

中空円筒による波の散乱の解析とその応用

清川 哲志*・大山 巧**・小林 浩***

1. ま え が き

本論文は、海面上に固定された中空円筒による波の散乱をポテンシャル接続法で定式化し、これを用いて中空円筒内部の水面変動の応答特性、中空円筒内部および周辺の波高分布特性等を調べたものである。中空円筒による波の散乱、水面の応答等の基本的性質を知ることは、共振域を用いる波力発電、静水効果を用いる消波堤等への応用上重要であると思われる。しかしながら、この種の研究は少なく著者らの知るかぎり、水面上に固定された2枚の平行板による波の反射、透過特性をグリーン関数を用いて定式化した Newman¹⁾の研究、軸対称グリーン関数を用いた特異点分布法により、中空円筒による波の散乱を調べた中村ら²⁾の研究があるにすぎない。このうち、前者の研究は、その応用として透過性防波堤等が考えられるが、平行板間の水面の応答特性を利用するといった観点で捉えられていない。また中村らの研究は、本研究の対象に近いものであるが、内部水面の静穏効果に及ぼす構造物の径、入射波長、喫水の影響等の検討がまだ不十分であると言えよう。

2. 中空円筒による波の散乱の理論

(1) 基礎方程式と一般解

図-1 に示すように、一定水深 h の水域に半径 a 、喫水 qh で、肉厚の無視できる中空円筒があり、この中空円筒に角振動数 ω 、波高 H_0 の波が入射した時の中空円筒周辺および内部の波の散乱を考える。

流体運動を非粘性、非回転とすると、速度ポテンシャル ϕ が存在する。さらに線形性を仮定し、 ϕ を入射波のポテンシャル ϕ_0 と散乱波のポテンシャル ϕ の和として取り扱い、これを円筒座標系で以下のように表す。

$$\phi(r, \theta, z, t) = \frac{gH_0}{2\omega} \{ \phi_0(r, \theta, z) + \phi(r, \theta, z) \} e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで ϕ_0 はフーリエ余弦展開を用いて次のように表さ

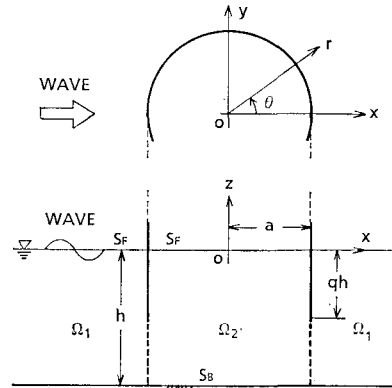


図-1 座 標 系

れる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_0^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \phi_0^{(m)}(r, z) &= \epsilon_m i^m \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} J_m(k_0 r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

ただし ϵ_m : ノイマン数 ($m=0$ のとき 1, $m \geq 1$ のとき 2), k_0 : 波数, J_m : m 次ベッセル関数, i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である。

また、流体領域を中空円筒外部と内部の2つの領域 Ω_1, Ω_2 に分け、式 (1) における散乱波のポテンシャル ϕ を領域ごとにそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 で表わす。これらのポテンシャルは、次のラプラス方程式および自由表面条件、海底面での不透過条件を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\partial \phi_i / \partial z - (\omega^2/g) \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \text{ (on } S_F) \quad \dots\dots (4)$$

$$\partial \phi_i / \partial z = 0 \quad (i=1, 2) \text{ (on } S_B) \quad \dots\dots (5)$$

また、 ϕ_1 はさらに無限遠方での放射条件を満たす必要がある。これら基礎方程式および境界条件を満足する解を固有関数の重ね合わせによって表すと、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_1^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \phi_1^{(m)}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} K_m(k_n r) \end{aligned} \right\}$$

* 正会員 清水建設(株) 大崎研究室

** 正会員 清水建設(株) 研究所

*** 正会員 Eng. Sc. D. 清水建設(株) 研究所主席研究員

$$\left. \begin{aligned} & -iA_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} H_m^{(1)}(k_0 r) \int \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_2^{(m)}(r, z) \cos m\theta \\ \varphi_2^{(m)}(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(m)} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} I_m(k_n r) \\ & - iB_0^{(m)} \frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} J_m(k_0 r) \\ & \dots\dots\dots (7) \end{aligned} \right\}$$

ただし, $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$): 複素未定係数, k_n ($n=1, 2, \dots$): 固有値, I_m , K_m , $H_m^{(1)}$: 第1種, 第2種変形ベッセル関数および第1種ハンケル関数である. ここで k_0 , k_n は $k_0 \tanh k_0 h = -k_n \tan k_n h = \omega^2/g$ の実正根である.

また, ϕ_1 , ϕ_2 は $r=a$, $-h \leq z \leq -qh$ における各領域の接続面でエネルギーの連続条件 ($\phi_1 = \phi_2$) および運動量の連続条件 ($\partial \phi_1 / \partial r = \partial \phi_2 / \partial r$) を満足し, さらに $r=a$, $-qh \leq z \leq 0$ において構造物表面上の不透過条件 ($\partial \phi_i / \partial r + \partial \phi_0 / \partial r = 0$ ($i=1, 2$)) を満足する必要がある. $\varphi_1^{(m)}$, $\varphi_2^{(m)}$ および $\varphi_0^{(m)}$ を用いてこれらの境界条件を表すと以下ようになる.

$$\varphi_1^{(m)}|_{r=a} = \varphi_2^{(m)}|_{r=a} \quad (-h \leq z \leq -qh) \dots\dots\dots (8)$$

$$\partial \varphi_1^{(m)} / \partial r|_{r=a} = \partial \varphi_2^{(m)} / \partial r|_{r=a} \quad (-h \leq z \leq -qh) \dots\dots\dots (9)$$

$$\partial \varphi_i^{(m)} / \partial r|_{r=a} + \partial \varphi_0^{(m)} / \partial r|_{r=a} = 0 \quad (i=1, 2), \quad (-qh \leq z \leq 0) \dots\dots\dots (10)$$

(2) 未定係数の算出

接続面での境界条件 (9) および (10) を円筒の外面に對してまとめると次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \begin{cases} -\partial \varphi_0^{(m)} / \partial r|_{r=a} & (-qh \leq z \leq 0) \\ \partial \varphi_2^{(m)} / \partial r|_{r=a} & (-h \leq z \leq -qh) \end{cases} \\ & \dots\dots\dots (11) \end{aligned} \right\}$$

これに, 式 (6), (7) より $\partial \varphi_1^{(m)} / \partial r$, $\partial \varphi_2^{(m)} / \partial r$, および式 (2) より $\varphi_0^{(m)} / \partial r$ を求め代入する. そしてその両辺に $\cosh k_0(h+z)$ を乗じて海底面から平均水面まで積分すると, 固有関数の直交性により左辺では $A_0^{(m)}$ の項のみが残る, 次式を得る.

$$\begin{aligned} & -ik_0 A_0^{(m)} H_m^{(1)'}(k_0 a) \int_{-h}^0 \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} k_n B_n^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z) \cosh k_0(h+z)}{\cos k_n h} \\ & \quad \times dz I_m'(k_n a) \\ & - ik_0 B_0^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz J_m'(k_0 a) \\ & - k_0 \varepsilon_m i m \int_{-qh}^0 \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz J_m'(k_0 a) \\ & \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

同様にして, 今度は $\cos k_l(h+z)$ を乗じて積分する

と, $l=1, 2, \dots$ に対し次式を得る.

$$\begin{aligned} & k_l A_l^{(m)} \int_{-h}^0 \frac{\cos^2 k_l(h+z)}{\cos k_l h} dz K_m'(k_l a) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} k_n B_n^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cos k_n h} \\ & \quad \times dz I_m'(k_n a) \\ & - ik_0 B_0^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh k_0(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cosh k_0 h} \\ & \quad \times dz J_m'(k_0 a) \\ & - k_0 \varepsilon_m i m \int_{-qh}^0 \frac{\cosh k_0(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cosh k_0 h} \\ & \quad \times dz J_m'(k_0 a) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに, $H_m^{(1)'}$, I_m' , J_m' , K_m' は, それぞれ $H_m^{(1)}$, I_m , J_m , K_m の導関数を表す.

次に, 円筒の内面に対して境界条件 (9), (10) をまとめると, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \begin{cases} -\partial \varphi_0^{(m)} / \partial r|_{r=a} & (-qh \leq z \leq 0) \\ \partial \varphi_1^{(m)} / \partial r|_{r=a} & (-h \leq z \leq -qh) \end{cases} \\ & \dots\dots\dots (14) \end{aligned} \right\}$$

これに, 外面の場合と同様な計算を行うと以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & -ik_0 B_0^{(m)} \int_{-h}^0 \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz J_m'(k_0 a) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z) \cosh k_0(h+z)}{\cos k_n h} \\ & \quad \times dz K_m'(k_n a) \\ & - ik_0 A_0^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz H_m^{(1)'}(k_0 a) \\ & - k_0 \varepsilon_m i m \int_{-qh}^0 \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0 h} dz J_m'(k_0 a) \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_l B_l^{(m)} \int_{-h}^0 \frac{\cos^2 k_l(h+z)}{\cos k_l h} dz I_m'(k_l a) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cos k_n h} \\ & \quad \times dz K_m'(k_n a) \\ & - ik_0 A_0^{(m)} \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh k_0(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cosh k_0 h} \\ & \quad \times dz H_m^{(1)'}(k_0 a) \\ & - k_0 \varepsilon_m i m \int_{-qh}^0 \frac{\cosh k_0(h+z) \cos k_l(h+z)}{\cosh k_0 h} \\ & \quad \times dz J_m'(k_0 a) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

次に, 接続面におけるポテンシャルの連続性の条件 (8) に, 式 (6), (7) の $\varphi_1^{(m)}$, $\varphi_2^{(m)}$ を代入し, その両辺に $\cosh k_0(h+z)$ を乗じて海底面から喫水線まで積分すると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(m)} K_m(k_n a) - B_n^{(m)} I_m(k_n a)\} \\ & \times \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z) \cosh k_0(h+z)}{\cos k_n h} dz \end{aligned}$$

$$-i\{A_0^{(m)}H_m^{(1)}(k_0a)-B_0^{(m)}J_m(k_0a)\} \\ \times \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh^2 k_0(h+z)}{\cosh k_0h} dz = 0 \dots\dots\dots (17)$$

同様に, $\cos k_l(h+z)$ を乗じて積分すると次式を得る.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^{(m)}K_m(k_na)-B_n^{(m)}I_m(k_na)\} \\ \times \int_{-h}^{-qh} \frac{\cos k_n(h+z)\cos k_l(h+z)}{\cos k_nh} dz \\ -i\{A_0^{(m)}H_m^{(1)}(k_0a)-B_0^{(m)}J_m(k_0a)\} \\ \times \int_{-h}^{-qh} \frac{\cosh k_0(h+z)\cos k_l(h+z)}{\cosh k_0h} dz = 0 \\ (l=1,2,\dots) \dots\dots\dots (18)$$

以上の式(12), (13)および式(15)~(18)を満足するように複素未定係数 $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ を決定すれば, これを式(6)および(7)に代入することによって, 所与の基礎方程式とすべての境界条件を満足する解が得られる. 散乱波のポテンシャルの一般解は式(6), (7)に見るように無限級数の形で表されているが, これは収束級数をなすので, 任意の精度に対してその精度を満足する展開項数 N が存在することは明らかである. 従って, 必要な精度に応じて無限級数を有限級数で近似することにすれば, これら式(12), (13)および式(15)~(18)は $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ に関する複素係数連立一次方程式となり, これによって $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ が決定される.

(3) 中空円筒内部および周辺の波高

中空円筒内部および周辺の複素水面変動量 η はベルヌーイの定理から速度ポテンシャル Φ により, $\eta=(-1/g) \cdot (\partial\Phi/\partial t)|_{z=0}$ と表せる. したがって, 式(1), (2)および式(6), (7)より各領域の複素水面変動量 η_i を $\varphi_i^{(m)}$, $\varphi_0^{(m)}$ ($i=1,2$) で表せば次のようになる.

$$\eta_i(r, \theta, t) = \frac{iH_0}{2} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \{\varphi_i^{(m)}(r, 0) \\ + \varphi_0^{(m)}(r, 0)\} \cos m\theta \quad (i=1,2) \\ \dots\dots\dots (19)$$

いま, 中空円筒内部の波高に注目し, これを次のように平均化する.

$$\bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta_2 dA \dots\dots\dots (20)$$

ただし, A : 中空円筒断面積 ($=\pi a^2$) である. $\bar{\eta}$ は中空円筒内の空気の体積変化と直接関係があり, この応答特性を把握することは, 波力発電などへの応用上重要であると思われる. ただし, $\bar{\eta}$ が小さいからといって内部水面が静穏とは言えないことは注意を必要とする.

式(20)に(19)を代入し, さらに $\varphi_0^{(0)}, \varphi_2^{(0)}$ に式(2), (7)を代入すると, $\bar{\eta}$ の振幅 $|\bar{\eta}|$ は複素係数を用いて,

$$|\bar{\eta}| = \frac{H_0}{a} \left| (1-iB_0^{(0)}) \frac{J_1(k_0a)}{k_0} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(0)} \frac{I_1(k_na)}{k_n} \right| \\ \dots\dots\dots (21)$$

と表せる. 従って, $|\bar{\eta}|$ を求めるために必要なフーリエ

次数は0次のみであることがわかる.

3. 計算例および考察

(1) 妥当性の検討

$\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}$ を構成する未定係数 $A_n^{(m)}, B_n^{(m)}$ ($n, m=0, 1, \dots$) は, 式(8)~(10)を満足すべく決定される. 従って逆に $\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}$ がこれらの境界条件をどの程度満たしているかが, 妥当性を調べる目安になる. いま未定係数を $A_0^{(m)} \sim A_2^{(m)}, B_0^{(m)} \sim B_2^{(m)}$ の3項づつとしたときの $r=a$ における0次のフーリエ係数の絶対値 $|\varphi_1^{(0)}|, |\varphi_2^{(0)}|$ の挙動を図-2, 3に示す. これらの図よりわかるように, $q=0.5, 0.75$ のいずれの場合も $-h \leq z \leq -qh$ の範囲で $|\varphi_1^{(0)}|, |\varphi_2^{(0)}|$ はよく一致しており式(8)を十分満たしているのがわかる. また, ここでは示さなかったが, $\partial\varphi_1^{(m)}/\partial r, \partial\varphi_2^{(m)}/\partial r$ についても同様に式(9), (10)の境界条件を十分満足しているのを確認した. ただし, q が極端に小さい場合や, 中空円筒内部の流体が共振現象を起こす場合については, 3項程度の展開項数では境界条件の満足度があまり良くない. このような場合には, 未定係数の数をさらに増す必要がある.

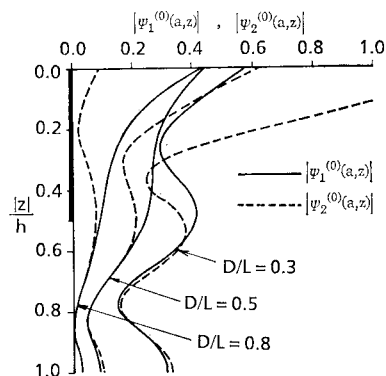


図-2 ポテンシャルの連続性
($D/h=1.0, q=0.5$)

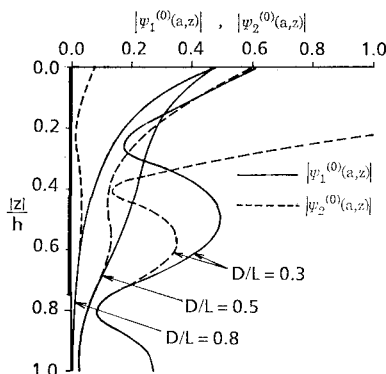
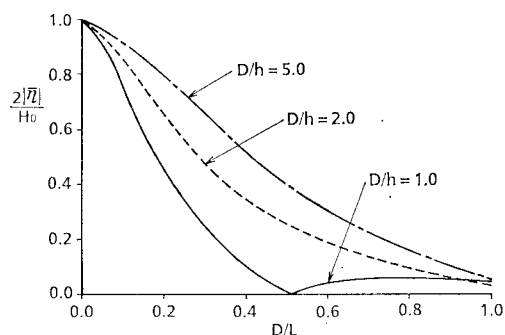
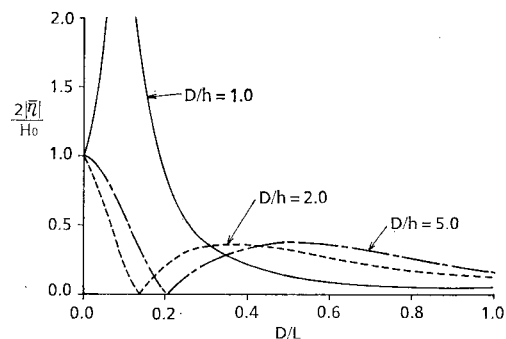
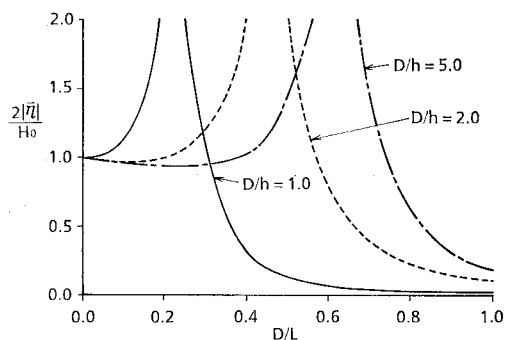


図-3 ポテンシャルの連続性
($D/h=1.0, q=0.75$)

(2) 中空円筒内部の平均水面変動

式 (21) の $|\eta|$ の応答特性を 図-4~6 に示す。ただし図中横軸は、中空円筒の径 $D (=2a)$ と入射波長 L との比で、縦軸は $|\eta|$ を入射波高 H_0 で無次元化したものである。これらの図に示されるように、 D/L を 0 に近づけるといづれの場合も $2|\eta|/H_0$ は 1.0 に収束する。これは、 L が D に比べ極端に大きい場合、波は中空円筒により乱されないことを意味しており、当然ともいうべき結果である。

図-4 より $q=0.25$ のときは、いづれの場合も $2|\eta|/H_0$ は 1.0 よりも小さい値になるのがわかる。これに対して 図-5, 6 に示すように、 $q=0.5, 0.75$ の場合には鋭いピークを有する応答が生じる。特に $q=0.75$ では、計算を行ったすべてのケースでそのような応答が見られ、ま

図-4 平均水面変動の応答特性 ($q=0.25$)図-5 平均水面変動の応答特性 ($q=0.5$)図-6 平均水面変動の応答特性 ($q=0.75$)

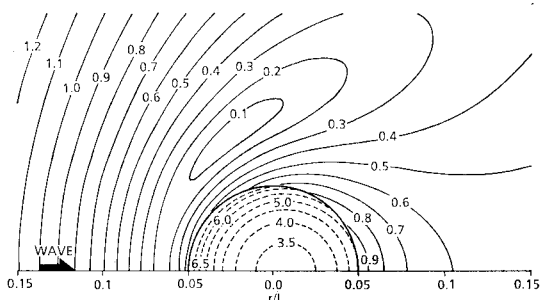
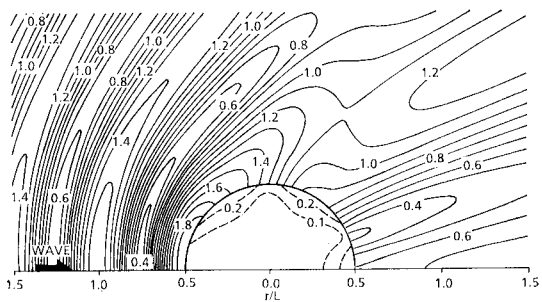
た、 D/h を大きくするに従って、ピークを生じる D/L の値は大きくなるのがわかる。

以上の計算結果より、波力発電装置等のように大きな $|\eta|$ を必要とする場合には、水深に比べ喫水を大きめにとる方が効率が良いと思われる。

(3) 波高分布例

式 (19) より、中空円筒内部および周辺の波高分布が計算できる。ただし、式 (19) はフーリエモード m に関する無限級数で表されているが、波高分布の計算結果から $m=5$ 程度とれば実用上問題がないのを確認し、以下の計算ではすべて $m=5$ とした。

まず $D/h=1.0$, $q=0.5$ で一定とし、 D/L を 0.1 および 1.0 とした場合の波高分布を 図-7, 8 に示す。このうち 図-7 は、図-5 における $|\eta|$ のピーク付近での波高分布であるが、中空円筒内部で最大波高比 6.5 という非常に大きな波高が現れる。また、この場合の周辺の波高分布に注目してみると、その前面で反射を起こすことなく中空円筒をとりまくような分布になっており、しかも非常に静穏になっているのがわかる。この様な場合、内部の水面変動から波のエネルギーを取り出し、周辺は静穏にするといった利用法が考えられる。これに対して、図-8 より D/L を大きくしていくと、前面で重複波が形成され、また内部では 図-7 にみられる大きな波高は現れず、周辺とは逆に静穏になってくるのがわかる。この場合は、内部に生ずる置くなどの養殖漁業等における利用法が考えられる。

図-7 入射波高比 ($D/L=0.1$, $q=0.5$, $D/h=1.0$)図-8 入射波高比 ($D/L=1.0$, $q=0.5$, $D/h=1.0$)

