波頂での値より大きくなる ($|\tau/\tau_0| > 1$) 位相がみられるが、そこでの表層流は 1 より小

表-1 砕波時の波頂における圧力および接線応力

Theories	R_w	T	qc/c	$\bar{\sigma}_p$	$\tau_0/\bar{\sigma}_p$
S-3	10^6	6	0.1	0.05	1.89×10^{-3}
				0.1	1.33
				0.3	0.77
				0.5	0.59
QS-4	10^6	10	0.1	0.05	2.77
				0.1	1.95
				0.3	1.21
				0.5	0.87
NC-3	10^6	20	0.1	0.05	5.87
				0.1	4.13
				0.3	2.37
				0.5	1.83

い ($|1-f| < 1$) ので、水粒子が海面から離れることはない。

しかし、圧力が小さいとき、接線応力と表層流が主峯の風下側の直下において負となっていることに注目すべきである。これは圧力の増大とともに消滅している。この性状を調べるため、波頂における接線応力と圧力との比を示すと 表-1 のようになる。小圧力における接線応力の効果は大圧力におけるものより大きいことがわかる。したがって、波頂での接線応力の効果が圧力効果より大きいときに、接線応力と表層流の反転が主峯の風下側で生じることになる。また、そのときには、主峯の風上側における接線応力が波頂のそれより大きくなっている。以上のことから、主峯の風下側においてやがて spilling 領域が形成されるであろうことがわかる。

図-3 は、砕波時の波頂における接線応力 τ_0 の qc/c および R_w に対する変化を例示するものである。短周期の波より長周期の波が砕波するに必要な表層流は大きいので、接線応力は単調増加している。これらの曲線はほぼ同じ形をしていることから、式 (33) で与えられる接線応力に対する R_w^{-1} に比例する項の効果は小さく、 τ_0 は $R_w^{-1/2}$ に比例することがわかる。また、抵抗係数が 10^{-3} のオーダーであることを考えると、この接線応力の値は物理的に妥当である。

砕波時の波頂での表層厚 δ_0 は 図-4 のように変化する。これもまた $R_w^{-1/2}$ に

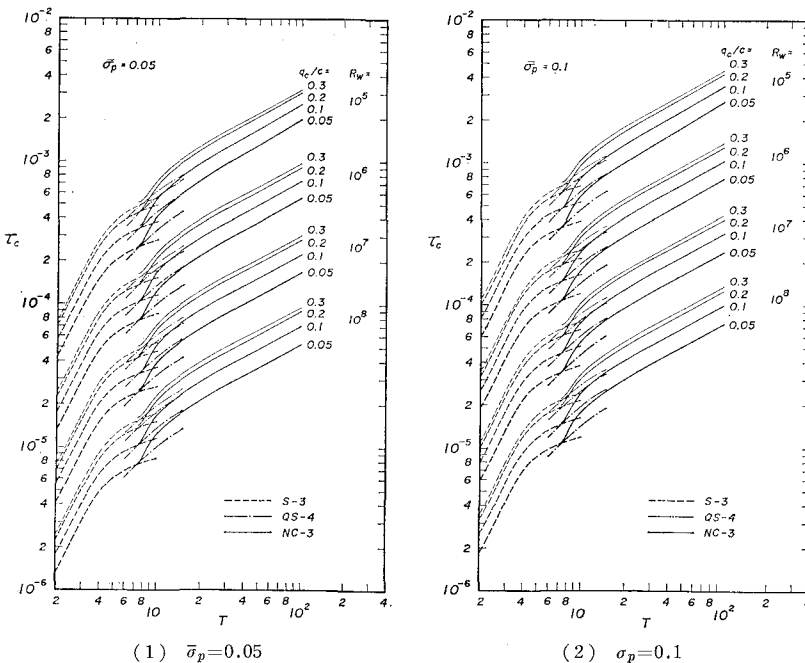
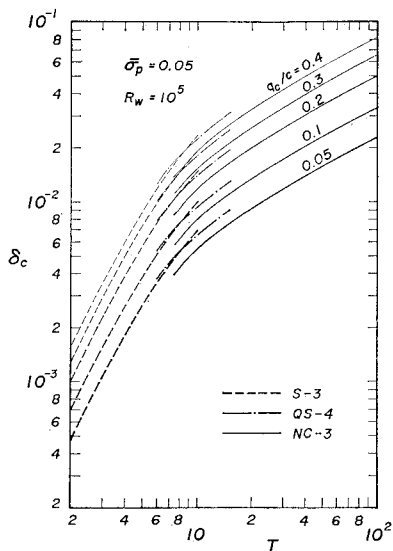


図-3 砕波時の波頂における接線応力の変化



図—4 砕波時の波頂における表層厚の変化 ($\sigma_p=0.05$, $R_w=10^5$)

比例するので、 $R_w=10^5$ に対する結果のみが示されている。表層厚は水深の数 % の程度であり、排除層厚は式 (31) から表層厚の約 $1/3$ である。なお、圧力および波のレイノルズ数が増加すると表層厚はわずかに減少する。そのときには、図—3 に示されているように接線応力は増加するので、表層流の層内分布の速度勾配が大きくなる。

6. 結 言

風により海面に発生する表層流の層内分布および位相分布を境界層近似により求め、表層流に起因する砕波現象を風の応力（圧力、接線応力）との関連で論じた。その結果は、次のように要約される。

- (1) 接線応力および表層厚は、レイノルズ数の $-1/2$ 乗に従って変化し、水深の減少とともに単調に増加する。
- (2) 波頂における排除層厚は表層厚の約 $1/3$ である。

- (3) 圧力は波頂付近ではサクションとして作用する。
- (4) 接線応力および表層流は、波頂の風下側にしゃへい領域が形成されているかのように位相分布し、接線応力が圧力にくらべて大きいときには、主峯の風下側の直下において両者の値は反転し、負値となる。したがって、そこではやがて spilling 領域が形成されると考えられる。

最後に、この表層流モデルの適用性は、海面に作用する風の圧力の評価に依存していることを指摘しておく。

参 考 文 献

- 1) Stokes, G. G.: On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc., Vol. 8, 1847, pp. 441~455.
- 2) Stewart, R. W.: Mechanics of the air-sea interface, Phys. Fluids, Suppl., Vol. 10, 1967, S47~S55.
- 3) Longuet-Higgins, M. S.: Action of a variable stress at the surface of water waves, Phys. Fluids, Vol. 12, 1969, pp. 737~740.
- 4) Miles, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 3, 1957, pp. 185~204.
- 5) Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy boundary, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, 1959, pp. 161~205.
- 6) Banner, M. L. and O. M. Phillips: On the incipient breaking of small scale waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 65, 1974, pp. 647~656.
- 7) Phillips, O. M. and M. L. Banner: Wave breaking in the presence of wind drift and swell, Jour. Fluid Mech., Vol. 66, 1974, pp. 625~640.
- 8) Banner, M. L. and W. K. Melville: On the separation of air flow over water waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 77, 1976, pp. 825~842.
- 9) Milne-Thomson, L. M.: Theoretical Hydrodynamics, 5th Ed., Macmillan, London, 1968, 743 p.
- 10) Jeffreys, H.: On the formation of waves by wind, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 107, 1924, pp. 189~206.
- 11) Skjelbreia, L.: Gravity waves, Stokes' third order approximation, Tables of functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, ASCE, 1959, 337 pp.
- 12) 土屋義人・安田孝志: 通減せつ動法による擬 Stokes 波理論, 第 25 回海岸工学講演会論文集, 1978, pp. 6~9.
- 13) 土屋義人・安田孝志: 新しいクノイド波理論の試み, 第 21 回海岸工学講演会論文集, 1974, pp. 65~71.