

ハイブリッド型境界要素法による任意反射率 防波堤前面の船体動揺解析

清川 哲志*, 平山 彰彦**, 高梨 和光***, 小林 浩****

1. はじめに

船体の動揺特性を把握するためには、通常、付加質量、造波減衰係数などの流体力係数および波強制力を求める。そして、これらを用いて船体運動の自由度に応じたベクトル・マトリックス運動方程式を解いて動揺特性を求める。これに対し、井島ら¹⁾はグリーン公式を用いて船体の運動方程式を組み込んだ積分方程式法を開発し、個々の流体力係数を求めることなく、直接動揺特性を求める方法を提案した。この解析法は係留条件が決まっている場合は便利であるが、係留条件だけを変えて種々のケースで検討する場合には、大次元のマトリクス計算を繰り返し行う必要があり、計算時間等の点で著しく効率が悪い。本来、流体力係数、波強制力などは係留条件と無関係に定まるものなので、通常行われるように、まず流体力係数、波強制力を求め、次に運動方程式を解くというほうが便利である。この場合、係留条件の違いは運動方程式の段階ではじめて考慮される。

従って本研究では、流体力係数が別個に求められる定式化を行う。また、任意反射率防波堤の境界条件を、波形勾配と水位の時間変動率で表す方法を利用して導き、従来考慮されなかった任意反射率防波堤前面の船体動揺を定式化する。これは清川ら²⁾が港内波浪シミュレーションで用いたもので、防波堤の反射率を与条件として取り扱うことができるので実用的である。本論文では、これらを組み込んでグリーン公式を用いた定式化を行うが、この際、仮想境界面で減衰散乱波の項を考えた解析解を接続するハイブリッド型境界要素法による定式化を行う。これは精度を損うことなく解析領域を小さく取

2. ハイブリッド型境界要素法

(1) 基礎方程式と境界条件

任意な水深を有する水域中に船体があり、これに水深

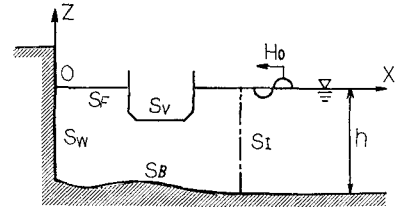


図-1 解析領域と座標系

h を有する領域から角振動数 ω 、波高 H_0 の微小振幅波が入射し、この波により船体は微小な動揺運動をしているものとする。座標系 (x, z) を図-1に示すように定義する。非圧縮性完全流体における定常波動問題とし、流体運動を速度ポテンシャルを用いて記述する。微小運動の仮定から、場全体の速度ポテンシャル Φ は、入射波、反射散乱波、および船体の動揺により生じる発生波のポテンシャルの和として次のように表される。

$$\Phi(x, z, t) = \{\phi_0(x, z) + \phi_i(x, z)\} e^{i\omega t} + \sum_{l=1}^3 \frac{d}{dt} (D_l e^{i\omega t}) \phi_l(x, z) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 ϕ_0 、 ϕ_i は入射波および反射散乱波のポテンシャル、 ϕ_l ($l=1\sim3$) は単位速度で l 方向に運動したとき生じる発生波のポテンシャルで、 $l=1, 2, 3$ がそれぞれ sway, heave, roll に対応するものとする。また D_l は l 方向動揺振幅 ξ_l と入射波に対する位相差 ε_l からつくられる複素動揺振幅 ($D_l = \xi_l e^{i\varepsilon_l}$) である。

各ポテンシャルのうち、入射波のポテンシャル ϕ_0 は周知のように次式で与えられる。

$$\phi_0 = \frac{g H_0}{2\omega} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0 x} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 g : 重力加速度、 k_0 : 波数 ($k_0 \tanh k_0 h = \nu$ の実正根、ただし $\nu = \omega^2/g$) である。

式 (2) は一定水深 h に対するものであるが、線形性を仮定しているため、最終的に Φ が後に述べる所与の基礎方程式と境界条件さえ満足していればよく、本解析では水深の変化による ϕ_0 自身の变化は ϕ_i の中で考慮されている。

さて ϕ_0 以外のポテンシャル ϕ_l ($l=1\sim4$) は以下の基礎方程式と境界条件を満足する関数として得られる。

* 正会員 清水建設(株) 大崎研究室
** 正会員 清水建設(株) 研究所
*** 正会員 工修 清水建設(株) 大崎研究室
**** 正会員 Eng. Sc.D. 清水建設(株) 研究所主席研究員

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \phi_l &= 0 & (\text{in } \Omega) \cdots (3) \\ \partial \phi_l / \partial z - \nu \phi_l &= 0 & (\text{on } S_F) \cdots (4) \\ \partial \phi_l / \partial n &= \delta_{il} v_{nl} & (\text{on } S_B) \cdots (5) \\ \partial \phi_l / \partial n &= v_{nl} & (\text{on } S_V) \cdots (6) \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial x} &= i k_0 \left\{ \frac{1-K_r}{1+K_r} \phi_l - \delta_{il} \frac{2K_r}{1+K_r} \phi_0 \right\} & (\text{on } S_W) \cdots (7) \\ \frac{\partial \phi_l}{\partial x} &= - \sum_{n=0}^{\infty} k_n q_n (l_0 + \varepsilon) C_n(z) \int_{-h}^0 \phi_l(l_0, \xi) C_n(\xi) d\xi & (\text{on } S_I) \cdots (8) \end{aligned} \right.$$

ここに、 δ_{il} : クロネッカー記号 ($l=4$ のとき 1, それ以外のとき 0), K_r : 固定壁 S_W の反射率, l_0 : 仮想面 S_I までの距離, k_n : 固有値 ($k_n \tan k_n h = -\nu$ の実正根), ε : 微小な距離である。また式 (5), (6) における n による微分は外向き法線方向微分を表す。 v_{nl} は l 方向単位速度 ($l=1, 2$), 単位角速度 ($l=3$) に対応した船体表面上の点の速度の法線方向成分, および ϕ_0 による船体表面上の水粒子速度の法線方向成分 ($l=4$) である。これらは次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} v_{n1} &= n_x, & v_{n2} &= n_z, \\ v_{n3} &= (z-z_0)n_x - (x-x_0)n_z \\ v_{n4} &= -n_x \partial \phi_0 / \partial x - n_z \partial \phi_0 / \partial z \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (9)$$

ただし、 n_x, n_z は船体表面上の単位法線ベクトルの x, z 成分である。また (x_0, z_0) は船体重心の座標である。式 (8) 中の $q_n(x), C_n(z)$ はそれぞれ次のように定義される。

$$q_n(x) = \begin{cases} \frac{2ik_0^2}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu} e^{-ik_0(x-l_0)} & (n=0) \\ \frac{2k_n^2}{h(k_n^2 + \nu^2) - \nu} e^{-k_n(x-l_0)} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$C_n(z) = \begin{cases} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} & (n=0) \\ \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \cdots \cdots (11)$$

式 (7) は、反射率 K_r を有する壁での境界条件で、この妥当性は後に数値計算例のところで述べる。ただし、この境界条件は減衰散乱波を考慮しないで導かれているので、減衰散乱波の影響が大きいと考えられる場合には適用できない。

式 (8) は仮想面における境界条件で、外部領域 ($x > l_0$ の領域) における解析解と接続したものである。これについては次節で述べる。

(2) 外部領域の解

$x > 0$ の領域における反射散乱波の一般解は、固有関数の重ね合せによる無限級数の形で次のように表される。

$$\phi_l(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ln} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} e^{-k_n x} + A_{l0} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} e^{-ik_0 x} \cdots \cdots (12)$$

ここに、 A_{ln} ($n=0, 1, \dots$) は複素係数である。

式 (12) で $x=l_0$ とし、その両辺に式 (9) で定義される $C_n(z)$ を乗じて海底面から平均水面まで積分すると、固有関数の直交性により、複素係数 A_{ln} が $x=l_0$ (仮想面) におけるポテンシャル値を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_{l0} &= \frac{2k_0^2 e^{ik_0 l_0}}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu} \int_{-h}^0 \phi_l(l_0, \xi) C_0(\xi) d\xi \\ A_{ln} &= \frac{2k_n^2 e^{k_n l_0}}{h(k_n^2 + \nu^2) - \nu} \int_{-h}^0 \phi_l(l_0, \xi) C_n(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \cdots (13) \quad (n=1, 2, \dots)$$

これを一般解 (12) に代入し、式 (10) で定義した $q_n(x)$ 等を用いると、式 (12) は次のように表される。

$$\phi_l(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) C_n(z) \int_{-h}^0 \phi_l(l_0, \xi) C_n(\xi) d\xi - iq_0(x) C_0(z) \int_{-h}^0 \phi_l(l_0, \xi) C_0(\xi) d\xi \cdots (14)$$

これは反射散乱波の一般解 (12) を仮想面上でのポテンシャルを用いて表したもので、 $x > l_0$ で有効である。

式 (14) を x で偏微分し、解の有効な範囲で適用するために、 ε を微小な距離であるとして、 $x=l_0+\varepsilon$ としたものが仮想境界面 S_I における境界条件 (8) である。

(3) グリーン公式の適用

一般に調和関数 u に対して次のグリーン公式が成り立つ。

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(Q)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right\} ds \cdots \cdots \cdots (15)$$

ここに、 S : 閉領域の境界線, P : 閉領域内部の点, Q : 境界線上の点, r : PQ 間の距離である。なお、点 P を境界上に持ってくると、境界の形状に応じて上式の係数 $1/2\pi$ は $1/\alpha$ となる。ただし α は点 P において境界線のなす角である。

さて、このグリーン公式を $u=\phi_l$ とし、図-1 で示した境界 S_F, S_V, S_W, S_B, S_I で囲まれる閉領域に適用し、さらに各境界面で式 (4)~(8) で表される境界条件を適用する。この結果次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \alpha \phi_l(a, b) \\ &= \int_{S_F} \ln \left(\frac{1}{r} \right) v_{nl} ds - \int_{S_V} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \phi_l ds \\ &+ \int_{S_F} \left(\nu \ln \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{r} \right) \phi_l ds \\ &- \int_{S_W} \left\{ i k_0 \frac{1-K_r}{1+K_r} \ln \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right\} \phi_l ds \\ &+ \int_{S_W} i k_0 \delta_{il} \frac{2K_r}{1+K_r} \phi_0 \ln \left(\frac{1}{r} \right) ds \\ &+ \int_{S_B} \left\{ \delta_{il} \ln \left(\frac{1}{r} \right) v_{n4} - \phi_l \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right\} ds \\ &- \int_{S_I} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \phi_l ds \end{aligned}$$

$$-\int_{S_I} \left\{ \ln \left(\frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} k_n q_n(l_0 + \varepsilon) C_n(z) \right. \\ \left. \times \int_{-h}^0 \phi_i(l_0, \xi) C_n(\xi) d\xi \right\} ds \quad \dots\dots\dots(16)$$

これは ϕ_i ($i=1\sim 4$) に関するフレドホルム型第2種の積分方程式である。ただし (a, b) は境界上の任意の点である。

(4) 積分方程式の離散化

式(16)を離散化し、境界要素法による定式化を行う。このため各境界を線分に分割し、各要素上のポテンシャル値 ϕ_i を、ポテンシャルの節点値と形状関数を用いて $\phi_i = [N]\{\phi_i\}$ と表す。ここで $[N]$ は形状関数、 $\{\phi_i\}$ は j 要素上での節点ポテンシャルである。ここで、図-2

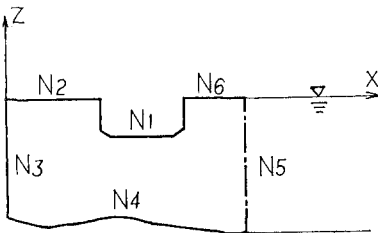


図-2 各境界面の要素分割数

に示すように各境界面をそれぞれ $N_1 \sim N_6$ に分割する。そして船体右端部の要素を出発点とし、各要素に反時計まわりに、 S_V 上に $1 \sim N_1$ 、船体より左側の S_F 上に $N_1+1 \sim N_{12}$ 、 S_W 上に $N_{12}+1 \sim N_{13}$ 、 S_B 上に $N_{13}+1 \sim N_{14}$ 、 S_I 上に $N_{14}+1 \sim N_{15}$ 、船体より右側の S_F 上に $N_{15}+1 \sim N^*$ の連番を付ける。ここで $N_{1n} = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ ($n=1, 2, \dots, 5$) で、 N^* は全要素数である。

式(16)における各境界上での積分を各要素上での積分を和に置き直すと次式を得る。

$$\alpha \phi_i(i) = - \sum_{j=1, N_{13}+1}^{N_1, N_{14}} \int_{S_j} \{ n_x(j) A_{xij} + n_z(j) A_{zij} \} [N] ds \{\phi_i\} \\ + \sum_{j=N_{12}+1, N_{13}+1}^{N_{12}, N^*} \int_{S_j} (\nu A_{ij} - A_{zij}) [N] ds \{\phi_i\} \\ - \sum_{j=N_{12}+1}^{N_{13}} \int_{S_j} \left(ik_0 \frac{1-K_r}{1+K_r} A_{ij} - A_{xij} \right) [N] ds \{\phi_i\} \\ - \sum_{j=N_{14}+1}^{N_{15}} \int_{S_j} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} k_n q_n(l_0 + \varepsilon) C_n(z) \right\} [N] \\ \times \sum_{m=N_{14}+1}^{N_{15}} \int_{S_m} A_{im} C_n(z) ds \{\phi_i\} \\ - \sum_{j=1}^{N_1} \int_{S_j} A_{ij} v_{nl}(j) ds \\ + \delta_{i4} \left\{ \sum_{j=N_{12}+1}^{N_{13}} \int_{S_j} ik_0 \frac{2K_r}{1+K_r} A_{ij} \phi_0 ds \right.$$

$$\left. + \sum_{j=N_{13}+1}^{N_{14}} \int_{S_j} A_{ij} v_{n4}(j) ds \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\phi_i(i)$ は節点 i におけるポテンシャル値で、係数 α は $i-1, i, i+1$ の3節点がなす角である。 $v_{nl}(j)$ 、 $n_x(j)$ 、 $n_z(j)$ などは、 j 番目要素におけるそれぞれの値を示す。また A_{ij} 、 A_{xij} 、 A_{zij} などは記法を簡単にするもので次式で定義される。

$$A_{ij} = \ln \frac{1}{r_{ij}}, \quad A_{xij} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{ij}} \right), \quad \left\{ \dots\dots\dots(18) \right. \\ A_{zij} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \frac{1}{r_{ij}} \right)$$

さらに簡単のため次のように置く。

$$H_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \bullet - \int_{S_j} \{ n_x(j) A_{xij} + n_z(j) A_{zij} \} [N] ds \\ \quad (j=1 \sim N_1, N_{13}+1 \sim N_{14}) \\ \bullet \int_{S_j} (\nu A_{ij} - A_{zij}) [N] ds \\ \quad (j=N_{12}+1 \sim N_{13}, N_{15}+1 \sim N^*) \\ \bullet - \int_{S_j} \left(ik_0 \frac{1-K_r}{1+K_r} - A_{xij} \right) [N] ds \\ \quad (j=N_{12}+1 \sim N_{13}) \\ \bullet - \int_{S_j} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} k_n q_n(l_0 + \varepsilon) C_n(z) \right\} [N] \\ \quad \times \sum_{m=N_{14}+1}^{N_{15}} \int_{S_m} A_{im} C_n(z) ds \Big\} ds \\ - \int_{S_j} A_{xij} [N] ds \quad (j=N_{14}+1 \sim N_{15}) \\ \dots\dots\dots(19) \end{array} \right.$$

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{S_j} A_{ij} v_{nl}(j) ds \\ + \delta_{i4} \left\{ \sum_{j=N_{12}+1}^{N_{13}} \int_{S_j} ik_0 \frac{2K_r}{1+K_r} A_{ij} \phi_0 ds \right. \\ \left. + \sum_{j=N_{13}+1}^{N_{14}} \int_{S_j} A_{ij} v_{n4}(j) ds \right\} \dots\dots\dots(20)$$

式(19)、(20)を用いて式(17)を書き直すと次式のようになる。

$$\alpha \phi_i(i) - \sum_{j=1}^{N^*} [H_{ij}] \{\phi_i\} = C_{ii} \quad (i=1 \sim N) \dots\dots\dots(21)$$

これは節点ポテンシャル値 $\phi_i(i)$ ($i=1 \sim N$; N : 全節点数) に関する複素係数連立一次方程式である。これを解けばすべての未知ポテンシャルの節点値が得られ、流体力等はこれに関連して容易に求められる。

3. 流体力の算定

波強制力は、入射波と反射散乱波による波圧の各方向成分を、船体没水面上で積分することによって得られ、次式のようなである。

$$E_i = -i\rho\omega \sum_{j=1}^{N_1} \int_{S_j} v_{nl}(j) [N] ds \{\phi_i\} + \{\phi_i\} \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 E_i ($i=1 \sim 3$) は波強制力の各方向成分で、それ

ぞれ x, z 軸に平行な力, および重心を通過して $x-z$ 平面に直交する軸まわりの回転モーメントを表している。また, ρ は流体密度である。

付加質量, 造波減衰係数は, ϕ_i ($i=1\sim 3$) の節点値を用いて次式によって求められる。

$$M_{lk} - i \frac{N_{lk}}{\omega} = \rho \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Delta S_j} v_{nk}[N] ds \{\phi_i\} \dots\dots (23)$$

ここに, M_{lk} は l 方向運動による k 方向付加質量 ($k=1, 2$) および付加慣性モーメント ($k=3$), N_{lk} は同様に l 方向運動による k 方向造波減衰係数を表し, これらはそれぞれ 3×3 のマトリクスを構成する。

4. 計算結果

(1) 妥当性の検討

本解析法において計算精度に関わる基本的要因は, 分割要素長 a^* と入射波長 λ の比 a^*/λ , および収束係数 ε と λ の比 ε/λ の2つであると考えられる。そこで水深 h を一定にして, 固定壁による波の反射の問題を考え, 波高の計算値 H と厳密解 $\bar{H}$ との比較を行った。図-3は, 固定壁の反射率 $K_r=1.0$, $h/\lambda=0.165$ として, 誤差 E_r を図中に示したように定義し, この分布を固定壁から仮想面までの距離 l_0 と λ の比 $l_0/\lambda=0.5, 0.75, 1.0$ の3通りについて求めたものである。ただし $a^*_{\max}$ は最大要素長, E_r の式中の n は計算点の数である。図-3から

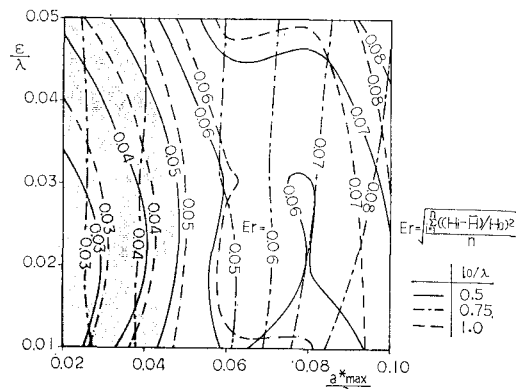


図-3 計算精度の特性

$a^*_{\max}/\lambda$ が大きい場合には, 仮想面の位置により誤差にばらつきが見られるものの, $a^*_{\max}/\lambda$ および ε/λ を 0.04 以下にとれば (斜線の部分), 仮想面の位置によらず誤差は 5% 以下となることがわかる。 $a^*_{\max}/\lambda$ をさらに小さくすることによって誤差はより小さくなるが, 実用上は $a^*_{\max}/\lambda=0.04$ 程度で十分である。ただし, 以後の計算例は $a^*_{\max}/\lambda$ および ε/λ を 0.02 とし, a^* は全要素でほぼ等しくなるように分割してある。

また, 理論で述べたように任意反射率を有する壁の境界条件の妥当性を確かめるために $K_r=0.4, 0.6, 1.0$ に

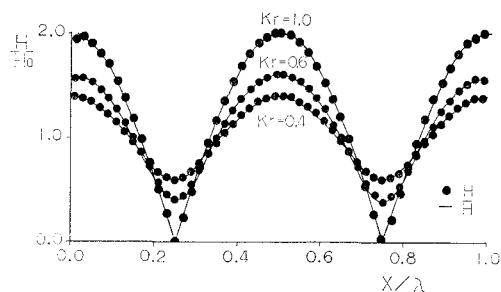


図-4 任意反射率壁境界条件の検証

ついて H と F の比較を行ったのが図-4である。これを見ると良く一致しているのがわかる。

(2) 固定壁と船体の距離の影響

図-5に示すような矩形断面の船体を例にとり, 固定壁と船体重心との距離 l_1 が, 波強制力, 付加質量, および造波減衰等におよぼす影響を調べた。なお以後の計算例は図に示した条件で行った。波強制力について 図-6

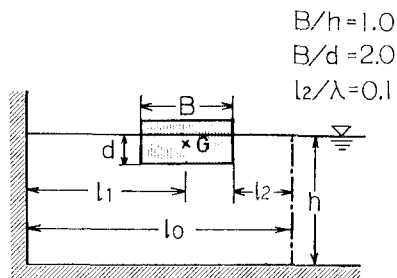


図-5 固定壁前面の矩形断面船体

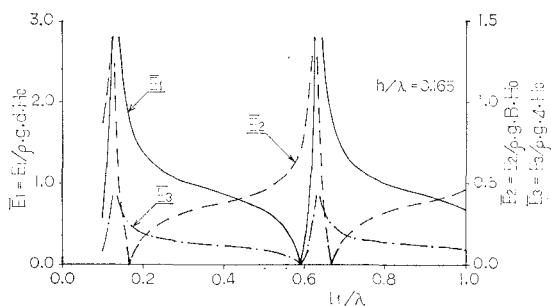


図-6 壁面と船体間の距離の影響 (波強制力)

に示す。縦軸は無次元化波強制力で, 計算条件は図中に示したとおりである。これから各成分とも最大値は $l_1/\lambda=0.13, 0.63$ の付近に現れ, 半波長の周期性を持っていることがわかる。また各成分とも波強制力が0となる波無し点が存在し, これも半波長の周期性を持っている。これは, 固定壁と船体の間に生じる重複波の影響によるものと考えられる。また図-7, 8に無次元化付加質量, 造波減衰について示す。付加質量および造波減衰にはこの他に連成成分があるが省略する。なお, これらの図で A は船体の排水体積である。

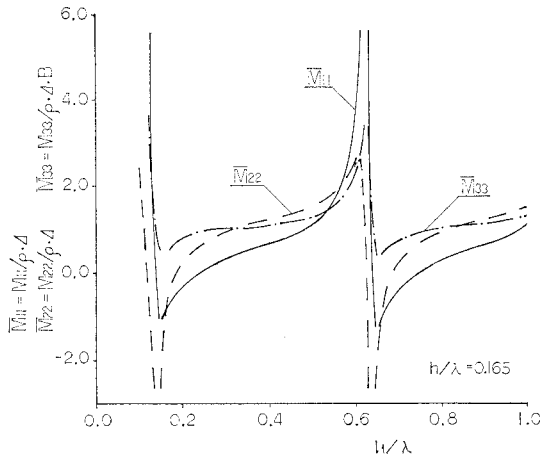


図-7 壁面と船体間の距離の影響 (付加質量)

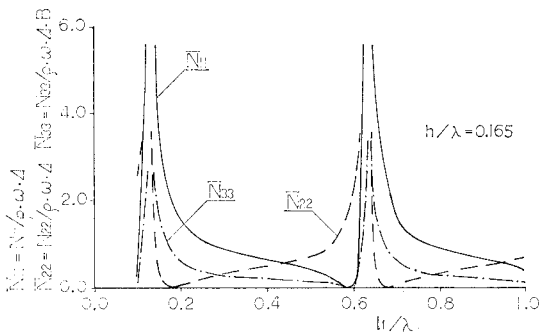


図-8 壁面と船体間の距離の影響 (波減衰係数)

(3) 反射率の影響

図-9~11は、それぞれ $l/\lambda=0.6$ のときの sway, heave, roll の付加質量特性を反射率をかえて計算した結果について示したものである。図中、縦軸は無次元化付加質量、横軸は無次元化振動数である。また $K_r=0.4, 0.7, 1.0$ としている。このうち注目すべきは heave の特性で、図-10に見られるように $(\omega^2/g) \cdot (B/2) < 0.2$ で負の付加質量が現れていることである。前田ら³⁾も円環状浮体の付加質量特性を調べ、負の付加質量が生じることを指摘している。そして、その原因を波と円環状浮体の相互干渉によるものと推論している。ここで示した解析例の場合、固定壁と船体の間に生じる重複波と船体右舷

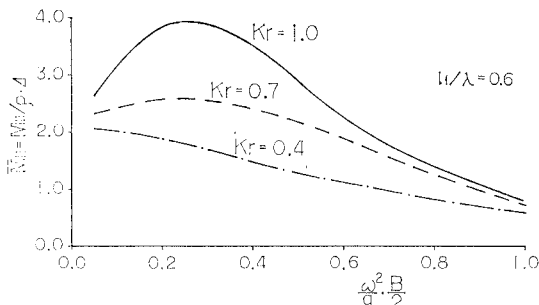


図-9 反射率による付加質量特性 (sway)

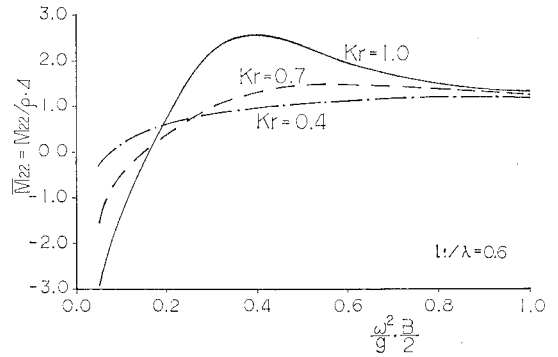


図-10 反射率による付加質量特性 (heave)

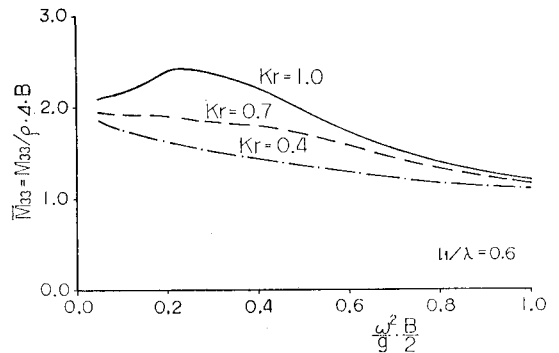


図-11 反射率による付加質量特性 (roll)

より放射される波および船体の相互干渉によるものと考えられ、反射率が小さくなるにつれてその影響が小さくなっていることがわかる。またここには示さなかったが、波強制力等も一がい反射率が小さいほど小さいとは言えず、船体動揺に対する反射率の影響は複雑である。

5. あとがき

以上、著者らは任意反射率壁前面の船体に働く流体力をグリーン公式を用いたハイブリッド型境界要素法により求める解析法を示した。そして、本理論の妥当性を検討し、固定壁の反射率や、固定壁と船体間の距離による流体力の特性を計算結果で示し、若干の考察を行った。その結果、固定壁前面での船体動揺の解析には固定壁の影響を考慮する必要があることがわかった。なお本論文の計算例は一定要素を用いて解析した結果である。

参考文献

- 1) 井島武士・吉田明徳・山本哲夫: 任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形, 土木学会論文報告集, No. 272, pp. 53~63, 1978.
- 2) 清川哲志・大山 巧・小林 浩: 波動方程式の直接差分による港内波高分布解析法, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 90~94, 1982.
- 3) 前田久明・江口純弘: 浅海域において浅吃水船に作用する流体力について (第2報)——Heavingの流体力——, 日本造船学会論文集, 第139号, pp. 44~50, 1976.