

薄肉物体まわりの波浪境界値問題に関する解析法

中 村 孝 幸*

1. まえがき

近年浮消波堤や波力発電装置に見られるように各種の形状を有する薄内部材が海岸・海洋構造物に利用されつつある。しかしながら、薄肉物体まわりの波変形や作用波力に関する解析法は、鉛直板のような単純な物体形状の場合を除くと従来ほとんど明らかにされてきていない。

本研究は、板厚の効果をも考慮でき、しかも一般部材と薄内部材より成る任意断面を有する複合物体について波浪变形等のポテンシャル境界値問題の解法が比較的簡単に扱えるわき出し分布法に基づく解析法について究明するものである。この際既に著者が¹⁾明らかにしているわき出し分布法に基づく解析法において、薄肉断面の物体に適用できない原因となっていた single source を基底とするグリーン関数並びにその法線微分値の特異点付近における合理的な算定法について明らかにする。そして本解析法の妥当性を検証するため、鉛直板を用いた波浪变形の水理実験を行い、測定結果および従来の算定結果と本解析法による算定結果との比較を行うものである。

2. 解析法

2.1 わき出し分布法による一般部材に対する解析法

既に著者は¹⁾は、二次元の任意断面物体を対象に波の変形や作用波力の算定が合理的に行えるわき出し分布法に基づく解析法について明らかにしてきた。本解析法もこのわき出し分布法にその基礎を置くものであり、その概要について記述しておく。

(1) 仮定および解析モデル

図-1 に示すような二次元波動場中に固定された任意断面物体まわりの波浪境界値問題を取り扱うもので、非粘性流体としての取扱いができる線形波動理論が適用できるものとしてある。そして入射波の速底ポテンシャル ϕ_I は、図-1 に示す入射波方向を仮定して式(2)で定義されたものを用いている。

$$\phi_I(x, z; t)$$

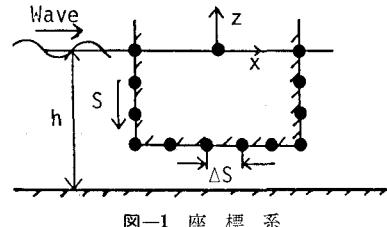


図-1 座標系

$$= Re \left[-\frac{igH_I}{2\omega} \frac{\cosh \{k(h+z)\}}{\cosh(kh)} e^{i(kx-\omega t)} \right] \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに Re は実数部をとることを表し、 $i = \sqrt{-1}$ である。また、 H_I : 入射波高、 ω : 入射波の角振動数 ($= 2\pi/T$)、 L : 波長、 h : 水深、 g : 重力加速度、 x, z : 座標(図-1 参照)である。

(2) 回折波ポテンシャル ϕ_D の算定式

わき出し分布法によるならば、 ϕ_D は 2 次元波動場のグリーン関数 G を用いて式(2)のように表示できる。

$$\begin{aligned} \phi_D &= Re[\phi_D e^{-i\omega t}] \\ &= Re \left[\int_S f(X, Z) G(x, Z; X, Z) \right. \\ &\quad \times dS(X, Z) e^{-i\omega t} \left. \right] \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ここに f はわき出し強さの分布関数で、後述する物体表面での境界条件を用いて決定される関数である。また S は物体の断面曲線を表し、 (x, z) は ϕ_D を求める座標点を、 (X, Z) は S 上の座標点を示す。

そして任意断面の物体に対処するため、断面曲線 S を任意の個数 J の線素分に分割し、わき出し強さ f が各線素分 dS_j の区間内では一定であると仮定すると、式(2)は式(3)のように変形される。

$$\begin{aligned} \phi_D(x, z) &= \sum_{j=1}^J f(X_j, Z_j) \int_{dS_j} G(x, z; X, Z) \\ &\quad \times dS(X, Z) \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

なお式(3)では、調和振動項 $e^{-i\omega t}$ を省略した表示を用いており、以下でも記述の煩雑さを避けるため同様の表示による展開を行うこととする。

そして式(3)の右辺に表れる G の dS_j にわたる積分の実際的な算定に当っては、既に著者¹⁾が報告している

* 正会員 工博 愛媛大学助教授 工学部海洋工学科

よう G に含まれる特異関数の特異点における特別な取扱いが必要となり、その算定式は式(4)のように与えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_j} G dS &= \int G_0 dS + \int_{n=1}^N G_n dS - \int_{n=1}^N G_{n\infty} dS \\ &\quad + \int_{n=1}^{\infty} G_{n\infty} dS \\ &= -\frac{iC_0 \Delta S_j}{k} \cosh \{k(h+z)\} \\ &\quad \times \cosh \{k(h+Z_j)\} \exp (ik|x-X_j|) \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \frac{C_n \Delta S_j}{k_n} \cos \{k_n(h+z)\} \\ &\quad \times \cos \{k_n(h+Z_j)\} \exp (-k_n|x-X_j|) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \frac{\Delta S_j}{n\pi} \cos \left\{ \frac{n\pi(h+z)}{h} \right\} \\ &\quad \times \cos \left\{ \frac{n\pi(h+Z_j)}{h} \right\} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{n\pi|x-X_j|}{h} \right) \\ &\quad + \int_{\Delta S_j} \xi_l dS \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

ここで G_0 は進行波型のポテンシャル成分を、 G_n は定常波型のそれを示す。そして $G_{n\infty}$ は、定常波型の波数 k_n が $n\pi/h$ で近似できるときの $G_{n\infty}$ の一般項を示し、 N は $k_n \approx n\pi/h$ となるときの n の値である。また C_0, C_n は沖波の波数 k_0 を用いて次式で定義されるものである。

$$C_0 = (k^2 - k_0^2) / ((k^2 - k_0^2)h + k_0)$$

$$C_n = (k_n^2 - k_0^2) / ((k_n^2 + k_0^2)h - k_0)$$

また ξ_1, ξ_2 は、 $G_{n\infty}$ の無限級数を示す。特異関数を含むことから、 ϕ_D を求める点 (x, z) が断面曲線上の点 (X, Z) との関連において特異条件となるか否かによりその積分算定式が異なり式(5), (6)のように表示される。

$$\int \xi_1 dS = \begin{cases} \frac{\Delta S_j}{4\pi} \log (1 - 2E \cos \Sigma + E^2) & r_1, r_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \frac{\Delta S_j}{2\pi} \left\{ \log \left(\frac{\pi \Delta S_j}{2h} \right) - 1 \right\} & \Delta r_1 = 0 \text{ or } r_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\int \xi_2 dS = \begin{cases} \frac{\Delta S_j}{4\pi} \log (1 - 2E \cos \Delta + E^2) & r_0 \neq 0 \text{ のとき} \\ \frac{\Delta S_j}{2\pi} \left\{ \log \left(\frac{\pi \Delta S_j}{2h} \right) - 1 \right\} & r_0 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここに

$$\Sigma = \pi(z+Z_j+2h)/h, \quad \Delta = \pi(z-Z_j)/h,$$

$$E = \exp [-\pi|x-X_j|],$$

$$r_0 = \sqrt{(x-X_j)^2 + (z-Z_j)^2},$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-X_j)^2 + (z+Z_j)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-X_j)^2 + (z+Z_j+2h)^2} \end{aligned}$$

である。

(3) わき出し分布関数 f の算定法

わき出し分布関数 f は、物体表面上の境界条件を表す式(7)を用いて決定できる。

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial n} + \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0 \quad (S \text{ 上で}) \dots \dots \dots (7)$$

式(3)の ϕ_D を式(7)に代入し、式(3)を導く際に用いたのと同様な仮定を採用すると、式(7)は式(8)のように変形される。

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial n} = - \sum_{j=1}^J f(X_j, Z_j) \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial n} dS(X, Z) \quad (S \text{ 上で}) \dots \dots \dots (8)$$

そして式(8)の右辺に表れる積分の算定式は、既に著者¹⁾が明らかにしているように $\partial G/\partial n$ に含まれる特異関数の処理を含めて式(9)のように簡略表示できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial G}{\partial n} dS &= \frac{\partial G_0}{\partial n} \Delta S_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial G_n}{\partial n} \Delta S_j \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial G_{n\infty}}{\partial n} \Delta S_j + \int_{\Delta S_j} \sum_{l=1}^6 \delta_l dS \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで δ_l ($l=1 \sim 6$) は、定常波成分の法線微分値の無限級数和で特異関数を含むことから、その積分算定式は式(5), (6)と類似した表示である式(10)~(15)で与えられる。

$$\int \delta_1 dS = \begin{cases} \frac{E(\pm z_{s_i} \cos \Sigma - x_{s_i} \sin \Sigma) - (\pm) z_{s_i} E^2}{2h(1 - 2E \cos \Sigma + E^2)} \Delta S_j & r_1, r_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ \operatorname{sgn}(X_{s_j})(X_{s_j}^2 - Z_{s_j}^2)/2 & r_1 = 0 \text{ のとき} \\ \operatorname{sgn}(X_{s_j})(Z_{s_j} - X_{s_j})/2 & r_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$\int \delta_2 dS = \begin{cases} \frac{E(\pm z_{s_i} \cos \Delta - x_{s_i} \sin \Delta) - (\pm) z_{s_i} E^2}{2h(1 - 2E \cos \Delta + E^2)} \Delta S_j & r_0 \neq 0 \text{ のとき} \\ 1/2 & r_0 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$\begin{aligned} \int \delta_3 dS &= \begin{cases} -\frac{k_0 \Delta S_j}{4\pi h} [z_{s_i}(x_i - X_j) + x_{s_i}(z_i + Z_j + 2h)] \\ \times \log (1 - 2E \cos \Sigma + E^2) & r_1, r_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ -k_0 x_{s_i} \Delta S_j \{\log(\pi \Delta S_j / 2h) - 1\} / \pi & r_1 = 0 \text{ のとき} \\ 0 & r_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\int \delta_4 dS = \begin{cases} -\frac{k_0 \Delta S_j}{4\pi h} [z_{s_i}(x_i - X_j) + x_{s_i}(z_i - Z_j)] \\ \times \log(1 - 2E \cos A + E^2) & r_0 \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & r_0 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\int \delta_5 dS = \begin{cases} \frac{k_0 \Delta S_j}{2\pi h} [(\pm)z_{s_i}(z_i + Z_j + 2h) - x_{s_i}|x_i - X_j|] \\ \times \tan^{-1} \frac{E \sin \Sigma}{1 - E \cos \Sigma} & r_1, r_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & r_1 = 0 \text{ or } r_2 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$\int \delta_6 dS = \begin{cases} \frac{k_0 \Delta S_j}{2\pi h} [(\pm)z_{s_i}(z_i - Z_j) - x_{s_i}|x_i - X_j|] \\ \times \tan^{-1} \frac{E \sin A}{1 - E \cos A} & r_0 \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & r_0 = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (15)$$

ここに

$$\operatorname{sgn}(Y) = \begin{cases} 1 & Y > 0 \text{ のとき} \\ -1 & Y < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義されるものであり、 $x_{s_i} = \Delta x_i / \Delta S_i$ 、 $z_{s_i} = \Delta z_i / \Delta S_i$ で Δx_i 、 Δz_i は線素分 ΔS_i の各々 x 、 y 成分である。

そして式(9)による算定結果を式(10)に代入し、式(8)が断面曲線上の $i=1 \sim J$ の線素分の中央点 (x_i, z_i) について成立することに注意すると式(7)は、 $(J \times J)$ のマトリックス方程式に導け、これを解くことによりわき出し分布関数 f が決定される、さらにこの f と式(4)による算定結果とを式(3)に代入することにより、回折波の速度ポテンシャル ϕ_D が求められることになる。そして最終的にこの ϕ_D と式(1)による ϕ_I とを用いて、物体まわりの波高分布、作用圧力の分布等が計算できることになる。

2.2 薄肉部材に対する修正

式(5)、(6)の ξ_i の積分表示及び式(10)～(15)の δ_i の積分表示は、各々 G 及び $\partial G / \partial n$ に含まれる特異関数を抜き出し、これら特異関数の ΔS_j にわたる積分を一般点については数値積分により求め、特異点については厳密積分により求めたものである。しかしながら、図-2 に示す薄肉部材のように 2 つの線素分の中央点が一致しないが、中央点間の距離 r_0 が線素分の長さ ΔS に対して小さくなる場合、上述の特異関数の値は r_0 の微小変化により大きく変動し、結果的に数値積分に基づく ξ_i 、 δ_i の算定値 (ξ_i 、 δ_i の表示式の上段側によるもの)

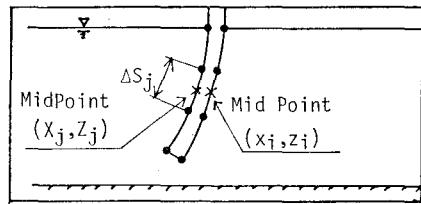


図-2 薄肉部材

は大きな誤差を含み、 ϕ_D の正確な算定が困難になるものと考えられる。そしてこの算定誤差を小さくする方法として、断面曲線を肉厚ごとに比して十分小さな線素分に分割することが考えられるが、線素分の総個数が非常に多くなること及び解くべきマトリックス方程式の階数が大きくなることから実際的な解決法とは言い難い。そして本研究では、一般部材と同程度の ΔS が採用できるようにするため、特異点における ξ_i 、 δ_i の積分算定法に準ずる手法を用いて、 r_0 が ΔS に比して小さな場合のこれらの関数の算定法について究明する。

(1) 特異関数およびその誤差

式(5)、(6)及び式(10)～(15)の上段側の表示式から ΔS を除き、 $(X_j, Z_j) \rightarrow (X, Z)$ とした被積分関数の各特異点近傍における漸近式を求めてみる。今、 $\varepsilon_x = x_i - X$ 、 $\varepsilon_{z_0} = z_i - Z$ 、 $\varepsilon_{z_1} = z_i + Z$ 、 $\varepsilon_{z_2} = z_i + Z + 2h$ とし、これらが微小量となるときの ξ_i 及び δ_i に対応する漸近式を ξ_i^* 、 δ_i^* で表示するとこれらは式(16)～(20)のように書き表せる。

$$\xi_i^* = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_1}^2) \right\} & r_1 \rightarrow 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_2}^2) \right\} & r_2 \rightarrow 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$\xi_i^* = \frac{1}{4\pi} \log \left\{ \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_0}^2) \right\} \quad r_0 \rightarrow 0 \text{ のとき} \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\delta_i^* = \begin{cases} (\varepsilon_x z_{s_i} - \varepsilon_{z_1} x_{s_i}) / [2\pi(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_1}^2)] & r_1 \rightarrow 0 \text{ のとき} \\ (\varepsilon_x z_{s_i} - \varepsilon_{z_2} x_{s_i}) / [2\pi(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_2}^2)] & r_2 \rightarrow 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (18)$$

$$\delta_i^* = (\varepsilon_x z_{s_i} - \varepsilon_{z_0} x_{s_i}) / [2\pi(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_0}^2)] \quad r_0 \rightarrow 0 \text{ のとき} \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$\delta_i^* = \begin{cases} -\frac{k_0 x_{s_i}}{2\pi} \log \left\{ \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{z_1}^2) \right\} & r_1 \rightarrow 0 \text{ のとき} \\ 0 & r_2 \rightarrow 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad \dots \dots \dots (20)$$

なお、 δ_4^* 、 δ_5^* 、 δ_6^* については各特異点近傍で 0 に収束するため表示を省略してある。そして上記の ξ_i^* 、 δ_i^* は、対数型あるいは逆数型の特異関数のいづれかになつ

ており、特異点近傍で数値積分を適用すると大きな誤差の生じることが予測される。このことを検討するため、薄内部材の場合によく出現する特異関数 ξ_i^* 及び δ_i^* に着目し、特異点近傍におけるこれらの関数の線素分 ΔS_j にわたる数値積分による結果と厳密積分によるそれとの比較を行ってみた。なお、 ξ_i^* 及び δ_i^* の厳密積分に基づく算定式は一般の積分公式を用いて求められるが、軸対称物体の回折波問題を取り扱った Fenton³⁾ の論文に詳述されており、それを参照されたい。

図-3は、図中に示す薄内部材の前後面の2点を対象

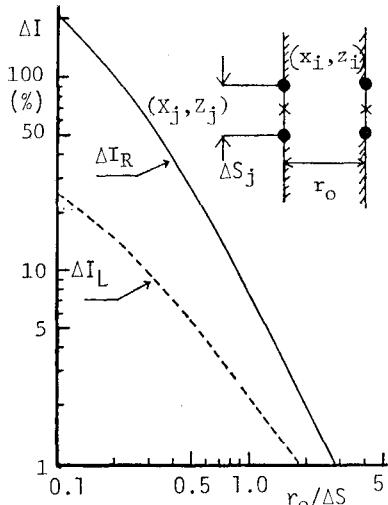


図-3 特異関数の積分における誤差

に2点間距離 r_0 と ΔS_j との比を変化させたときの ξ_i^* , δ_i^* の数値積分に基づく算定結果に含まれる相対誤差 ΔI_L , ΔI_R の変化を示すもので、比較のための基礎算定値としては厳密積分による算定結果を用いている。そしてこの図より、 ξ_i^* , δ_i^* の数値積分結果に含まれる誤差は、 $r_0/\Delta S$ の減少とともに増大し、同じ $r_0/\Delta S$ の値については ΔI_R の方が ΔI_L より大きくなることなどがわかる。また r_0 が 2~3ΔS より小さな領域では ξ_i^* , δ_i^* の積分の算定は、厳密積分によらなければならないことも理解できよう。上述の結果は、浅吃水物体や水底上に横たわる薄肉物体を扱う場合に重要となる特異関数 ξ_i^* , δ_i^* , δ_i^* の取扱いについても同様に適用できるが、その詳細については割愛したい。

(2) 薄内部材に対する特異関数の取り扱い

上述したように薄内部材では ΔS を肉厚 ζ より小さくすることは困難であり、 ζ より大きな ΔS を採用する場合には上記(1)で述べたように r_0 , r_1 , r_2 が 0 より大きく 2~3ΔS 以下の中间領域に対する表示式を式(5), (6)及び式(10)~(15)に付加する必要がある。そしてこの中间領域における表示式は、 ξ_i^* , δ_i^* の各々 ξ_i , δ_i に対する近似誤差及び上記(1)の結果を考慮して一般的

に式(21)のように書き表せよう。

$$\int_{\Delta S_j} (\xi_i \text{ or } \delta_i) dS = [(\xi_i \text{ or } \delta_i) - (\xi_i^* \text{ or } \delta_i^*)] \times \Delta S_j + I(\xi_i^* \text{ or } \delta_i^*) \quad \dots \dots (21)$$

ここに $I(\xi_i^* \text{ or } \delta_i^*)$ は ξ_i^* , δ_i^* の線素分 ΔS にわたる厳密積分に基づく算定値である。

3. 算定結果

本研究では、式(21)の適用領域として 2.2(1)の結果に基づき r_0 , r_1 , r_2 が 0 より大きく 3ΔS 以下を探用し、 ΔS として著者¹⁾が一般部材について見い出した規準、 $\Delta S < 0.03L$ (L : 波長) を満足するようにして以下の計算を行った。

図-4は、水面に固定された一枚鉛直板による反射率

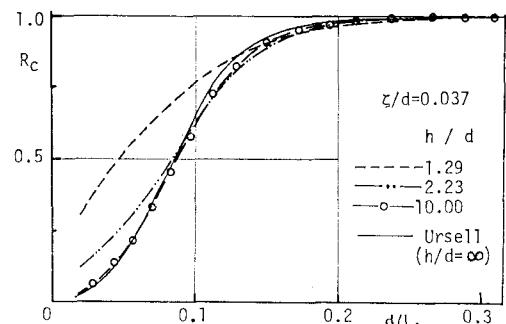


図-4 反射率に及ぼす水深の効果

R_c の d/L_0 による変化の算定例について、水深と吃水との比 h/d をパラメーターにとって示すものである。この際、板厚と吃水との比 ζ/d は 0.037 と一定しており、同一の d/L_0 に対する h/d による R_c の変化は、水深の効果によるものと言える。また同図には、比較のため $\zeta/d=0$ で深海条件の場合の Ursell³⁾ による結果も付記してある。そして本解析法による $h/d=10$ の R_c の算定結果と Ursell³⁾ のそれとは、 d/L_0 の小さな短周期波側で多少の相異が認められるが全体的にほぼ一致していると言えよう。また ζ/d を固定した場合の R_c に及ぼす h/d の効果としては、 d/L_0 の小さな領域で R_c を増大させることがわかる。次に図-5は、一枚鉛直板につい

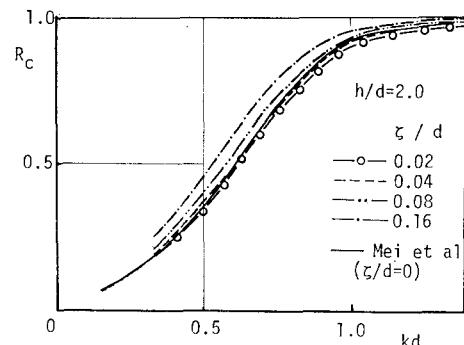


図-5 反射率に及ぼす板厚の効果

て、 $h/d=2$ と固定した場合の板厚 ζ による R_c-kh の関係の変化を示すものである。図中には、 $\zeta/d=0$ のVariational methodによるMeiら⁴⁾の算定結果も付記してある。そして本解析法による $\zeta/d=0.02, 0.04$ の場合の R_c の算定結果は、Meiら⁴⁾の $\zeta/d=0$ の結果とほぼ一致していることがわかる。また板厚の増大は、 R_c を増大させる効果を有することなども認められる。以上のように本解析法による算定結果は、従来の板厚を0とした理想状態における算定結果とほぼ一致しており、本解析法を用いて薄肉部材まわりの波浪境界値問題の解析が可能と言えよう。また、図-6は本研究で行った一枚鉛

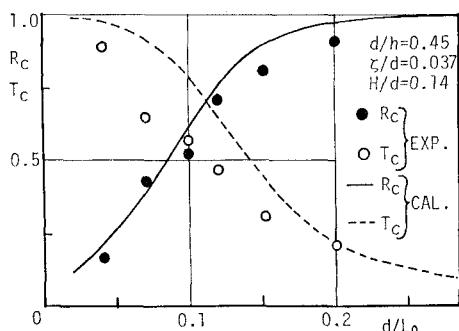


図-6 反射率、透過率の測定結果と計算結果との比較

直板による反射率 R_c 、透過率 T_c の実験結果と上記解析法による算定結果との比較を示すものである。なお実験に用いた波条件は、水深 $h=78\text{ cm}$ で、 $H_t=5\text{ cm}$ 、 $T=0.95\sim2.6\text{ sec}$ である。また鉛直板には板厚 1.3 cm の防水ペニヤを用い、吃水 $d=35\text{ cm}$ としてある。この図より R_c の算定結果は d/L_0 にかかわらず実験結果とほぼ一致していることが認められる。しかしながら T_c の算定結果は d/L_0 の小さな領域で実験結果を上まわるようになり、両者の一致度は十分なものとは言えない。 T_c に関するこの相違は、本解析では考慮されていない板背

後に形成される渦の影響によるものと考えられるが、これについては今後につづく検討課題としたい。

4. 結 語

以上本研究では、わき出し分布法に基づく薄肉部材まわりの波浪境界値問題の解析法について明らかにすると共にその妥当性を従来の算定結果および実験結果との比較の上で検討してきた。これらをとりまとめると以下のように結論される。

i) わき出し分布法に基づく薄肉部材による波浪境界値問題を解析するには、グリーン関数 G 及びその法線微分値 $\partial G/\partial n$ に含まれる特異関数の特異点付近(特異点より線素分 $4S$ の2~3倍の領域)における特別な取扱いが必要となる。

ii) 本解析法により板厚の効果を考慮して任意な薄肉部材を有する複合断面物体まわりの波浪境界値問題の解析が行える。しかしながら鉛直板のように渦形成の顕著な部材による透過波の予測については、渦現象に基づく波浪の減衰効果を考慮する必要がある。

なお本研究は文部省科学研究費(自然災害特別研究:代表者 岩田好一郎)による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 中村孝幸・高橋和男・中山和典: わき出し分布法を用いた2次元物体まわりの波変形と流体力の解析法, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 462~466, 1982.
- 2) Fenton, J. D.: Wave forces on vertical bodies of revolution, J. of Fluid Mech., Vol. 85, pp. 241~255, 1978.
- 3) Ursell, F.: The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 43, pp. 347~382, 1947.
- 4) Mei, C. C. and Black, J. L.: Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth, J. of Fluid Mech., Vol. 38, pp. 499~511, 1969.