

構造特性マトリックスによる柱体の波浪応答解析

——不規則波への応用——

石 田 啓*・細 貝 隆 司**

1. 緒 言

海洋構造物に関する研究は、わが国においては必ずしも活発とは言えないが、世界的趨勢としては、OTC や BOSS などの学会に見られるように、石油掘削装置などを中心とした種々さまざまな研究が報告されている。特に柱状構造物に限定しても、その大型化および高精度化に伴い、構造物の動力学的特性を充分考慮した解析が要求されている。著者らはすでに、伝達マトリックス法を用いた柱状構造物の解析法を提示したが¹⁾、この計算法は規則波の場合にのみ使用し得るものであった。従って本研究では、任意のスペクトル形を有する不規則波の場合にも適用できる方法として、構造特性マトリックスを用いる動的応答解析法を提示する。本計算法は、構造物を多数の要素に分割するため、構造形態が複雑な場合にも適用可能であるが、ここでは、単円柱を対象とした計算法について述べる。次に、その妥当性を検討するため、規則波および不規則波を用いた実験を行い、円柱頂部の変位の時間変化について、計算値と実験値との比較検討を行う。

2. 解析方法

(1) 構造特性マトリックスによる振動解析²⁾

本計算法は、対象とする部材を有限個の梁要素に分割して取り扱うが、図-1 に、 i 番目の梁要素を示す。梁

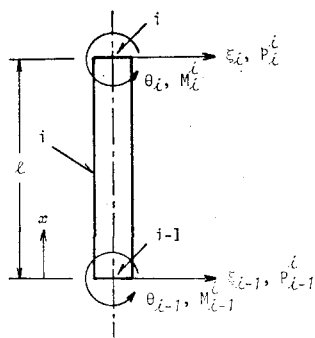


図-1 梁要素

要素は曲げ変形のみを考慮し、軸方向変形などは無視する。節点 i の変位および回転角を、それぞれ ξ_i および θ_i で示すと、長さ l の梁要素のたわみ $\xi(x)$ は、

$$\xi(x) = \phi_1(x)\xi_{i-1} + \phi_2(x)\theta_{i-1} + \phi_3(x)\xi_i + \phi_4(x)\theta_i \quad \dots\dots\dots(1)$$

と表示される。ここに $\phi_n(x)$ は、おのおのの節点の単位変形によって生じるたわみであり、 $\phi_1(x) = 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3$ 、 $\phi_2(x) = 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3$ 、 $\phi_3(x) = x(1 - x/l)^2$ 、 $\phi_4(x) = (x^2/l)(x/l - 1)$ となる。

梁要素 i の 4 つの節点変位は、変位ベクトルとして、 $\mathbf{u}_i = (\xi_{i-1}, \theta_{i-1}, \xi_i, \theta_i)^T$ で表す。ここに T は列ベクトルを意味する。梁要素に加わる外力およびモーメントは、節点にのみ作用するとして取り扱うが、要素 i に加わる外力とモーメントを、節点 i および $i-1$ に分配したものを P_i^i, M_i^i および P_{i-1}^i, M_{i-1}^i で示し、これらを外力ベクトル $\mathbf{F}_i = (P_{i-1}^i, M_{i-1}^i, P_i^i, M_i^i)^T$ で表す。外力 $\mathbf{F}_i$ が作用する時の要素 i の満足すべき運動方程式は、

$$[M]i\ddot{\mathbf{u}}_i + [C]i\dot{\mathbf{u}}_i + [K]i\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \quad \dots\dots\dots(2)$$

で与えられる。ここに $\dot{}$ は時間微分を意味する。 $[K]_i$ 、 $[M]_i$ および $[C]_i$ は、梁要素 i の剛性マトリックス、質量マトリックスおよび減衰マトリックスであり、梁要素に仮想仕事の原理を適用することにより、次のように求まる。

$$\begin{aligned} [K]_i &= \left[EI \int_0^l \phi_j'' \phi_k'' dx \right]_i \\ &= \left(\frac{2EI}{l^3} \right)_i \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 2l^2 & -3l & l^2 & \\ \text{Sym.} & 6 & -3l & \\ & & & 2l^2 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots(3) \\ [M]_i &= \left[\bar{m} \int_0^l \phi_j \phi_k dx \right]_i \\ &= (\bar{m}l)_i \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{420}l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l \\ & \frac{1}{150}l^2 & \frac{13}{420} & -\frac{1}{140}l^2 \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l \\ \text{Sym.} & & & \frac{1}{150}l^2 \end{bmatrix}_i \\ &\quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 五洋建設(株)

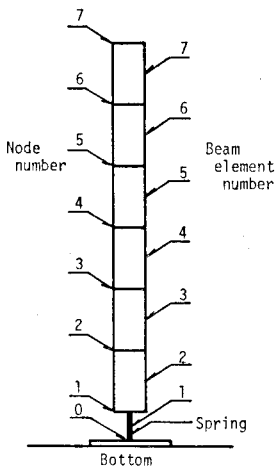


図-2 モデル化した柱体

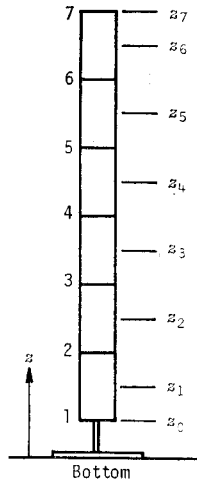


図-3 波力の積分区分

$$[C]_i = \left[\bar{c} \int_0^l \phi_j \phi_k dx \right]_i = \left(\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \right) [M]_i \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $\phi'_n = d^2 \phi_n / dx^2$ 、 EI は曲げ剛性、 $\bar{m}$ は単位長当りの質量、 $\bar{c}$ は減衰定数である。

次に、下部に板バネのついた柱体を、図-2 に示すように7つの梁要素に分割する。各要素の u_i および F_i を、 $u_i = (\xi_{i-1}, \theta_{i-1}, \xi_i, \theta_i)^T = (x_{i-1}, x_i)^T$ および $F_i = (P_{i-1}, M_{i-1}, P_i, M_i)^T = (f_{i-1}, f_i)^T$ のように $x_i = (\xi_i, \theta_i)^T$ および $f_i = (P_i, M_i)^T$ を用いて表し、それに伴い、 $[M]_i$ 、 $[C]_i$ および $[K]_i$ を部分行列を用いて書き変えると、式(2)は、

$$\begin{bmatrix} m_{11}^i & m_{12}^i \\ m_{21}^i & m_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{i-1} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{i-1} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

のように書き換えられる。各要素に対して立てた式(6)を、全て重ね合わせると、

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = F \dots \dots \dots (7)$$

が得られる。ここに、

$$\begin{aligned} u &= (x_0, \dots, x_i, \dots, x_7)^T \\ &= (\xi_0, \theta_0, \dots, \xi_i, \theta_i, \dots, \xi_7, \theta_7)^T \dots \dots \dots (8) \\ F &= (f_0^1, f_1^1 + f_1^2, \dots, f_i^1 + f_i^{i+1}, \dots, f_7^7)^T \\ &= (f_0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_7)^T \\ &= (P_0, M_0, P_1, M_1, \dots, P_i, M_i, \dots, P_7, M_7)^T \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

である。 $[M]$ は、全体の質量マトリックスであり、

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & & & \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & & \\ & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_{22}^7 \end{bmatrix} \dots (10)$$

となる。 $[C]$ および $[K]$ は、 $[M]$ と全く同じ形の行列であり、式(10)の m_{jk}^i を、 c_{jk}^i および k_{jk}^i に置き変

えたものになる。

式(8)に示す変位ベクトルの時間変化 $u(t)$ は、ここでは、式(7)をニューマークの β 法³⁾で解くことにより算出した。

(2) 波による円柱の振動¹⁾

円柱に作用する外力として、水平方向水粒子速度 u と柱の変位速度 $\dot{\xi}$ との相対速度を考慮したモリソン公式を用いる。式(4)に含まれる質量 $\bar{m}$ は、柱の断面積を A 、柱の密度を ρ 、水の密度を ρ_w 、付加質量係数を K_a とすると、水中部分では、 $\bar{m} = \rho A + K_a \rho_w A$ 、空中部分では、 $\bar{m} = \rho A$ となる。式(5)に含まれる減衰定数 $\bar{c}$ は、 $\dot{\xi}$ に比例する減衰力と相対速度を考慮したために生じる減衰力とを考え、 $\bar{c} = c_1 + C_D \rho_w D |u|$ を用いる。ここに、 D は円柱の直径、 C_D は抗力係数であり、 c_1 は円柱を空中で自由振動させた時の減衰定数である。

式(9)の P_i は、節点 i に作用する外力であり、モリソン公式を、図-3 に示す z_{i-1} から z_i の間で積分することにより、

$$P_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{1}{2} C_D \rho_w D u |u| + C_M \rho_w A \dot{u} \right) dz \dots (11)$$

で与えられる。ここに C_M は慣性係数であり、 $\dot{u}$ は水平方向水粒子加速度である。式(9)の M_i は外力モーメントであるが、ここでは、若干の検討の結果、すべての M_i を無視することとした。要素1の板バネについては、剛性力のみを考慮し、慣性力、減衰力および外力は無視した。

柱の固定端の境界条件は $\xi_0 = \theta_0 = 0$ であり、各係数の値は、 $C_D = 1.0$ 、 $C_M = 2.0$ 、 $K_a = 1.0$ 、 $\beta = 0.25$ および $c_1 = 0.003 \text{ g sec/cm}^2$ を用いた。時間ステップは、規則波の場合 $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ 、不規則波の場合 $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ とした。

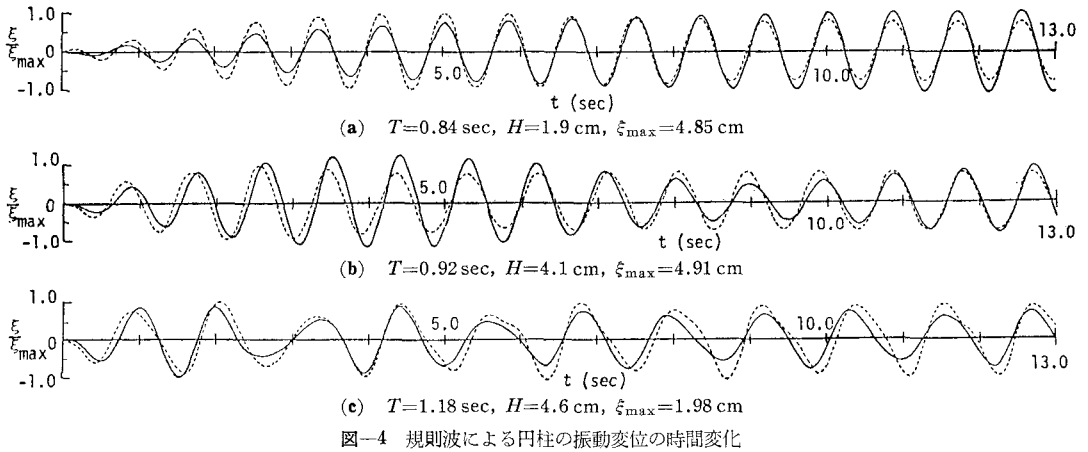
3. 規則波による振動

(1) 実験装置および方法

実験は、金沢大学工学部土木工学科河海工学実験室に設置された長さ 14m、幅 50cm、深さ 64cm の造波水槽を用いた。水槽の一端にはプランジャー型造波機が設置されており、その前方約 4.8m の位置に、長さ 60cm、直径 $D = 4 \text{ cm}$ の円柱を設置した。円柱は比重 1.22 のアクリル製であり、下端部に曲げ剛性 $EI = 1.928 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ の板バネが設置されている。円柱の変位は、板バネに貼り付けた歪みゲージを用いて測定した。実験時の水深は $h = 40 \text{ cm}$ 、水中における円柱の固有振動周期は $T_0 = 0.80 \text{ sec}$ であった。

(2) 結果および考察

図-4 (a), (b) および (c) は、それぞれ円柱頂部の振動変位の実測値と計算値とを比較したものであるが、縦軸は変位 ξ を実測値の最大変位 $\xi_{\max}$ で割った値であ



り、横軸は時間 t である。図中、実線および破線は、それぞれ計算値および実測値であるが、変位ベクトルの初期値は、実験時および計算時ともに、 $u=\dot{u}=0$ とした。なおモリソン公式の u および $\dot{u}$ は微小振幅波理論を適用した。

図 (a) は、波の周期が $T=0.84$ sec、波高が $H=1.9$ cm、最大変位が $\xi_{\max}=4.85$ cm の場合であり、共振状態に近い場合である。図より、変位の振幅は時間の経過とともにわずかに増大して行くが、 $t=6$ sec 以後は定常状態になり、また実測値と計算値はほぼ一致している。図 (b) は、 $T=0.92$ sec, $H=4.1$ cm, $\xi_{\max}=4.91$ cm の場合であり、実測値および計算値ともに、うなりの現象が見られるが、この現象は計算値のほうがより著しい。図 (c) は、 $T=1.18$ sec, $H=4.6$ cm, $\xi_{\max}=1.98$ cm の場合であり、実測値と計算値はほぼ一致している。

4. 不規則波による振動

(1) 実験装置および方法

実験は、京都大学工学部土木工学科地下実験室に設置された長さ 27m、幅 50cm、高さ 70cm の造波水槽を用いた。水槽の一端には不規則波発生機が設置されており、その前方約 5.5m の位置に円柱を設置した。この円柱は規則波による振動実験に用いた円柱と同じものであるが、円柱の上端部には、変位測定用の金属片が取り付けられている。円柱頂部の変位は非接触型変位計を用いて測定したが、これらの出力はデータレコーダーで記録し、0.02 sec 間隔でデジタル化した。不規則波発生機には、0.2~5.0 Hz の周波数領域を 1/3 oct. 幅に分割した 15 本のバンドパスフィルターが組み込まれており、おのおのの出力ゲインを調整することにより、種々のス

表-1 不規則波の実験ケース

実 験 ケース	バンドパスフィルター出力周波数およびゲイン (max 10, min 0)															
	Hz	.2	.25	.315	.4	.5	.63	.83	1.0	1.25	1.6	2.0	2.5	3.15	4.0	5.0
Case 1											10					
Case 2										10						
Case 3									10							
Case 4								10								
Case 5							10									
Case 6	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10					
Case 7	10	10	10	10	10	10	10	10	10							
Case 8										10	10					
Case 9										10	10	10	10			
Case 10										10	10	10	10	10	10	10
Case 11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Case 12									10		10					
Case 13				10							10					
Case 14	10	10	10	10	10							10	10	10	10	10
Case 15								10			10					

ベクトル構造を持つ不規則波を起こすことができる⁴⁾。実験に用いた不規則波は表-1に示した15種類である。実験時の水深は $h=40$ cm であり、水中における円柱の固有振動数は $f_0=1.56$ Hz であった。

(2) 結果および考察

円柱に作用する単位長当りの不規則波力の時間変化は、周波数応答係数とリアフィルタを用いる方法により、水面変動の測定値 $\eta(t)$ から算出することができる^{4),5)}。この際、波峰の位相においては、静水面より上の部分の u および $\dot{u}$ を算出する必要が生じるが、この場合の η に対する u および $\dot{u}$ の周波数応答関数の値は、

周波数 f の増加に伴い無限大になる。従って、静水面より上の部分の周波数応答関数は、高周波数領域において、適当な有限値になるよう修正しておく必要がある。ここでは、砕波限界 $H_b/L=0.17$ から得られる周波数を一つの限界値と考え、それ以上の高周波数領域の周波数応答関数の値をゼロにする方法を用いた。また、計算時の変位ベクトル u および $\dot{u}$ の初期値には、実測値を用いた。

図-5 (a)~(d) に、表-1に示した Case 1, Case 3, Case 11, および Case 13 の結果を示す。各図とも、それぞれ、水面変動 η および円柱頂部の振動変位 ξ の時間

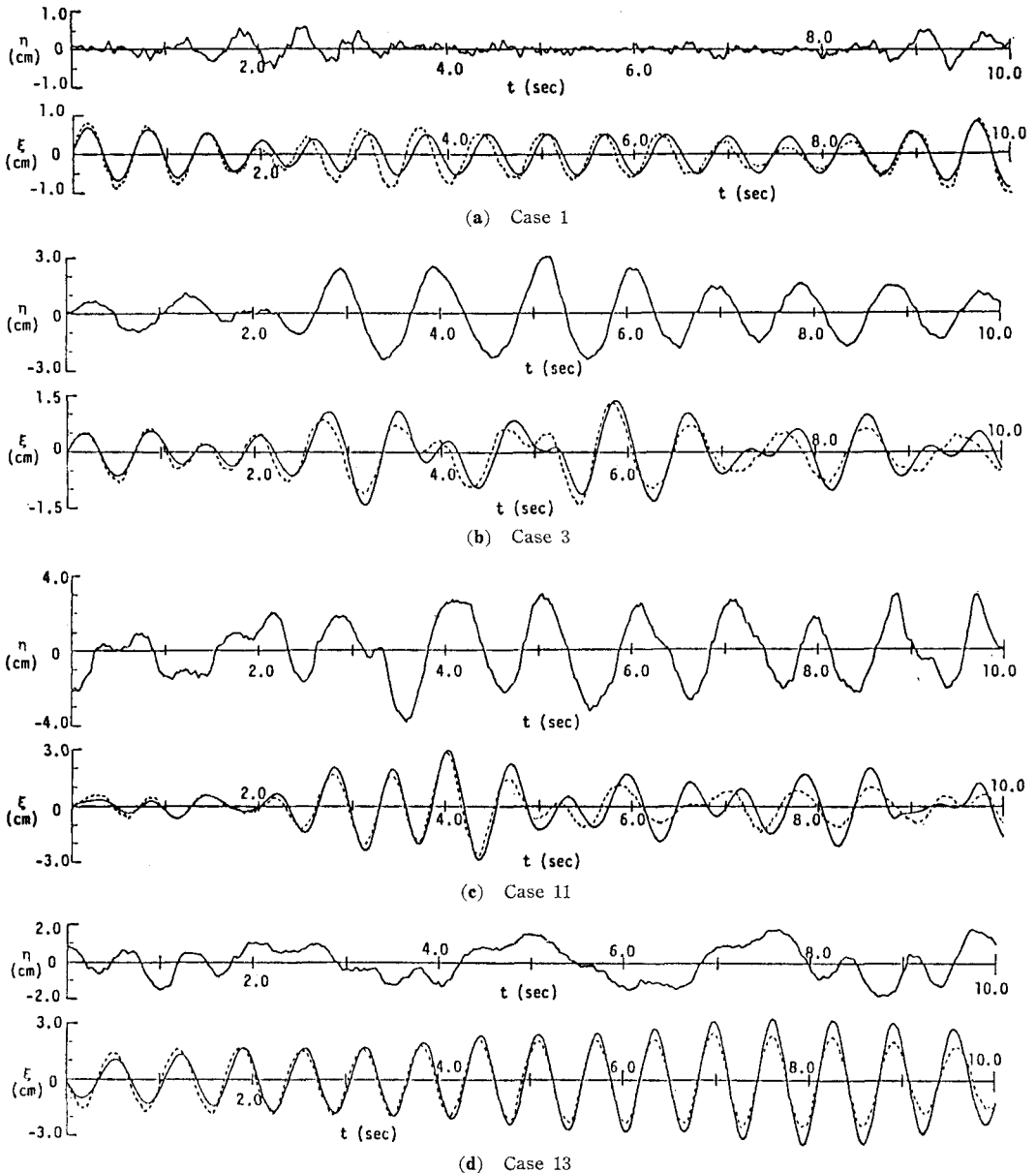


図-5 不規則波による円柱の振動変位の時間変化

変化を示すが、実線で示した ξ は、 η の実測値から算出した計算値であり、破線は実測変位である。

図(a)は、 $f=1.6\text{ Hz}$ を中心としたナローバンドスペクトルを持つ不規則波であるが、共振周波数が 1.6 Hz に近いので、水面変動 η が微小であるにもかかわらず、変位 ξ は大きい。また、変位の実測値と計算値は割合良く一致している。図(b)は、 $f=1.0\text{ Hz}$ を中心としたナローバンドスペクトルを持つ不規則波であり、変位の実測値と計算値はほぼ一致している。図(c)は、 $f=0.2\text{ Hz}$ から $f=5.0\text{ Hz}$ までの成分波を含む不規則波である。実測値と計算値とは、 $t=4\text{ sec}$ 程度までは良く一致しているが、以後若干の相違が生じている。図(d)は、 $f=0.4\text{ Hz}$ と $f=1.6\text{ Hz}$ の成分波を含む不規則波であるが、 $f=1.6\text{ Hz}$ の振動が卓越し、また実測値より計算値のほうが若干大きい。

他のケースもこれらの結果とほぼ同様であり、不規則波による振動変位の時間変化が水面変動のみから妥当に算出されると言えるが、実測値と計算値に若干の差違が生じる理由としては、 C_D 、 C_M および K_a を一定値に固定していること、減衰定数 $\bar{c}$ の与え方および静水面上での周波数応答関数の修正の仕方にそれぞれ検討の余地があることなどが考えられる。

5. 結 論

本研究は構造特性マトリックスによる柱体の波浪応答解析を取り扱ったものであり、特に、現地波浪を想定し

た不規則波の場合について詳細に検討した。その結果、リニアフィルターを用いて水面変動のみから算出した不規則波力を外力とし、構造特性マトリックスを用いて表示した振動方程式を、ニューマークの β 法で数値解析することにより、不規則波による円柱の振動変位の時間変化がほぼ正確に算出されることが判明した。ただし、共振時に付加質量係数 K_a が 1.0 より減少すること、あるいは柱体の変位速度の2乗に比例する非線型減衰力を考慮した取り扱いについて、今後さらに検討する必要がある。

最後に、本実験を行うに際し、助力を惜しまなかった当時学部生の岡本 智君（現在三井造船）、鈴木寿人君（現在戸田建設）および鶴田博久君（現在矢作建設）に謝意を表す。なお、本研究は文部省科学研究費によるものである。

参 考 文 献

- 1) 石田 啓・沢木 一：波によるプラットフォームの振動解析に関する研究，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 599～603，1981。
- 2) Clough, R. W. and J. Penzien: Dynamics of structures, McGraw-Hill, pp. 1～175, 1975.
- 3) 戸川隼人：有限要素法による振動解析，サイエンス社，pp. 1～102，1975。
- 4) 岩垣雄一・酒井哲郎・石田 啓：不規則波の水粒子速度と水面変動との相互作用に関する研究，第19回海岸工学講演会論文集，pp. 149～154，1972。
- 5) 岩垣雄一・石田 啓・千田哲雄：円柱に作用する不規則波力について，第20回海岸工学講演会論文集，pp. 1～5，1973。