

2次元フォーストプリームの微分・積分混成モデル

室田 明*・中辻啓二**・日置洋平***

1. ま え が き

フォーストプリーム,あるいは浮力噴流は,温排水や下水処理水の海域での放流,大気への排煙等によく観られる流体運動であり,環境問題に関連して興味もたれている.静止流体中に放出された温度・密度の異なる放流束の形態は,初期には運動量流速の卓越した噴流的挙動を示し,放出口からの距離が大きくなるにつれて浮力流束が次第に優勢となりプリームの挙動に移行する.

噴流あるいはプリームの解析モデルは枚挙にいとまがないほど数多く提案されている.それらを大別すると,古典的微分モデルと積分モデルとに分類できる.前者では, Tollmien¹⁾, Görtler²⁾ の噴流解が高名であり,流速あるいは浮力は $x^n \cdot f(y/x^m)$ なる相似分布で表示して境界層方程式を直接解くことにより得られる.従って,この解法では浮力流束が0,つまり均質噴流か,あるいは運動量流束と浮力流束とが均衡して分布形状が流程方向に変化しないプリームにおいてのみ解が存在することになる.つまり,微分モデルは発達段階のフォーストプリームに対しては適用できないという欠点をもつ.また,プリームの拡大は渦動粘性・拡散係数で表現される.

これに対して,積分モデルは実験より得られる流速・浮力の相似分布形(たとえば, $U_0(x) \cdot \exp(-y^2/W^2)$ をプリーム軸の横断方向に積分した流束の流程方向保存則を基礎に展開される.運動量流束と浮力流束が流程方向に変化するプリームに対しても適用可能であり,また乱れ輸送の微細構造を勘案しないで解けるという利点を有する反面,方程式の数の不足から付加的な条件として周囲流体の連行加入量を実験的に定めざるを得ない欠点がある.連行速度は Morton et al.³⁾ によって最初に提案された概念であり,プリームの安定度はリチャードソン数の関数として連行速度の中に導入される^{4),5)}.

渦動粘性係数あるいは連行係数は現象のとらえ方の違いはあるものの,乱流輸送という同一現象を記述するも

のである.理論展開のなかで両者を結びつけ,しかもフォーストプリームの全流程にわたって解析可能なモデルを開発する必要がある.この種の試みの一つに Phillips⁶⁾ のモデルがある.本研究では Phillips の研究を基礎に微分・積分混成モデルを展開して,流速と浮力の分布形状を勘案した形で連行係数を解析的に求める.さらに,得られた連行係数を用いて流速と浮力の流程方向変化を求め,実験結果との比較から本モデルの適合性を検証する.

2. 微分・積分混成モデルの構成

(1) 基礎方程式

鉛直2次元フォーストプリームの支配方程式および境界条件は,せん断応力を渦動粘性係数を用いて表わせば,次式のようになる.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = B + \epsilon_M \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$U \frac{\partial B}{\partial x} + V \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\epsilon_M}{Pr} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} V(x,0) &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial y}(x,0) = 0 \\ U(x,\infty) &= 0, \quad B(x,\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに, x : プリーム軸(鉛直)方向座標, y : プリーム軸の直角方向座標, U : x 方向流速, V : y 方向流速, B : 浮力 $= (\rho_a - \rho)g/\rho_a$, ρ : 密度, ρ_a : 周囲環境水密度, g : 重力加速度, ϵ_M : 渦動粘性係数, ϵ_B : 渦動拡散係数, Pr : 乱流プラント数 $= \epsilon_M/\epsilon_B$.

(2) モデル展開の概要

Phillips の提唱したモデルの特色は任意点での水理量を断面積分量と無次元の分布関数の積で表現した点にある.すなわち,流れ関数 ϕ ($\partial\phi/\partial y = U$, $\partial\phi/\partial x = -V$), 浮力 B および y 方向距離 ζ はつぎのように定義される.

$$\left. \begin{aligned} \phi(x,y) &= Q(x) \cdot f(\zeta) \\ B(x,y) &= D(x) \cdot \theta(\zeta) \\ \zeta &= (x,y) = y/W(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

* 正 会 員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
 ** 正 会 員 工修 大阪大学講師 工学部土木工学科
 *** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科前期課程学生

ここに,

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= 2 \int_0^\infty U(x, y) dy \\ W(x) &= Q^2(x) / 2 \int_0^\infty U^2(x, y) dy \\ D(x) &= \frac{1}{W(x)} \cdot 2 \int_0^\infty B(x, y) dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

つまり、微分モデルにおける未知分布関数 f, θ と積分モデルにおける断面積分量 Q, D およびブリューム幅 W の積で流速および浮力を定義しており、境界条件・初期条件を考慮することによって両モデルの利点を有効に併用した展開が可能となる。

図-1 に示す流れ図を用いて混成モデルの概要を示すことにしよう。式(5)を式(2),(3)に代入した後に、各式を ζ について 0 から ∞ まで積分して f, θ を消去する。その際、式(5)を式(6)に代入することにより得られる f', f'' および θ の積分値を用いるならば、断面積分量に関する積分モデルの基礎式が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{W} \right) &= WD \\ \frac{d}{dx} (QD) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

上式中第一式がブリュームにおける運動量の保存則、第二式が浮力流束の保存則を示している。積分モデルと同様に、未知数 Q, D, W の数が方程式の数を上回っており解けない。そこで、連行方程式を導入することにするが、次元を合わせるために次式を採用する。

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\lambda \varepsilon_M}{W} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 λ は無次元のパラメーターである。

次に、式(7),(8)を積分する前の基礎式に代入すれば、断面積分量はうまく整理されて分布関数 f, θ に関する微分方程式が下記のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f''' + \lambda(f \cdot f'' + f'^2) \\ + \gamma(\theta - f'^2) &= 0 \\ \theta'' + P_r \cdot \lambda(f\theta' + f'\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに,

$$\gamma = DW^3 / \varepsilon_M Q \dots\dots\dots (10)$$

$\gamma = 0$ とすれば、式(9)は Görtler の求めた均質噴流の微分方程式となり、境界条件を考慮して2回積分すれば、解 $f = \tanh \zeta$ が求めら

れる。フォーストブリュームの場合には、さらに、式(9)中の係数 λ と γ とを一つにまとめるように変数変換をおこなうと次式になる。

$$\left. \begin{aligned} F''' + FF'' + F'^2 + (\gamma/\lambda)(G - F'^2) &= 0 \\ G'' + P_r(F \cdot G' + F' \cdot G) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

また、そのときの境界条件は式(4)で与えられ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 0 \\ G(0) &= 1, \quad G'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

仮に、係数 γ/λ と P_r が定数として与えられるならば、式(11),(12)は数値的に解くことができ、分布形状 f, θ は求められる。

渦動粘性係数と連行係数との関連から、係数 γ/λ を誘導してみよう。連行方程式(8)を連行係数 E を用いた表現に書き直すと、

$$\frac{dQ}{dx} = E \frac{Q}{W} \dots\dots\dots (13)$$

となり、式(10),(13)より γ/λ は次式のように求まる。

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \left(\frac{DW^3}{Q^2} \right) \cdot \frac{1}{E} = \frac{R_i}{E} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $R_i = DW^3/Q^2$

つまり、係数 γ/λ は浮力効果の度合いを表わす断面平均リチャードソン数 R_i と連行係数 E との比で表現できる。

図-1 の流れ図にもどれば、 R_i, E および P_r の値を仮定することにより分布関数 f, θ に関する非線型微分

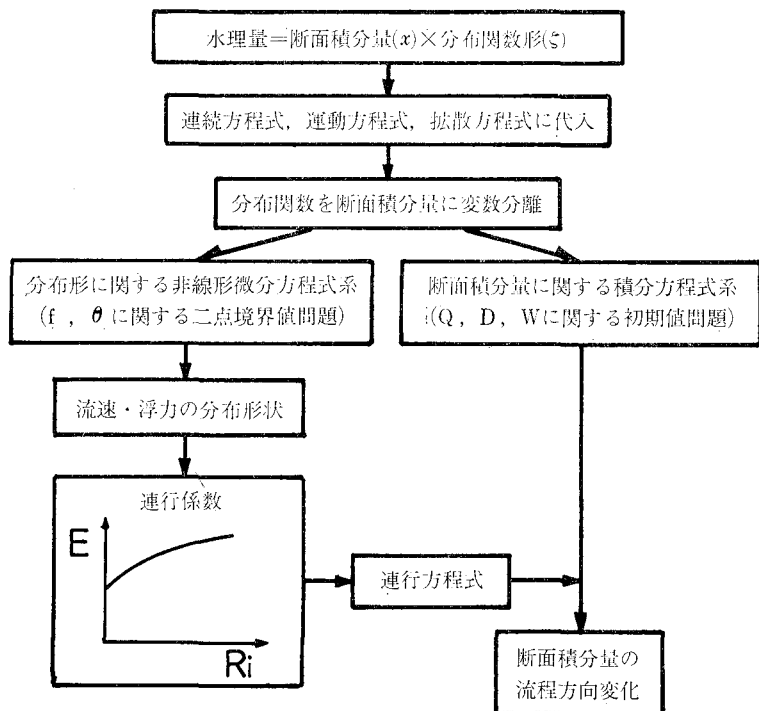


図-1 モデル展開の概要

方程式系 (式 (11), (12)) を解くことができ、流速と浮力の分布形状が求まる。と同時に $E \sim R_i$ の関係が P_r の関数として求められる。この $E \sim R_i$ の関係を用いて積分方程式系 (式 (7), (13)) を初期値問題として解けば、断面積分量 Q, D, W の流程方向変化が求まる。

(3) 数値解析法

分布関数 f, θ に関する非線形3階常微分方程式系は二点境界値問題となり、解析的には解けない。そこで準線型化法により線型漸化式で近似して数値的に解いた。その手順は日野⁷⁾の教科書にしたがった。

また、断面積分量 Q, D および W に関する積分方程式系は初期値問題となる。放出口での Q_0, D_0, W_0 を適宜初期条件として与えることにより、Runge-Kutta-Gill法を用いて容易に解ける。

3. 数値解の特性

(1) 流速と浮力の分布形状

係数 $\gamma/\lambda (=R_i/E)$ と乱流プラント数 P_r の任意の値を式 (11) に代入して数値的に解くことにより、流速と浮力の分布形状が求まる。 P_r あるいは γ/λ を変化させたときの分布形状を図-2, 3に示す。縦軸はプリューム軸上の値で無次元表示した流速と浮力を示し、横軸は流速の半値半幅 y_u で無次元表示した横方向距離を示す。

数値解 $F(\xi)$ および $F'(\xi)$ は P_r あるいは γ/λ の値にかかわらずほとんど変化しない。従って無次元表示した流

速分布 U/U_0 も同一曲線でほぼ近似でき、しかも均質噴流に対する Görtler の解と同一である。これに対して、浮力分布 B/B_0 は P_r および γ/λ の値の変化に敏感に反応する。すなわち、 P_r と γ/λ の値が小さくなるにつれて、軸上浮力が減少するとともに、横方向の拡がりが増加する傾向が見られる。 B_0 で無次元表示したため軸上浮力の減少は同図に表せないが、 $P_r=0.7, 0.5$ となるにともない B_0 の値は $P_r=1.0$ の場合の 87.5%, 67.5% になる。乱流プラント数 P_r は渦動粘性係数と渦動拡散係数との比であり、 P_r の減少は渦動拡散係数の相対的な増加、つまり浮力分布形の拡がりを意味している。このことは図-2 より本混成モデルで矛盾なく評価されていると判断できる。ちなみに、浮力と流速の半値半幅を用いて定義される拡散幅比 $\sigma = y_b/y_u$ は $\sigma^2 = 1/P_r$ の関係を満たしており、モデルの妥当性が定量的にも検証できる。一方、係数 γ/λ の増加は運動方程式 (11)₁ 中の浮力項の増大を意味しており、それに伴って浮力分布の拡がりは減少している (図-3)。つまり、 P_r を一定にして計算しても、浮力の影響が増加するにつれて実質的な乱流プラント数が減少することを意味している。中込・平田⁸⁾は2次元プリュームの P_r の値を実験的に求め、その値 $P_r=0.71$ は2次元噴流の 0.64 よりも大きく、浮力分布の拡がりが小さくなることを報告している。図-3 の解析結果は彼等の実験結果と定性的に同じ傾向を示す。

(2) 連行係数の評価

渦動粘性係数 ϵ_M に対してプラントルの第二理論を適用すれば、 ϵ_M はプリュームの軸上流速 U_0 と代表幅 W の積で表現され次式のようになる。

$$\epsilon_M = \kappa U_0 W \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 κ は混合係数と呼ばれる比例常数である。

式 (15), (8) を式 (13) に代入し数値的に求めた関数 F を採用することによって、連行係数 E は断面積分量 Q, D, W とは無関係につきのように求まる。

$$E = \lambda J^4 F'(0)/K^2 \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{ここに、} J = 2 \int_0^\infty F'(\xi) d\xi, K = 2 \int_0^\infty F'(\xi) d\xi$$

すなわち、流速分布形状が求まれば、混合係数 κ を実験的に決めることにより E を算出できる。つまり、 E と R_i の関数が P_r をパラメーターにして微分方程式系から導くことができる。

その関係を示したのが図-4である。縦軸は、他の解析値および実験値との比較のために、 $dQ/dx = \alpha \cdot U_0$ で定義される慣用的な連行係数 $\alpha (\equiv E/f'(0))$ を採用している。さて、任意に設定した R_i/E の値から E と R_i の関係を求めるが、その拘束条件としてつぎの2つが考えられる。一つは十分に発達したプリュームにおいては R_i は流程方向に変化しないという平衡条件である。 R_i を x で微分して式 (7), (13) の関係を用いれば、

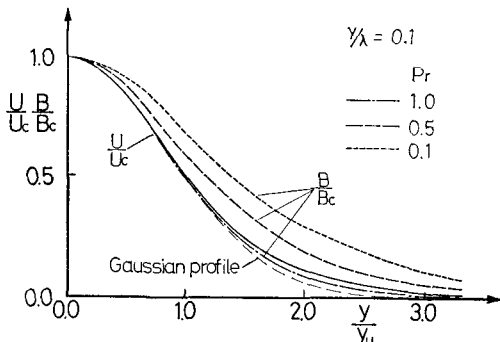


図-2 分布形状に及ぼす P_r の影響

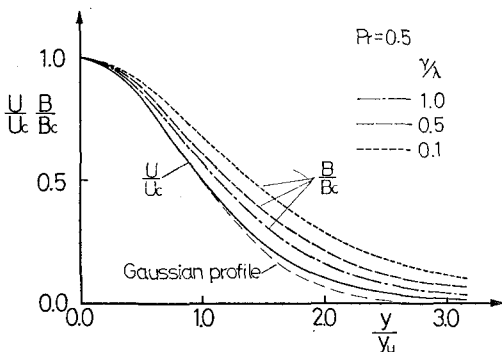


図-3 分布形状に及ぼす γ/λ の影響

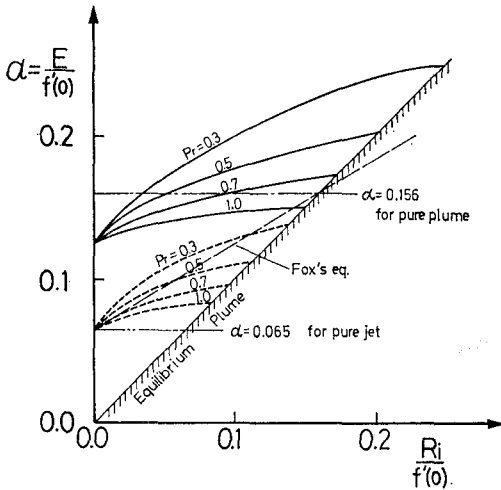


図-4 連行係数とリチャードソン数との関係

$$\frac{dR_i}{dx} = 3R_i(E - R_i) \quad (17)$$

となり、 $R_i=0.0$ あるいは $R_i=E$ のときにこの条件は満たされる。すなわち、前者は均質噴流、後者は平衡ブリュームに対応しており、同図中で $R_i=0.0$ と $R_i=E$ で囲まれる領域が適用範囲である。もう一つの条件は $R_i=0.0$ における連行係数を均質噴流のそれと一致するように E の値を定めることである。Reichardt⁹⁾ は実験的に $\kappa=0.01086$ を得ており、そのときの α の値は 0.125 となる。また、Görtler の解を採用すれば $\alpha=0.065$ となる。両方法により求まる E と R_i の関係を Pr をパラメーターにして実線と破線で図-4に示す。また、比較のために Görtler, Rouse et al.¹⁰⁾ および Fox の式も併せて載せた。

同図によれば、連行係数は局所リチャードソン数の増加とともに非線型に増大する傾向を示す。浮力効果のフォーストブリュームの連行に及ぼす影響を理論的に誘導できた点で非常に興味深い。これは、運動エネルギーを保存則に連立させて導いた Fox の関係式 $\alpha = a_1 + a_2(Pr) \cdot R_i$ とよく対応している。しかしながら、連行係数の絶対値に関して言えば、 $\alpha = E/f'(0) = 0.065$ から出発した α の値は、 R_i が増大して平衡ブリューム ($E=R_i$) に到達した時点でも、ブリュームでの Rouse et al. の実験値を大きく下まわる。 $Pr < 0.3$ と極端に小さな乱流プラントル数を採用したとき

にのみ、均質噴流と平衡ブリュームとを連結することが可能となる。これに対して、Reichardt の $\kappa=0.01086$ を採用した場合には平衡ブリュームで $Pr \approx 0.8$ となり、先に示した中込・平田の実験値、また著者ら⁷⁾ の実験値 0.65~0.85 に近い値になるものの、均質噴流での連行係数が Görtler の解析解の約 2 倍にもなるという不合理を本混成モデルは含んでいる。

4. 水理実験結果との比較

検証のための水理実験は前面ガラス張りの水槽（高さ 130 cm, 幅 90 cm, 奥行 90 cm）の前面 15 cm を仕切っておこなった。計測水槽の下方から上方へ約 2 cm/s で流れる一様流中に、幅 0.4 cm, 長さ 15 cm のスリットから温水を鉛直上向きに噴出した。流速および温度は超小型プロペラ流速計とサーミスターを用いて計測した。

(1) 断面積分量の流程方向変化

図-5, 6 は断面積分した流量および浮力の流程方向変化を示す。図中の曲線は $\kappa=0.01086$, $Pr=0.7$ で計算した解析結果であり、プロットは実験値である。流量の解析結果は実験値と同様の傾向を示し、初期密度フルード数 Fd_0 が小さくなるにつれて Q/Q_0 の増加率が大きくなるというブリュームの特性をうまく反映している。ただ、解析値は 3 ケースともに実験値よりも一様に小さな値を示しており、約 90% 程度である。これに対して、浮力の通減は噴出口近傍を除いて解析値と実験値とは比較的よく一致している。

(2) 軸上流速の通減特性

断面積分量和断面内分布形の流程方向変化から、実験に対応する $Fd_0=76.0, 17.6, 9.0$ の各ケースごとに軸上流速の通減特性を求めた。その結果を実験値および

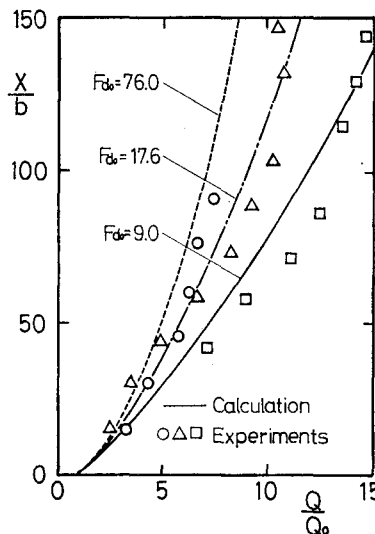


図-5 流量の流程方向変化

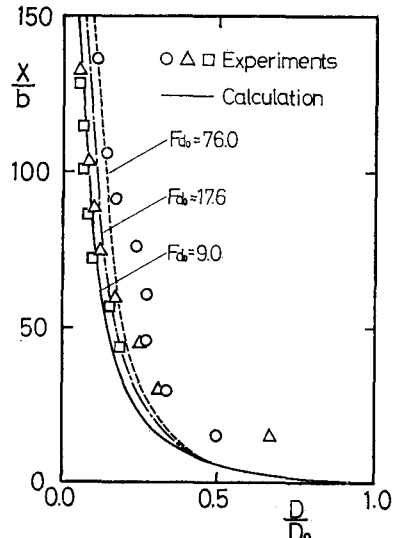


図-6 浮力の流程方向変化

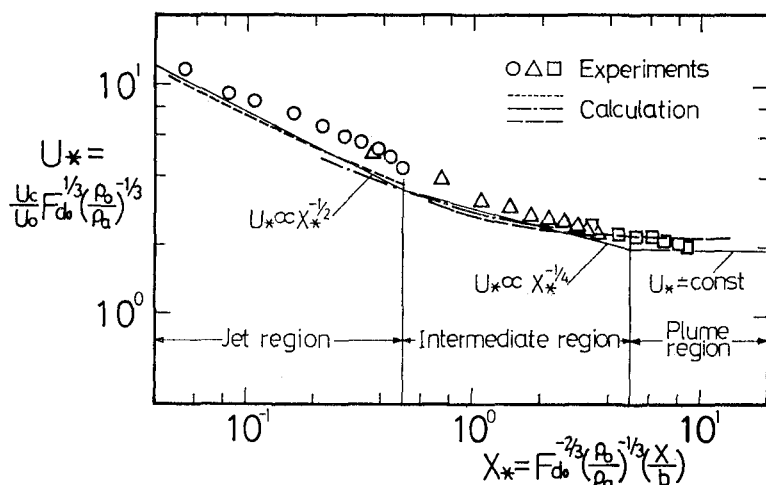


図-7 ブリューム軸上の流速減特性

Chen-Rodi¹²⁾ の半経験式とともに 図-7 に示す。Chen-Rodi の scaling law では領域ごとの係数は実験値と合致するように求める必要がある。図中の細い実線は Kotsovinous¹³⁾ の実験値に合致するように求めた彼等の半経験式である。その点から言えば今回の実験値は Kotsovinous のそれよりも全領域で一様に大きい値を示している。全領域にわたって約 1.2 倍の系統的な増大を示していることから、その原因として周囲流体が一定流速で流動していること、また Fd_0 に測定誤差が含まれる可能性があること等が考えられよう。

さて、図中の太線が本モデルの解析結果を示す。解析値は噴流領域・中間領域にかけて Chen-Rodi の減速特性式と良好に一致しており、モデルの妥当性が確認できる。ただ、 $X_* > 2.0$ になると解析値は Chen-Rodi の特性式、あるいは Rouse et al. や Kotsovinous の実験値よりもやや上まわる傾向にある。解析には 図-5, 6 と同様に $\kappa=0.01086$, $P_r=0.7$ を採用しており、 E と R_i の関係からすればブリューム領域での連行係数が期待できるはずである。それにもかかわらず、実際には中間領域での連行量が次第に減少しており、それが同図の差違をもたらしたと考えられる。この原因の一つに、数値解の特性で述べたように、リチャードソン数の増加とともに実質的な乱流プラントル数が増大することが挙げられる。

5. あとがき

フォーストブリュームの全流程にわたって解析可能な微

分積分混成モデルを展開した。その特徴は、任意点での水理量を断面積分量と無次元の分布関数の積で表現することにより、従来の積分モデルと微分モデルの利点をうまく活用した理論展開が可能となる点にある。また、連行係数とリチャードソン数との関係が解析的に誘導される点が大きな特色である。ただ、本文で示したように本混成モデルでは連行係数を多少過小評価する傾向にあり、この点に関して本混成モデルを改善していく必要がある。

参考文献

- 1) Tollmien, W.: Berechnung turbulenter ausbreitungsvorgänge, ZAMM, Vol. 6, pp. 468~478, 1926.
- 2) Görtler, H.: Berechnung von aufgaben der freien turbulenz auf grund eines neuen näherungsansatzes, ZAMM, Vol. 22, pp. 244~254, 1942.
- 3) Morton, B. R., G. I. Taylor and J. S. Turner: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Roy. Soc. London, A 234, pp. 1~23, 1956.
- 4) Fox, G. D.: Forced plume in a stratified fluid, Jour. Geophys. Res., Vol. 75, pp. 6818~6835, 1970.
- 5) List, E. J. and J. Imberger: Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes, ASCE, Vol. 99, HY9, pp. 1461~1474, 1973.
- 6) Phillips, W. F.: The effect of Froude number on entrainment in two-dimensional line plume, Jour. Fluids Eng., Trans. of the ASME, Vol. 103, pp. 471~477, 1981.
- 7) 日野幹雄: 境界値問題の解法, 朝倉書店, 210 p., 1981.
- 8) 中込秀樹・平田 賢: 二次元サーマルブリュームの乱流拡散機構, 日本機械学会論文集 (B), 46 巻, 410 号, pp. 2023~2032, 1980.
- 9) Reichardt, H.: Gesetzmäßigkeiten der freien turbulenz, VDI-Forschungsheft, 414 p., 1942.
- 10) Rouse, H., C. S. Yih and H. W. Humphreys: Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol. 4, pp. 201~210, 1952.
- 11) 室田 明・中辻啓二・石田悦一: 鉛直上向きブリュームの混合希釈特性について, 関西支部講演概要, II-15, 1983.
- 12) Chen, C. J. and W. Rodi: Vertical turbulent buoyant jets—A review of experimental data, Pergamon Press, 83 p., 1980.
- 13) Kotsovinos, N. E.: Plane turbulent buoyant jets, Jour. Fluid Mech., Vol. 81, pp. 25~44 and pp. 45~62, 1977.