

細い多柱構造からの波の反射と透過現象の境界値問題解析

角野昇八*・小田一紀**・伊庭智生***

1. 緒 言

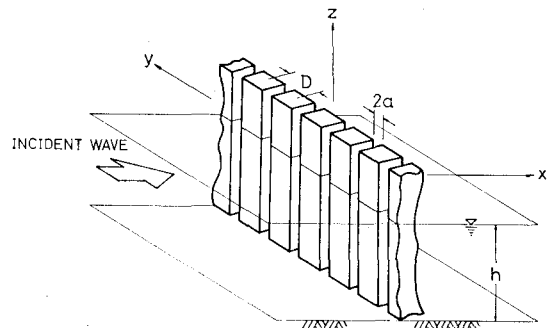
円柱列や角柱列などの透過性鉛直柱体列は、防波堤堤体としてや直立消波構造の一部など海岸構造物として広く用いられており、従って関連の研究も国内外を問わず従来より数多くなされている。なかでも林・服部¹⁾は透過性鋼管防波堤に関連した一連の研究を行なった。また、服部²⁾や横木・岩田³⁾、堀口他⁴⁾は同じ透過性構造である多孔壁周辺の波動現象を解析した。これらの研究における基本的な考え方は、いずれの場合にも構造物の沖側領域と岸側領域とにそれぞれ適当な速度ポテンシャルを仮定し、それらを構造物の地点に適用した流量保存則やエネルギー保存則（ベルヌーイの定理）あるいは運動量保存則を介して接合して解析しようとするもので、そこには実験的にしか求められない係数や、決定の方法に不明確さがある係数が含まれているなどの難点があったように思われる。また、構造物を流出入する際の流れそのものに対する速度ポテンシャルを考えていない、あるいは流れの構造物表面における境界条件に注意が払われていないなどの点で、それらの解は完全な境界値問題解析の解とは言いがたく、それゆえ構造物周辺の波動現象のポテンシャル流としての挙動も明らかではなかった。

本研究は、これらの研究例とは異なり、柱体列を流出入する流れそのものの速度ポテンシャルをも考慮して周辺の波動現象を境界値問題としてとらえ、上記現象を基本的に支配していると思われるポテンシャル流としての挙動を実験係数や不確定な係数に依ることなく明らかにしようとするものである。解析の手法としては Matched Asymptotic Expansions (MAE) 法⁵⁾を適用する。MAE 法の概念を本研究対象に則して考えれば⁶⁾、スリットからの流れを遠方から眺めた場合の挙動を表す外的解 (outer solution) およびそれを近傍で眺めた場合の挙動を表す内的解 (inner solution) をそれぞれ独立に求め、前者の inner limit と後者の outer limit とを接合 (matching) させてすべての領域で一意的に成立する解

を求めようとする手法である。前者はまた、スリットからの流れを遠視の人が見た時の、後者は近視の人が見た画像とも解される。従って外的解には流れの細かい特性量は含まれず、ただ波動特性を表わす量が見られるにすぎない。また内的解には、流れの細かい特性量は含まれるかわりにスリットから離れた点の波動現象を表わす量は含まれない。このことは数学的には、外的解自身は物体表面における境界条件を詳細には満足する必要がなく、これに対して内的解自身は無限遠点での条件を満足する必要があることになるので、全境界条件を同時に満足するような解を見出す労力が軽減されることになる。

2. 問題の定式化

図一1 に示すように、 y 軸上に設置された矩形あるいは円形、平板の断面形 (断面寸法は波長に比べて小さい)



図一1 波浪中の多柱構造

をもつ柱体列に微小振幅波が列に直角に入射する場合を考える。そのスリット幅は $2a$ 、隣りあう柱体間隔は D で水深 (一定) は h とする。このとき速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z, t)$ は以下のラプラスの方程式を満足する。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \cdots \cdots \cdots \text{流体領域全体} \cdots \cdots (1)$$

また同時に、以下の境界条件をも満足しなければならない。

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \cdots \cdots \cdots \text{水面にて} \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \cdots \cdots \cdots \text{水底にて} \cdots \cdots (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \cdots \cdots \cdots \text{柱体断面表面にて} \cdots \cdots (4)$$

* 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部 土木工学科

** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部 土木工学科

*** 学生会員 大阪市立大学大学院 工学研究科

ここに g は重力加速度を, また n は柱体断面表面への外向き法線を示す。しばしば行なわれるようにここで速度ポテンシャルを以下のように変数分離形で表わして式 (3) の境界条件を満足させるようにする。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \phi(x, y, z) e^{-i\sigma t} \\ \text{ただし} \\ \phi(x, y, z) &= F(x, y) \cosh k(h+z) / \cosh kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに σ は角振動数 ($=2\pi/T$, T は周期) で, k は波数 ($=2\pi/L$, L は波長) であり, $i=\sqrt{-1}$ である。式 (5) を式 (1) に代入すれば次式のヘルムホルツの方程式を得る。

$$\partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + k^2 F = 0 \dots\dots\dots (1')$$

また式 (4) の境界条件は

$$\partial F / \partial n = 0 \dots\dots\dots (4')$$

のようになる。同時に式 (2) と式 (5) からは

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \dots\dots\dots (6)$$

の関係式も導かれる。このようにして問題は, 式 (4)' の境界条件および式 (6) の下に式 (1)' を満足する解 $F(x, y)$ を求めることに帰着されることになる。

さて, ここで柱体列の沖側と岸側との遠方に注目するとき, そこには入射波と反射波 (沖側) あるいは透過波 (岸側) のみが平面波として存在していることをわれわれは経験的に知っている。すなわち, この概念を数式として表わせば,

$$F(x, y) \rightarrow A_I e^{ikx} + \rho A_I e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (7)$$

$$F(x, y) \rightarrow \tau A_I e^{ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \dots\dots\dots (8)$$

ここに A_I は入射波の振幅に相当する任意の複素定数であり, ρ と τ とは複素形で反射率と透過率とを表わす。

3. MAE 法の適用

3.1 外的問題

スリットから遠く離れた観察者には, スリットを通る流れの詳細は見えず, スリット幅が狭いときにはそれは単にわき出しからの, あるいはすい込みへの流れのように見えるに違いない (図-2 参照)。いま, 速度ポテンシャルの時間項を式 (5) におけるように $e^{-i\sigma t}$ とおくときには, $x-y$ 座標の原点におかれた強さが $m=1$ のわき

出しからの流れは, 0 次の第1種ハンケル関数を用いて次式のように表わされる。

$$f(x, y) = -i/4 \cdot H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2}) \dots\dots\dots (9)$$

図-2 に示されるように, y 軸上にスリットが等間隔 D で無限にあるときには, 上式の無限和を考えることにより

$$F(x, y) = -i/4 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[k\sqrt{x^2+(y-nD)^2}] \dots\dots\dots (10)$$

従って以上の考察より外的解を以下のように表わす。

$$F(x, y) = i/4 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[k\sqrt{x^2+(y-nD)^2}] + A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (x < 0) \dots\dots (11)$$

$$F(x, y) = -i/4 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[k\sqrt{x^2+(y-nD)^2}] \quad (x > 0) \dots\dots\dots (12)$$

ここに A と B とは未知の複素定数であり, 式 (11) の右辺第1項はスリットから $x < 0$ の側に発生する波に相当するすい込みへの流れを, 第2項は入射波, 第3項はスリット以外の柱体部からの反射波をそれぞれ表わしている。また同様に式 (12) の右辺はスリットから $x > 0$ の側に発生する波に相当するわき出しからの流れを表わす。ここで注意しておきたいのは, 外的解に含まれるハンケル関数は y 軸に関して対称形であるので, 柱体部分を横切る流れは存在しないという条件を満足していることである。同様の条件が式 (11) の右辺第2項と第3項との和によっても満足されなければならないので以下の関係を得る。

$$A = B \dots\dots\dots (13)$$

(1) 外的解の outer limit

式 (7) や (8) 中の ρ と τ の形を決定するためには外的解の outer limit を知る必要がある。いま式 (10) の $y=0$ で $k|x| \rightarrow \infty$ における極限値は

$$F(x, 0) \rightarrow -i/2kD \cdot e^{ik|x|} \dots\dots\dots (14)$$

と表わすことができるので^{7), 8)}, 外的解の $y=0$ における outer limit は次式のようになる。

$$F(x, 0) \rightarrow i/2kD \cdot e^{-ikx} + A(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad (x \rightarrow -\infty) \dots\dots\dots (15)$$

$$F(x, 0) \rightarrow -i/2kD \cdot e^{ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \dots\dots (16)$$

式 (7) と (15), そして式 (8) と (16) とを等置することにより, 反射率, 透過率および A を表わす関係式として

$$\rho = i/(2kDA_I) + 1, \quad \tau = -i/(2kDA_I) \dots\dots (17)$$

$$A = A_I \dots\dots\dots (18)$$

を得る。

(2) 外的解の inner limit

式 (11) および (12) の外的解を後述の内的解と接合するためには, その inner limit を知らねばならない。

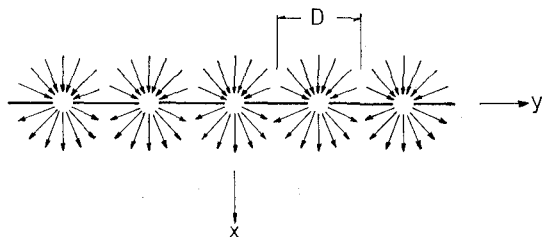


図-2 外的解

ここで、 $D/L \leq 0.1$ の条件（通常の海岸構造物においては容易に達成される）の下では、式 (10) から (14) への極限操作は $k|x|$ の比較的小さい値に対しても成立することを考慮すれば、外解の inner limit として式 (15) と (16) より次式を得る。

$$F(x, 0) \rightarrow i(1 - ikx)/2kD + 2A \quad (x \rightarrow 0_-) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$F(x, 0) \rightarrow -i(1 + ikx)/2kD \quad (x \rightarrow 0_+) \quad \dots\dots\dots (20)$$

3.2 内的問題

視点をスリットに限りなく近づけてゆくとき、遂には柱体列を過ぎる速度 U の等速流を見るに違いない。即ち、図-3 に示すような内的解の outer limit の挙動を

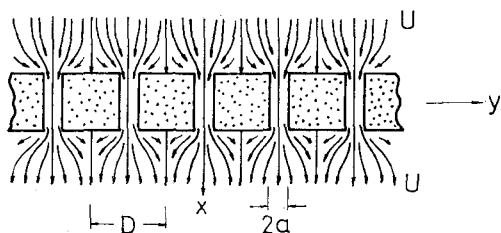


図-3 内的解

目にするであろう。このような流れの速度ポテンシャルは次式に示される⁹⁾。

$$F(x, y) = (x - C)U + C_0 \quad (x < 0) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$F(x, y) = (x + C)U + C_0 \quad (x > 0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに C_0 は複素定数で、 C は“blockage coefficient (閉塞係数)”^{9), 10)} と呼ばれる理論定数である。これら両式は厳密には式 (1)' のヘルムホルツの方程式を満足しないが、構造物の断面寸法は波長に比して小さいという今の条件の下では近似的に満足する。式中の定数 C (長さの次元をもつ) は柱体列による非定常流の障害の程度を表すもので、柱体列の付加質量とも密接な関係を有し¹¹⁾、障害物が全く無い時には $C=0$ 、逆に柱体列が完全に閉塞されるときには $C=\infty$ の値をとる。柱体列の断面形状が与えられればこの C を一意的に決定することができるので、式 (4)' の柱体表面における境界条件はこの C を含む内的解によって結果的に満足されていることに注意したい。角柱列や疑似円柱列、平板列の簡単な断面形状の C に対しては既往の解が得られる。

(1) 平板列

厚さのない平板の列に対して、Sedov¹²⁾ は翼列の問題に関連して次式のように C を求めた。

$$C = -D/\pi \cdot \log \sin(\pi/2 \cdot 2a/D) \quad \dots\dots\dots (23)$$

(2) 角柱列

Taylor¹³⁾ によれば、角柱列に対する C は

$$C = \frac{b}{2} \left(\frac{D}{2a} - 1 \right) + \frac{D}{\pi} \left[1 - \log 4 \frac{2a}{D} \right]$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{2a}{D} \right)^2 + \frac{281}{180} \left(\frac{2a}{D} \right)^4 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、ここに b は列方向に直角な方向の矩形断面の辺長を表わす。また上式は $2a/D \ll 1$ の条件の下に成立する。

(3) 疑似円柱列

スリット幅が狭くなるにつれて列方向の半径が小さくなって楕円断面柱体列となり、逆に拡がるにつれて円形断面柱体列に近くなるような柱体列に対して Lamb¹⁴⁾ は以下の式で求められる C を与えた。

$$C = 1/2 \cdot (D - 2a) \tan \pi(D - 2a)/2D \\ = D/2 \cdot (1 - 2a/D) \cot(\pi/2 \cdot 2a/D) \quad \dots\dots\dots (25)$$

3.3 Matching

式 (19) と (20) とは外解の inner limit としての、また式 (21) と (22) とは内的解の outer limit としての挙動を表わしている。matching はこれらの両式を各項ごとに等置することによってなされ、その結果未知の複素定数 A , C_0 と実定数 (流速) U とが以下のように決定される。

$$A = A_I = C_0 = -C/2D - i/2kD \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$U = 1/2D \quad \dots\dots\dots (27)$$

3.4 反射率, 透過率, スリット通過水粒子速度

(1) 反射率と透過率

式 (17) と (26) より、反射率と透過率の複素形は直ちに、

$$\rho = 1 - i/(kC + i), \quad \tau = i/(kC + i) \quad \dots\dots\dots (28)$$

と表わされる。両式からは、波長に比べて幅の狭い単一透過堤の有する特徴¹⁵⁾である $\rho + \tau = 1$ の関係が得られる。反射率および透過率は、上式の絶対値を考慮すれば、 k と C のみの関数として極めて簡単な形で、

$$r_R = |\rho| = \sqrt{\frac{k^2 C^2}{k^2 C^2 + 1}}, \quad r_T = |\tau| = \sqrt{\frac{1}{k^2 C^2 + 1}} \quad \dots\dots\dots (29)$$

のように得られる。両式からはよく知られた

$$r_R^2 + r_T^2 = 1$$

の関係が容易に導かれ、エネルギーの保存が保証されていることを知る。式 (29) の反射率と透過率は2つの無次元量 $2a/D$ および D/L の関数として表わされている (角柱列の場合、さらに b/L の関数でもある) が、この D/L は従来の解析には含まれていなかった量であることが注目される。

(2) スリット通過水粒子速度

既述のように、外解においては強さが $m=1$ のわき出し (あるいはすい込み) をスリットの位置に配置している。一方よく知られているように、このわき出しの強さはわき出しからの流量を意味しているので、スリット通過の際の時間的流量 (深さ方向の単位長さ当り)

も1である。ただ注意したいのは、この流量はスリットの両側へ流れる量であるので、片側にはその半分の $1/2$ となる。それゆえスリット通過の流速の時間的的最大値 $V_{\max}$ は、それを通過断面面積 ($2a \times 1$) で除して

$$V_{\max} = 1/4a \quad \dots\dots\dots (30)$$

しかしこの形のままでは具体的な計算には不便であるので、これを入射波の水平水粒子速度の時間的的最大値 $u_{\max}$ との比で表わすことにする。式 (7) の入射波の速度ポテンシャルおよび式 (26) の関係を考慮すれば、入射波の水平水粒子速度は、

$$\begin{aligned} u &= R(\partial F / \partial x) \\ &= \sqrt{1 + k^2 C^2} / 2D \cdot \sin \{ kx + \tan^{-1}(1/kC) \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし、ここに R は実部をとることを意味する。結局 $V_{\max}/u_{\max}$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} V_{\max}/u_{\max} &= D/(2a\sqrt{1+k^2 C^2}) \\ &= \gamma_T/(2a/D) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

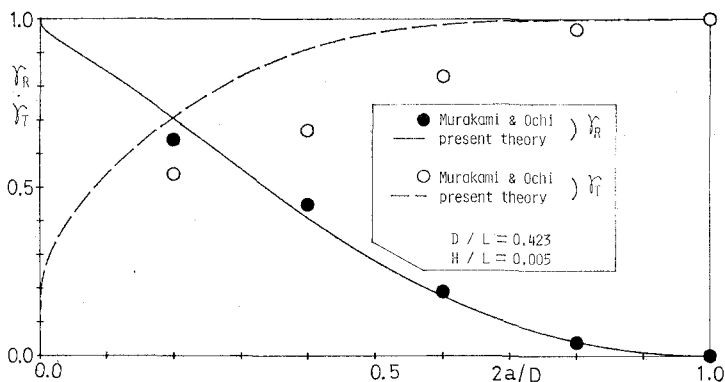
4. 実験の方法

理論計算の結果を検証するために、柱体列からの反射率と透過率、スリット通過水粒子速度を測定するための実験を実施した。実験には長さ 50m、幅 1.0m、高さ 1.75m の造波水槽を用い、そのほぼ中央部に正方形あるいは円形断面の柱体列を設置した。その一辺長あるいは直径は $D/L \leq 0.04$ の条件に対しては 5.0cm (正方形) あるいは 5.1cm (円形) で、 $D/L \geq 0.05$ の条件に対しては 15.0cm (正方形) あるいは 15.3cm (円形) である。水深は全実験を通じて一定で、 $h=50$ cm とした。

波高は容量式波高計で測定し、透過波高測定地点 (柱体列の位置よりほぼ 2m 岸寄り) の通過波高 (柱体列を設置しない状態で測定した波高) を入射波高とした。入射波の波形勾配は全ケースを通じて $H/L \approx 0.01$ (一定) である。反射率はいわゆる Healy の方法によって算定した。水粒子速度の測定には超小型流速計 (プロベラ径 3mm) を使用し、その受感部を常に水面下 15cm の深さに設置して測定した。

5. 理論の検証

5.1 反射率と透過率



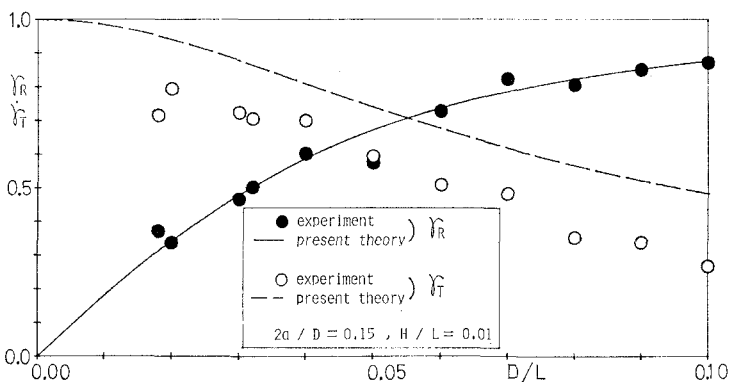
図—4 反射率と透過率 (平板列, $D/L=0.423$)

(1) 平板列

村上・越智¹⁶⁾は、中央にただ1つのスリットを設けた平板を造波水槽中にスリットが鉛直になるように設置し、その波の反射率と透過率を実験的に求めた。水槽幅を D とし、水槽の側壁を反射鏡面と考えれば、この問題は本研究における平板列の問題と等価になる。図—4は、その実験結果を同じ D/L の条件にある理論値とともに $2a/D$ の関数として示したものである。このときの $D/L=0.423$ で、既述の理論展開過程において仮定した $D/L \leq 0.1$ の条件よりも大きい値をとるにもかかわらず、理論と実験の反射率の値はきわめて良く一致している。

(2) 角柱列

図—5は、正方形断面 [$(D-2a)/b=1$] の柱体列の γ_R



図—5 反射率と透過率 (角柱列, $2a/D=0.15$)

と γ_T の理論曲線を $2a/D$ の同じ条件にある実験値とともに D/L の関数として示した一例である。

平板列の場合と同様に、この場合にも反射率の理論値と実験値との対応がきわめて良いことが注目される。ここでは紙面の都合から $2a/D=0.15$ の場合のみしか示していないが、同様のことはこれ以外の場合にも言える¹⁷⁾。これらの結果は本理論の妥当性を示しているとともに、柱体列からの波の反射のメカニズムには開口部における

エネルギー損失は何ら関与するものでないことを示すものであり、従来より一般に認識されてきた両者の関連を指摘する結論とは異なった結果を示していきわめて興味深いと思われる。なお、平板列および角柱列のいずれの場合にも透過率の理論値は実験値よりも大きな値をとるが、当然のことながらこれは開口部におけるエネルギー損失によるものである。

(3) 円柱列

図-6 は、円柱列の γ_R と γ_T の理論曲線を同条件下にある実験値とともに示した一例である。平板列や角柱列の場合に比べて γ_R に関する両者の対応はやや悪くなっているものの、傾向的にはほぼ一致しているのが認められる。このような理論値と実験値との間の不整は、スリ

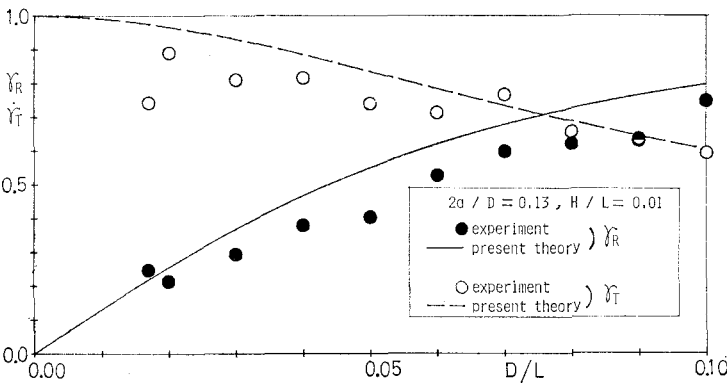


図-6 反射率と透過率 (円柱列, $2a/D=0.13$)

ット幅が狭くなるにつれて、すなわち $2a/D$ の値の減少に伴って著しくなる¹⁷⁾。その理由は、既述のように理論における円形断面がスリット間隔の減少とともに歪んで楕円形状になってゆくためである。 $2a/D$ の値の変化に伴う円形断面の歪みの変化の程度は別の論文¹¹⁾に示した。

なお、各断面柱体列の反射率を比較するとき、正方形断面のそれが最も大きく、次いで円形、平板の順となる¹⁷⁾。

5.2 スリット通過水粒子速度

図-7 に正方形断面角柱列の場合のスリット通過水粒子速度の理論値と実験値との比較の結果の一例を示す。この図によれば、反射率の場合と同様にスリット通過水

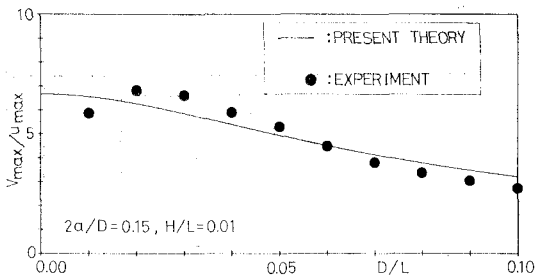


図-7 スリット通過水粒子速度 (角柱列, $2a/D=0.15$)

粒子速度についても両者の対応は極めてよく、本理論の妥当性が示されている。なお、図中の実験による $V_{\max}/u_{\max}$ の $u_{\max}$ の値は、値が小さくて流速計の精度上の問題がある場合があったため、すべて微小振幅波理論による値を用いた。

謝 辞

本研究に関する費用の一部は実吉奨学会研究助成金によった。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 例えば 林 泰造・服部昌太郎: 透過性鋼管防波堤とその基部洗掘, 第15回海講講演集, pp. 292~296, 1968.
- 2) 服部昌太郎: 多孔壁式防波堤の水理特性, 第18回海演講演文集, pp. 115~120, 1971.
- 3) 榎木 亨・岩田好一朗: 多孔壁式鉛直消波岸壁の水理特性に関する二、三の考察, 土木学会論文報告集, 220号, pp. 53~63, 1973.
- 4) 堀口孝男・小坂俊吉・布施敏一郎: 多孔壁消波構造の水理, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 347~351, 1978.
- 5) Van Dyke, M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York, 229 p., 1964.
- 6) Tuck, E. O.: Transmission of water waves through small apertures, J. Fluid Mech., Vol. 49, pp. 65~74, 1971.
- 7) Morse, P. M. and H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1978 p., 1953.
- 8) Kakuno, S.: Water-wave reflection and transmission by an infinite array of vertical flat plates, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 32 (to be Published).
- 9) Tuck, E. O.: Matching problems involving flow through small holes, C. S. Yih ed., Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York, pp. 89~158, 1975.
- 10) Newman, J. N.: Lateral motion of a slender body between two parallel walls, J. Fluid Mech., Vol. 39, pp. 97~115, 1969.
- 11) 角野昇八: 平板, 円形, 矩形断面無限柱体列の付加質量, 第38回年次学術講演会講演概要集, 第II部, 1983.
- 12) Sedov, L. I.: Two-dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics, Wiley, New York, 1965.
- 13) Taylor, P. J.: The blockage coefficient for flow about an arbitrary body immersed in a channel, J. Ship Research, Vol. 17, pp. 97~105, 1973.
- 14) Lamb, H.: Hydrodynamics, Dover, New York, 738 p., 1932.
- 15) 近藤敏郎: 直立消波構造の水理的特性, 第17回水工学に関する夏期研修会講義集, pp. B-1-1~B-1-16, 1981.
- 15) 村上仁士・越智 裕: 防波堤による波のエネルギー逸散および湧水振動の制御について, 第22回海岸工学講演会論文集, pp. 271~277, 1975.
- 17) Kakuno, S.: Reflection and transmission of waves through vertical slit-type structures, Proc. COASTAL STRUCTURES '83, pp. 939~952, 1983.