

潮汐波により励起される2次元二層界面長波の 数値計算法について

木村 晴保*・渡辺 貢**

1. ま え が き

水深・幅ともに一定な海域での表面波および界面波については、理論的にも実験的にも確立されている。そしてこれら理論結果に基づき、水深が階段状に変る二海域間での表面波の関係式、表面波と界面波の関係式が求められている。例えば、前者については Lamb¹⁾ や Le Méhauté²⁾ のものがあり、後者については Takano・Iida³⁾ のものがある。

ここでは Lamb や Takano・Iida らの考え方をさらに進めて、二海域間での表面長波と界面長波の関係式を導き、水深が連続的に任意に変る二次元二層海域において、表面長波（潮汐）によって励起される界面長波の算定法について述べる。

2. 基本式の誘導

水深のみが任意に変る2次元二層海域は、図-1 に示す階段形状で近似でき、図-2 に示す5ケースの組み合わせでもって表現できる。 x 軸を水面に右方を正に取る。 x の正の方向に進行する表面長波と界面長波の波形関数をそれぞれ f, f' で、逆行するそれらを g, g' で表わす。水深を d 、上層々厚を D 、上・下層の海水密度を ρ_1 、 ρ_2 、水深の変る地点の x 座標を x_n とし、これよりも左側の海域を $[n]$ 、右側の海域を $[n+1]$ と記す。各海域における水深、波形、流速等は海域に対応する添字を付記するものとし、図-2 に示す各ケースの表面長波と界面長波の関係式を以下に示す。

(1) ケース (1) ($D > d_n, d_{n+1}$, 図-2 (1))

$[n]$ における表面長波の水面波形 η_n と流速 u_n は

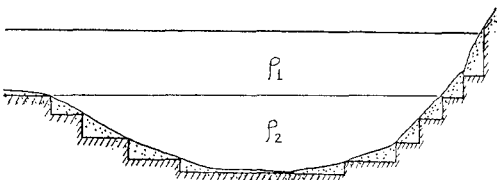


図-1 2次元二層海域のモデル化

$$\left. \begin{aligned} \eta_n &= f_n(t - x/c_n) + g_n(t + x/c_n) \\ u_n &= \{f'_n(t - x/c_n) - g'_n(t + x/c_n)\} c_n / d_n \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

界面長波の界面波形 η'_n および上・下層の流速 v'_n, u'_n は

$$\left. \begin{aligned} \eta'_n &= f'_n(t - x/c'_n) + g'_n(t + x/c'_n) \\ v'_n &= -\{f'_n(t - x/c'_n) - g'_n(t + x/c'_n)\} c'_n / D \\ u'_n &= \{f'_n(t - x/c'_n) - g'_n(t + x/c'_n)\} c'_n / (d_n - D) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

式 (1), (2) で t は時間, c_n, c'_n は表面長波と界面長波の波速で、それぞれ次式で与えられる。

$$c_n = \sqrt{gd_n}, \quad c'_n = \sqrt{egD(d_n - D)/d_n} \dots (3)$$

ここに、 g は重力加速度, $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ 。

$[n+1]$ における表面長波と界面長波の波形および流速は式 (1), (2) で添字 n を $n+1$ で置き換えたもの。

$x = x_n$ における境界条件は $[n]$ と $[n+1]$ での水面、界面がそれぞれ等しく、かつ上下層の海水が保存されるべきとして次式で与える

$$\left. \begin{aligned} \eta_n &= \eta_{n+1} \\ \eta'_n &= \eta'_{n+1} \\ D(u_n + v'_n) &= D(u_{n+1} + v'_{n+1}) \\ (d_n - D)(u_n + u'_n) &= (d_{n+1} - D)(u_{n+1} + u'_{n+1}) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

式 (2) の第2式と第3式からわかるように $Dv'_n + (d_n$

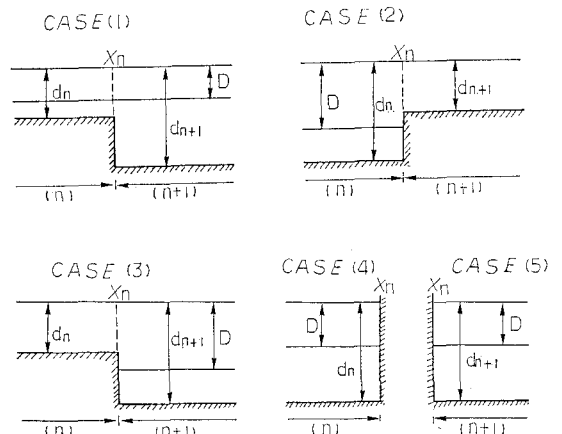


図-2 基本海域と記号

* 正会員 農博 高知大学教授 農学部栽培漁業学科

** 高知県水産業改良普及員

$-D)u'_n=0$, $Dv'_{n+1}+(d_{n+1}-D)u'_{n+1}=0$ であることから式(4)は式(5)と等価である。

$$\left. \begin{aligned} \eta_n &= \eta_{n+1} \\ d_n u_n &= d_{n+1} u_{n+1} \\ \eta'_n &= \eta'_{n+1} \\ (d_n - D)u'_n &= (d_{n+1} - D)u'_{n+1} - D(1 - d_{n+1}/d_n)u_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

次に、両海域における表面長波および表面長波と界面長波の関係式を求める。

角振動数を σ ($=2\pi/T$, T は周期) とし, $[n]$ における表面長波と界面長波の波形関数をそれぞれ次式で与え

$$\left. \begin{aligned} f_n(t) &= F_n e^{i\sigma t}, & g_n(t) &= G_n e^{i\sigma t} \\ f'_n(t) &= F'_n e^{i\sigma t}, & g'_n(t) &= G'_n e^{i\sigma t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(1)と式(2)を式(6)で表わし, 式(5)に代入することにより次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) F_{n+1} e^{-i(k_{n+1}-k_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) G_{n+1} e^{i(k_{n+1}+k_n)x_n} \right\} \\ G_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) F_{n+1} e^{-i(k_{n+1}+k_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) G_{n+1} e^{i(k_{n+1}-k_n)x_n} \right\} \\ F'_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{c'_{n+1}}{c'_n} \right) F'_{n+1} e^{-i(k'_{n+1}+k'_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{c'_{n+1}}{c'_n} \right) G'_{n+1} e^{i(k'_{n+1}+k'_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. - D \left(1 - \frac{d_{n+1}}{d_n} \right) \frac{U_{n+1}}{c'_n} e^{ik'_n x_n} \right\} \\ G'_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{c'_{n+1}}{c'_n} \right) F'_{n+1} e^{-i(k'_{n+1}+k'_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{c'_{n+1}}{c'_n} \right) G'_{n+1} e^{i(k'_{n+1}-k'_n)x_n} \right. \\ &\quad \left. + D \left(1 - \frac{d_{n+1}}{d_n} \right) \frac{U_{n+1}}{c'_n} e^{-ik'_n x_n} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに, k_n, k'_n は $[n]$ における表面長波と界面長波の波数であり, U_{n+1} は次式で与える。

$$U_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{d_{n+1}} \{ F_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_n} - G_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n} \} \dots\dots\dots (8)$$

(2) ケース(2) ($0 < d_{n+1} \leq D < d_n$, 図-2(2))

$x = x_n$ での境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \eta_n &= \eta_{n+1} \\ d_n u_n &= d_{n+1} u_{n+1} \\ u_n + u'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

両海域における表面長波の関係式は式(7)の第1式, 第2式が成り立つ。表面長波と界面長波の関係式は

$$G'_n = F'_n e^{-i \cdot 2k'_n x_n}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{d_n - D}{d_n} \cdot \frac{c_n}{c'_n} \{ F_n e^{-i(k_n + k'_n)x_n} \\ &- G_n e^{-i(k_n - k'_n)x_n} \} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

(3) ケース(3) ($0 < d_n \leq D < d_{n+1}$, 図-2(3))

ケース(2)で d_n と d_{n+1} とを入れ換えたものである。よって, 境界条件式および表面長波と界面長波の関係式は式(9), 式(10)において n を $n+1$, $n+1$ を n と置けばよい。ただし式(10)の x_n はそのままとする。

(4) ケース(4) ($0 < D < d_n$, $d_{n+1} = 0$, 図-2(4))

$x = x_n$ での境界条件式は

$$u_n = 0, \quad u'_n = 0 \dots\dots\dots (11)$$

進行波と逆行波の関係式は

$$F_n = G_n e^{i \cdot 2k_n x_n}, \quad F'_n = G'_n e^{i \cdot 2k'_n x_n} \dots\dots (12)$$

(5) ケース(5) ($0 < D < d_{n+1}$, $d_n = 0$, 図-2(5))

進行波と逆行波の関係式は式(12)で x_n を除いて, n を $n+1$ と置けばよい。

3. 基本式の検討

(1) 表面長波について

a) Lamb の理論解との比較

図-3に示す幅一定で水深のみが $x = x_1 = 0$ で d_1 から d_2 に急変する海域において, 表面長波 f_1 が [1] から [2] へ伝達する場合を考える。この場合, [1] では反射波 g_1 が, [2] では伝達波 f_2 が形式される。各波の振幅 $|f_1|, |g_1|$ および $|f_2|$ は式(7)の第1式, 第2式で $n=1$ とし, $G_2=0, x_1=0$ として次式を得る。

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_1}{c_2} \right) F_2, \quad G_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_1}{c_2} \right) F_2 \dots\dots\dots (13)$$

式(13), 式(6)より入射波に対する伝達波および反射波の波高比は式(14)となり, Lamb の理論解¹⁾で二水域の幅を等しくしたものと一致する。

$$\frac{|f_2|}{|f_1|} = \frac{2}{1 + \sqrt{d_2/d_1}}, \quad \frac{|g_1|}{|f_1|} = \frac{1 - \sqrt{d_2/d_1}}{1 + \sqrt{d_2/d_1}} \dots\dots\dots (14)$$

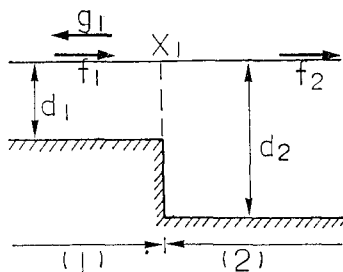


図-3 Lamb の理論解との比較図

b) 首藤・森の解析解との比較

図-4の海底地形において, 表面長波 g_0 が (III) から (I) へと伝達する場合を考える。このとき, (I) で

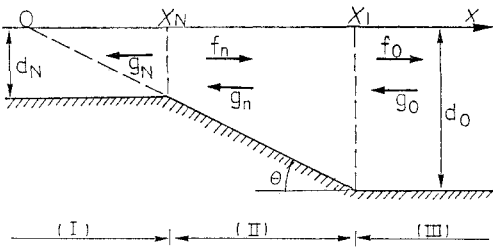


図-4 首藤・森の解析解との比較図

は逆行波 g_N のみが、(II)、(III)では進行波 f_n と逆行波 g_n が存在する。よって海面波形は (I) では g_N で、(II) と (III) では f_n と g_n との和で表わされる。

微小振幅長波に基づく首藤・森の解析解⁴⁾によると、(II)における海面振動振幅は

$$|\eta_n| = |g_0| \sqrt{\frac{x_1}{x_n}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\beta\sqrt{x_N}} \sin 4\beta(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_N})} \quad (15)$$

ここに、 $|\eta_n|$ は $x=x_n$ における海面の振幅、 $|g_0|$ は入射波の振幅、 β は $\beta = \sigma/\sqrt{g\alpha}$ で σ は角周波数、 α は $\alpha = \tan \theta$ で斜面勾配である。

図-5 は式 (7) の第1式、第2式と式 (15) による計算結果を比較したものである。具体的には (II) の斜面を 図-8 に示すように階段地形で 99 ($N=100$) 等分し、 $G_N=1$, $F_N=0$ と与え、式 (7) の第1、第2式より F_n , G_n ($n=N \sim 0$) を求めたのち $x=x_n$ での海面振幅 $|\eta_n|$ を次式で与えた。

$$|\eta_n| = [F_n \bar{F}_n + G_n \bar{G}_n + 2(\bar{F}_n G_n + F_n \bar{G}_n) \cos 2k_n x_n + i \cdot 2(\bar{F}_n G_n - F_n \bar{G}_n) \sin 2k_n x_n]^{1/2} \quad (16)$$

ここに、 $F_n, \bar{G}_n$ は F_n, G_n の共役複素数。

式 (15) の計算は $|g_0|$ の値として上記で得た値 $(G_0 \bar{G}_0)^{1/2}$ を用いた。

図-5 から明らかなように、分布形状については両者

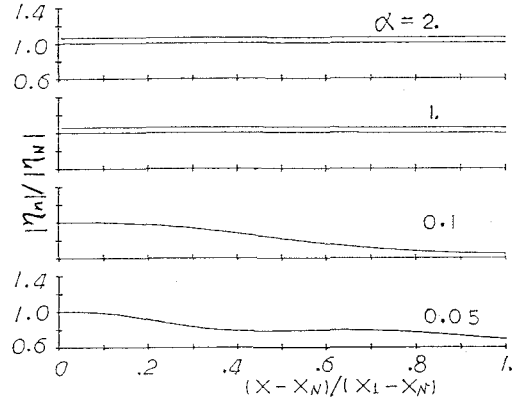


図-5 首藤・森の解析解 (各図とも上の値) との比較 (図-4 で $d_0=40$ cm, $d_N=10$ cm, 周期 5 sec としての海域 (II) における海面振動)

は酷似している。しかし値そのものについては式 (16) は式 (15) に比べて小さく、その差は斜面勾配の急なものほど大きい。

図-6 は種々の斜面勾配での伝達率 ($|g_N|/|g_0|$) と反射率 ($|f_0|/|g_0|$) を示したものである。式 (15) に基づく伝達率は (III) の水深 d_0 と (I) の水深 d_N の比のみで決まり、その結果は $\sqrt{d_0/d_N}$ で、Green の公式と一致する。しかし、この結果は斜面勾配が急になれば反射率は増大し、伝達率は減少するという一般事実と矛盾する。一方、式 (16) の結果は値そのものについては議論できないけれども、上記の一般の傾向をよく表現している。

さらに、式 (16) を用いて斜面勾配 $\alpha=1/20$ 、周期 $T=10, 100$ s について (II) における海面の振動振幅を求めた結果、 (α, T) が $(1/20, 10)$ と $(1/20, 100)$ のものはそれぞれ先に求めた図-5 の $(1/10, 5)$ と $(1/1, 5)$ に一致した。このことは周期の長い波ほど斜面勾配の影響を強く受けることを意味し、この特性は内部波についても当てはまる⁵⁾。

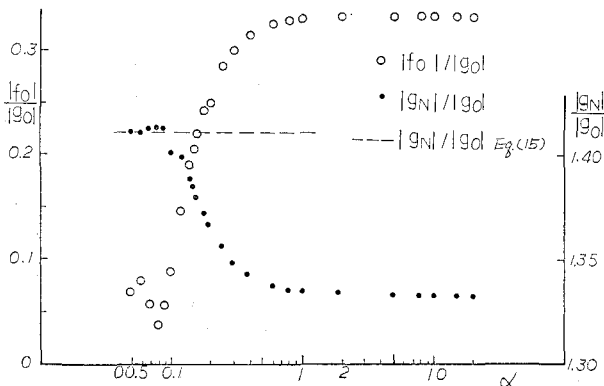
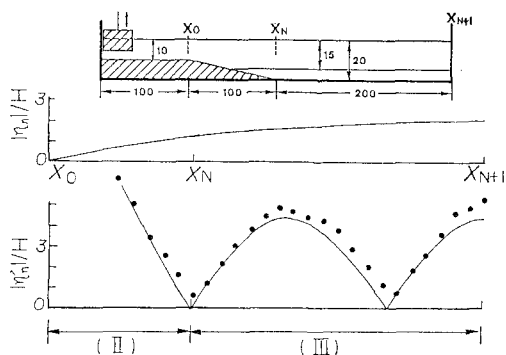


図-6 図-4の海域で種々の $\alpha (= \tan \theta)$ に対する伝達率と ($|f_0|/|g_0|$) 反射率 ($|f_0|/|g_0|$)、ただし $d_0=40$ cm, $d_N=10$ cm, $T=5$ s



図—9 図—8に示す海域の界面振幅、ただし H は (Ⅲ) における波高、 $|\eta_n|$ は海面振幅、 $|\eta'_n|$ は界面の振幅、— は計算値、• は実験値 (周期 9.6 s)

表面の振幅は式 (16) で、界面の振幅は式 (16) で F_n を F'_n 、 G_n を G'_n 、 k_n を k'_n で置換すればよい。

(2) 実験値との比較

図—9 に界面振幅の縦断分布図を示す。上・下層の流体にはそれぞれ石油と淡水を使用した。図中の水槽左端の造波機前には消波材を置き、造波機からの反射が小さくなるようにした。その他の実験条件は図中に示す。

水深が一定である (Ⅲ)、斜面領域である (Ⅱ) と、計算結果は実験結果をよく表わしている。

5. あとがき

水深が階段状に変わる二海域間での表面長波と界面長波の関係式を導き、限られたケースについてではあるけれども、理論解、解析解と比較しその妥当性を確めた。さ

らに、これら関係式に基づき、水深が連続的に任意に変わる2次元二層海域において、表面長波によって励起される界面長波の算定法を述べ、計算結果の妥当性を実験で検証した。

界面長波の発生機構、発達の難易、特性についての主な事項を列記すると

① 図—2 の Case (4), (5) では界面長波は表面長波によって励起されない。

② 図—2 の Case (1) で $d_n \neq d_{n+1}$ であれば、表面長波が完全重複波となって $x=x_n$ で腹とならない限り ($u_n \neq 0$) 界面長波は必ず励起される。

③ 表面長波および界面長波とも、周期の長い波ほど水深変化の影響を強く受ける。

本論文では表面波、界面波とも長波として取り扱った。潮汐が支配的な湾や海域においては界面波も長波で近似できる場合が多く、本論算定法の応用は広い。

参考文献

- 1) Lamb: Hydrodynamics, 6th ed., Dover, pp. 262~263, 1932.
- 2) Le Méhauté, B.: Periodical Gravity Waves on a Discontinuity, Proc. ASCE, Vol. 86, HY9, pp. 11~41, 1960.
- 3) K. Takano and N. Iida: Generation of Internal Waves by a Abrupt Change of Depth, La mer, 7, pp. 32~42, 1969.
- 4) 首藤伸夫・森 龍三: 浅海における波と地形, 第 24 回海岸工学講演会論文集, pp. 20~24, 1977.
- 5) Cacchione, D. and Wunsch, C.: Experimental study of Internal Waves over a Slope, J. of Fluid Mech. 66, pp. 223~239, 1974.