

(1) 上り斜面の場合

ゲートを流れ先端移動速度より遅く、底に沿って下流側へ移動させる場合を想定する⁶⁾。この運動の支配方程式を特性曲線式表示すれば、

$$u+2c+igt=\text{const.} \quad \text{on} \quad \frac{dx}{dt}=u+c \quad \cdots(6)$$

$$u-2c+igt=\text{const.} \quad \text{on} \quad \frac{dx}{dt}=u-c \quad \cdots(7)$$

ここで、 u : 水粒子速度、 c : 波速、

後端軌跡 x_b は負の段波の軌跡であるから、

$$\frac{dx}{dt}=-c=-\sqrt{g(h_0-ix)} \quad \cdots(8)$$

の解として⁷⁾、

$$x_b=-\frac{1}{4}igt^2-c_1t \quad \cdots(9)$$

ここで、 $c_1=\sqrt{gh_1}$ で h_1 はゲートでの初期上流側水深である。この曲線は負の特性曲線で、これに沿っては式(7)より、

$$-2c_b+igt_b=-2c_1 \quad \cdots(10)$$

が保存される。ここで、下添字 b は x_b 上の値であることを示す。

一方、仮定より波先端では水位があり、先端に追い付く正の特性曲線が存在する。この特性曲線に沿っては式(6)、(10)より、

$$u_s=4c_b-2c_1-2c_s-igt_s \quad \cdots(11)$$

の関係がある。ここで、下添字 s は先端上の値であることを示す。今、ゲートを流れ先端移動速度より遅く移動させる時間間隔を非常に短かくする。すなわち、 $t_s \rightarrow 0$ とする。この時、初期の先端の水粒子速度 u_{s0} は式(11)から、

$$u_{s0}=2c_1 \quad \cdots(12)$$

よって、式(6)、(12)よりゲート急開による流れの先端軌跡 x_s は

$$\frac{dx}{dt}=-igt+2c_1 \quad \cdots(13)$$

の解として、

$$x_s=-\frac{1}{2}igt^2+2c_1t \quad \cdots(14)$$

この曲線は正・負の特性曲線で、これに沿っては、

$$u_s+igt_s=2c_1 \quad \cdots(15)$$

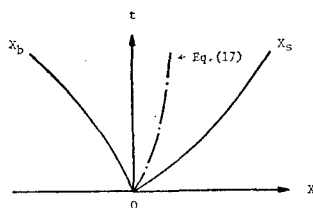


図-2 負の特性曲線

が保存される。この時の最大遡上高 $R_{\max}$ は式(14)から

$$R_{\max}=2h_1 \quad \cdots(16)$$

先端と後端の軌跡が放物型で負の特性曲線であることがわかった。そこで、この流れでは碎波は生じないものとして、両軌跡間の負の特性曲線を次式のように仮定する。

$$x=-\frac{1}{2}\deltaigt^2+\beta c_1t \quad \cdots(17)$$

ここで、 $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ 、 $-1 \leq \beta \leq 2$ さらに、 β と δ の関係を図-3に示すように直線近似すると、

$$\beta=6\delta-4 \quad \cdots(18)$$

よって、式(17)、(18)より、

$$\delta=\frac{x+4c_1t}{-\frac{1}{2}igt^2+6c_1t} \quad \cdots(19)$$

$d(17)/dt$ 、式(18)、(19)より、

$$u-c=\frac{x}{t}-\frac{igx+4c_1igt}{12c_1-igt} \quad \cdots(20)$$

式(20)は負の特性曲線を示しており、この曲線上である量が保存されねばならない。その保存量を Ritter の解からの類推により次式のように仮定する。

$$u-2c+igt=-2c_1+4c_1 \cdot \frac{x-x_b}{x_s-x_b} \\ =-2c_1+4c_1 \cdot \frac{x+\frac{1}{4}igt^2+c_1t}{3c_1t-\frac{1}{4}igt^2} \quad \cdots(21)$$

したがって、式(20)、(21)を連立させて解くと、

$$u_p=\frac{8c_1}{12c_1-igt} \left[c_1+\frac{x}{t}-\frac{1}{2c_1}igx-\frac{1}{4}igt \right. \\ \left. -\frac{1}{8c_1}i^2g^2t^2 \right] \quad \cdots(22)$$

$$h_p=\frac{c_p^2}{g}=\frac{16h_1}{(12c_1-igt)^2} \left[2c_1-\frac{x}{t}-\frac{1}{2c_1}igx \right. \\ \left. +\frac{1}{2}igt-\frac{1}{4c_1}i^2g^2t^2 \right]^2 \quad \cdots(23)$$

ここで、下添字 p は非粘性解であることを示す。上式が求めるべき近似解で、 $i=0$ とすれば Ritter の解に一致する。

(2) 下り斜面の場合

下り斜面の場合は式(22)、(23)において、 $i=-i$ とすればよい。

4. 不連続性の検討

3で求めた非粘性解は近似解であるため、完全には連続性を満足しない。その程度を図-4に示すような流入体積 V_s と流出体積 V_b の点から検討してみる。

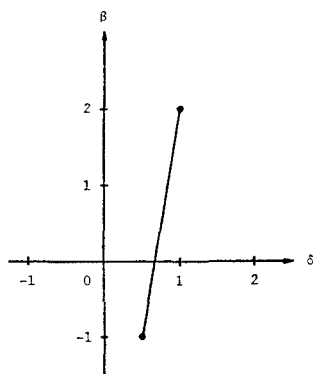


図-3 β と δ の関係

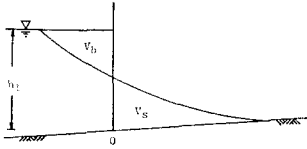


図-4 流れの模式図

$$V_s = \int_0^{x_s} h_p dx = \frac{1}{6g} \frac{A_2^3 A_3^2}{A_1^2} t \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$V_b = \int_{x_b}^0 (h_1 - ix - h_p) dx \\ = V_s - \frac{1}{96} (16c_1^2 - 8c_1igt - 5i^2g^2t^2)it^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{V_s - V_b}{V_s} = \frac{1}{16} \frac{A_1^2}{A_2^3 A_3^2} (16c_1^2 - 8c_1igt - 5i^2g^2t^2)igt \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 $A_1 = 12c_1 - igt$, $A_2 = 4c_1 - igt$, $A_3 = 2c_1 + igt$. 上式から、本研究の近似解は底勾配が小さくて、ゲート急開後の短時間の間ならば十分な精度を有することが予想される。具体的検討例を図-5に示す。

5. 基本式の解

$x = \xi$ では、式(22), (23) から次の関係が得られる。

$$\xi = 2 \frac{c_1}{A_4} \left(\frac{A_1}{8c_1} U - c_1 + \frac{1}{4}igt + \frac{1}{8c_1} i^2g^2t^2 \right) t \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$H = \frac{1}{4g} \left(A_3 - \frac{A_3}{A_4} U \right)^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $A_4 = 2c_1 - igt$. また、式(14), (23), (29) から、

$$\int_{\xi}^{x_s} h_p dx = \frac{1}{48g} A_1 A_3^2 \left(1 - \frac{U}{A_4} \right)^3 t \quad \dots\dots\dots (29)$$

よって、本研究の基本式(5)は、

$$\left[\frac{1}{48g} A_1 A_3^2 \left(1 - \frac{U}{A_4} \right)^3 t + \left(h_0 - \frac{1}{2}ia \right) a \right] \frac{dU}{dt} \\ = \frac{1}{32g} A_3^4 \left(1 - \frac{U}{A_4} \right)^4 - \frac{1}{2}g(h_0 - ia)^2 \\ - igt \left[\frac{1}{48g} A_1 A_3^2 \left(1 - \frac{U}{A_4} \right)^3 t + \left(h_0 - \frac{1}{2}ia \right) a \right] \\ - KU^2 \left[a - 2 \frac{c_1}{A_4} \left(\frac{A_1}{8c_1} U - c_1 + \frac{1}{4}igt \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8c_1} i^2g^2t^2 \right) t \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

そこで、水粒子速度 U と先端移動速度 $\dot{a}$ との間に次式を仮定する。

$$U = r \frac{da}{dt} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 r は実際には初期のゲート下流・上流側水深比 h_0/h_1 と時間 t の関数と思われる。しかし、本研究では h_0/h_1 のみの関数と仮定し、Stoker 理論で評価できるものとする³⁾。ただし、Stoker 理論による r の評価方法は h_0/h_1 の小さな値に対しては適用できない⁴⁾。しかし、津波による段波の形成においては h_0/h_1 がそのような小さな値をとることはないと思われる。そこで、この様にして評価された関係式(31)を式(30)に代入すると、

$$r \left[\frac{1}{48g} A_1 A_3^2 \left(1 - r \frac{\dot{a}}{A_4} \right)^3 t + \left(h_0 - \frac{1}{2}ia \right) a \right] \ddot{a} \\ = \frac{1}{32g} A_3^4 \left(1 - r \frac{\dot{a}}{A_4} \right)^4 - \frac{1}{2}g(h_0 - ia)^2 \\ - igt \left[\frac{1}{48g} A_1 A_3^2 \left(1 - r \frac{\dot{a}}{A_4} \right)^3 t + \left(h_0 - \frac{1}{2}ia \right) a \right] \\ - Kr^2 \dot{a}^2 \left[a - 2 \frac{c_1}{A_4} \left(\frac{A_1}{8c_1} r \dot{a} - c_1 + \frac{1}{4}igt \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8c_1} i^2g^2t^2 \right) t \right] \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(32)において、 $t \rightarrow 0$ の時を考えると次式が成立する。

$$\dot{a} = \frac{2}{r} (c_1 - c_0) \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここで、 $c_0 = \sqrt{gh_0}$. これは初期の先端の移動速度を示す。そこで、式(32)を解くにあたって二次の無次元の新変数を導入する。

$$\alpha = \frac{K}{h_1} \left[\frac{2}{r} (c_1 - c_0)t - a \right] \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{h_1}} Kt \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 α は初期速度のまま継続的に移動する点に対する流れ先端の遅れ距離を示す。式(32)を式(34), (35)を用いて書き直すと、

$$r \left[\frac{1}{48} B_1 B_2 B_3^2 B_4^3 \tau + B_2^4 (B_5 - \alpha) \right] \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (B_5 - \alpha) \right\} \ddot{\alpha} + \frac{1}{32} B_3^4 B_4^4 - \frac{1}{2} B_2^4 \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{i}{K} (B_5 - \alpha) \right\}^2 \\ - \frac{i}{K} \left[\frac{1}{48} B_1 B_2 B_3^2 B_4^3 \tau + B_2^4 (B_5 - \alpha) \right] \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (B_5 - \alpha) \right\} \\ - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (B_5 - \alpha) \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (B_5 - \alpha) \right\} \\ - \left(\frac{1}{4} B_1 B_6 - 2 + \frac{1}{4} B_3 \frac{i}{K} \tau \right) \tau = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで、

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{d\tau}, \quad \ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{d\tau^2}, \quad B_1 = 12 - \frac{i}{K} \tau,$$

$$B_2 = 2 - \frac{i}{K} \tau, \quad B_3 = 2 + \frac{i}{K} \tau,$$

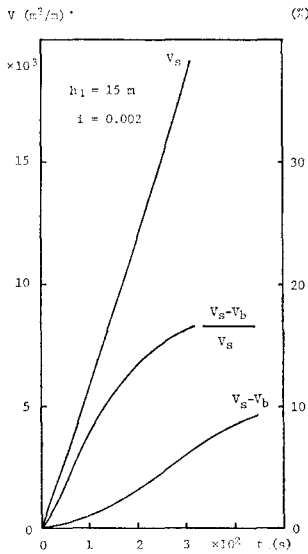


図-5 誤差の検討例

$$B_4 = 2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + r\dot{\alpha} - \frac{i}{K}\tau, \quad B_5 = \frac{2}{r}\left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\right)\tau,$$

$$B_6 = 2 - 2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} - r\dot{\alpha}.$$

さらに, Whitham にならって, 次の新変数を導入する.

$$p = \dot{\alpha} \dots \dots \dots (37)$$

$$\tau = f'(p) = \frac{df}{dp} \dots \dots \dots (38)$$

これにより, 変域は無限領域から有限領域 $0 \leq p \leq \frac{2}{r}\left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\right)$ に変わり, $\alpha = pf' - f$, $\ddot{\alpha} = 1/f''$ と表現される. よって, 式 (36) は,

$$\begin{aligned} & r \left[\frac{1}{48} D_1 D_2 D_3^2 D_4^3 B_4^3 f' + D_2^4 (D_5 - pf' + f) \right] \left\{ \frac{h_0}{h_1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (D_5 - pf' + f) \right\} + \frac{1}{32} D_3^4 D_4^4 f'' \\ & \quad - \frac{1}{2} D_2^4 \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{i}{K} (D_5 - pf' + f) \right\}^2 f'' \\ & \quad - \frac{i}{K} \left[\frac{1}{48} D_1 D_2 D_3^2 D_4^3 f' + D_2^4 (D_5 - pf' \right. \\ & \quad \left. + f) \left\{ \frac{h_0}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{i}{K} (D_5 - pf' + f) \right\} \right] f'' \\ & \quad - D_2^3 D_6^2 \left[D_2 D_5 - D_2 (pf' - f) - \left(\frac{1}{4} D_1 D_6 - 2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{4} D_3 \frac{i}{K} f' \right) f' \right] f'' = 0 \dots \dots \dots (39) \end{aligned}$$

ここで,

$$D_1 = 12 - \frac{i}{K} f', \quad D_2 = 2 - \frac{i}{K} f', \quad D_3 = 2 + \frac{i}{K} f',$$

$$D_4 = 2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + rp - \frac{i}{K} f', \quad D_5 = \frac{2}{r} \left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \right) f',$$

$$D_6 = 2 - 2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} - rp.$$

式 (39) が本研究の最終的に解くべき式である. この解として p の級数解を仮定し, 初期条件 $\tau=0$ の時 $\alpha = \dot{\alpha}=0$ のもとで解く. p について恒等的に成り立つように各係数を決めると, 例えば級数解の第1近似は,

$$f(p) = b_2 p^2 \dots \dots \dots (40)$$

ここで,

$$\begin{aligned} b_2 = & \left\{ 1 - (1-r) \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \right\} h_0 / 2 \left\{ \left(4 \frac{E_1}{r} - 6E_1 + 2 \right) E_1^2 \right. \\ & \left. + \frac{i}{K} \frac{h_0}{h_1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} E_2 - \frac{h_0}{h_1} - \frac{1-r}{r} E_1 \right) \right\} h_1, \\ E_1 = & 1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}, \quad E_2 = 1 + r. \end{aligned}$$

第2近似以下も計算的には容易に求まるが, 表現すると長くなるので省略する. 6で解の収束性について検討するが, 本理論と実験結果を比較する際には第1近似でかなりの範囲まで十分であることが確認される. よって, 先端に関する第一近似解は

$$\dot{a} = \frac{2}{r}(c_1 - c_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{b_2} K t \dots \dots \dots (41)$$

$$a = \frac{2}{r}(c_1 - c_0)t - \frac{1}{4} \frac{g}{b_2} K t^2 \dots \dots \dots (42)$$

上式において $K=0$ とすると

$$\dot{a} = \frac{2}{r}(c_1 - c_0) - ig \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} E_2 - \frac{h_0}{h_1} - \frac{1-r}{r} E_1}{1 - (1-r) \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}} t \dots \dots \dots (43)$$

$$a = \frac{2}{r}(c_1 - c_0)t - \frac{1}{2} ig \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} E_2 - \frac{h_0}{h_1} - \frac{1-r}{r} E_1}{1 - (1-r) \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}} t^2 \dots \dots \dots (44)$$

これらは, 一様勾配斜面上の段波に関する第一近似の非粘性解で, 一定水深域における段波に関する Stoker 理論に対応するものである.

6. 理論計算例

具体的理論計算例を示す. 図-6 は, $h_1=15$ m, $h_0=10$ m, $i=0.002$, そして $K=0.02$ とした場合の級数解の収束性を調べたものである. 第1近似でかなりの範囲まで議論できそうである. したがって, 以下の理論計算例は第1近似式を用いて行う. 図-7 と 8 は抵抗係数をいろいろと変化した場合の先端の軌跡と移動速度を示す. 抵抗係数の値により, 段波の移動速度は時間的に増減する.

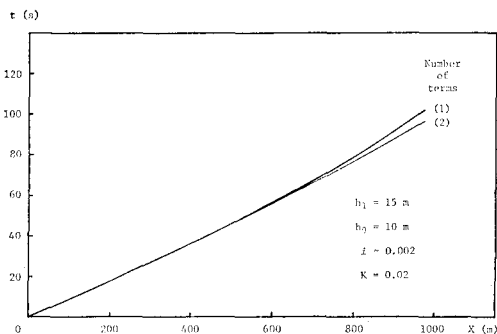


図-6 級数解の収束性

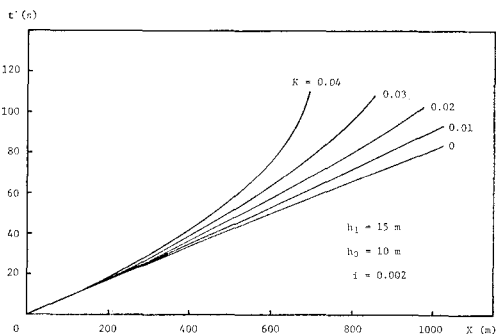


図-7 先端の軌跡

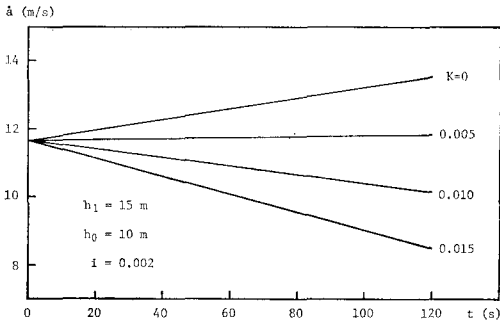


図-8 先端の移動速度

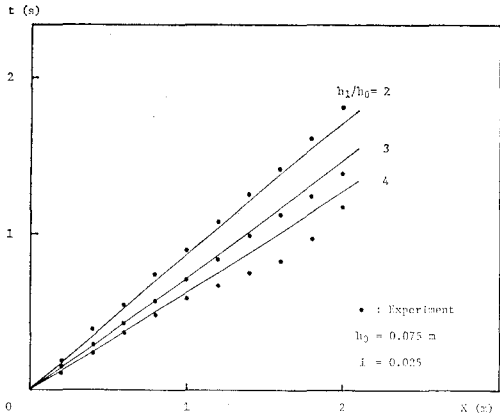


図-9 先端の軌跡に関する実験

抵抗係数の値の選択が重要な問題であることがうかがわれる。図-9 は先端の軌跡に関する実験例を示す。図中の実線は式 (44) で与えられるものである。本研究の結果が実際に供しうるものであることがわかる。

7. ダム破壊問題への適用

一様勾配斜面上のゲート急開による流れの非粘性解が求まると、一様勾配斜面上のダム破壊問題を扱うことが可能となる。この場合の基本式は

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\xi}^{x_s} \rho h_p dx \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{dP}{dt} = U \cdot \frac{d}{dt} \int_{\xi}^{x_s} \rho h_p dx + \frac{1}{2} \rho g H^2 + i g M - \rho K U^2 (a - \xi) \quad \dots\dots\dots (46)$$

上式をほぼ前述と同様な方法で解くと、 p をパラメータとして、先端の軌跡に関して次式が得られる。

$$a = \frac{h_1}{K} \left[0.04862 p^3 + 0.02503 p^4 + 0.01262 p^5 + \left(0.00635 - 0.00240 \frac{i}{K} \right) p^6 + O(p^7) \right] \quad \dots\dots (47)$$

$$t = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{h_1}{g}} \left[0.02431 p^3 + 0.002163 p^4 + 0.01496 p^5 + \left(0.00941 - 0.00135 \frac{i}{K} \right) p^6 + O(p^7) \right] \quad \dots\dots (48)$$

上式において $i=0$ とすれば Whitham の解と一致する。

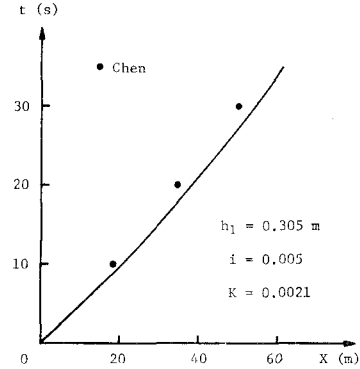


図-10 計算値との比較

同一条件下の Chen⁹⁾ の数値計算結果と上式の比較を図-10 に示す。Chen の先端移動速度の計算結果が多少小さめに評価されていることを考えると両者は比較的よく一致していると言える。

8. む す び

津波によって生ずる段波の挙動を調べることを目的として、その段波背後の流れの状態が特定できないことを理由に、ゲート急開による一様勾配斜面上の段波の挙動に関する近似解を Whitham の考えを基本に導いた。この近似解はその考え方の基本や解法上、河川や非常にゆるやかな海岸等で、しかも段波発生後の短時間にしか適用できないものと思われる。しかし、抵抗係数や h_1/h_0 の値により、この段波の移動速度が時間的に増減することや本研究の解析手法がまだ不十分な段階にある一様勾配斜面上のダム破壊問題にも適用できる等の面白い点も示し得た。また、本研究の解析手法は碎波寸前後の津波の入力条件（空間波形や流速）が与えられうるならばそれにも適用できる。

謝 辞： 本研究を遂行するに当たり、東北大学首藤伸夫教授と秋田大学浅田 宏教授より有益なるご教示と励ましを賜わった。また、実験を行うに際して本学卒研究生源田博則君と志田正実君の助力を得た。ここに記して両先生ならびに両君に深甚なる感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 例えば, Keller, H. B., Levine, D. A. and G. B. Whitham: J. F. M., Vol. 7, pp. 302~316, 1960.
- 2) Hunt, B.: Proc. of ASCE, Vol. 108, pp. 115~126, 1982.
- 3) Whitham, G. B.: Proc. of Royal Society of London, Series A, Vol. 227, pp. 399~407, 1955.
- 4) 松富英夫: 第25回水理講演会論文集, pp. 347~353, 1981.
- 5) Ritter, A.: Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Berlin), Vol. 36, pt. 2, No. 33, pp. 947~954, 1892.
- 6) Stoker, J. J.: Water Waves, pp. 308~314, 1957.
- 7) Sakkas, J. G. and T. Strelkoff: Proc. of ASCE, Vol. 99, pp. 2195~2216, 1973.
- 8) Stoker, J. J.: Water Waves, pp. 333~341, 1957.
- 9) Chen, C. L.: Proc. of ASCE, Vol. 106, pp. 535~556, 1980.