

直接数値積分による波の場の解析

西村 仁嗣*・丸山 康樹**・平口 博丸***

1. 緒 言

浅海域における波と流れの場を計算することは、海岸工学上の基本的な命題である。とくに、radiation stressの概念の確立によって、海浜流計算の骨格が定まった現在、波の場の一般的な計算法の確立が当面の急務となっている。任意の底面地形および水域境界を前提として、屈折、回折、反射、さらには砕波を含む波の浅水変形を総合的に論じる唯一の手段は、連続式と運動方程式の系に立ち戻って解析を行なうことである。2次元化した基礎方程式の直接数値積分の可能性を示唆した伊藤ら^{1),2)}の業績はその意味で評価すべきものであり、ここでも全く同様の方針に従うこととする。本研究の主眼は基礎方程式系にさまざまな角度から検討を加えることによって波の変形より精密な表現を図り、併せてその限界を論じることにある。

2. 基礎方程式系

3次元の流体運動解析のための連続式と線形化された運動方程式の系は次のように書かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + w_z = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$\mathbf{v}_t + \nabla p / \rho = 0 \quad \text{.....(2)}$$

$$w_t + g + p_z / \rho = 0 \quad \text{.....(3)}$$

ここに、 t は時間、 z は静水面から鉛直上向きにとった座標で、これらを添字として用いた場合は偏微分を表わすものとする。 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平面内の直交座標系 (x, y) による微分演算子、 $\mathbf{v} = (u, v)$ および w はそれぞれ水粒子速度の水平および鉛直方向成分、 p は圧力、 ρ は密度、 g は重力の加速度である。

波動を考える場合、同じく振幅について2次の項を無視することによって境界条件は次のように与えられる。

$$z=0 \quad \text{で} \quad p = \rho g \eta \quad \text{.....(4)}$$

$$z=0 \quad \text{で} \quad w = \eta_t \quad \text{.....(5)}$$

$$z=-h \quad \text{で} \quad w = \mathbf{v} \cdot \nabla h \quad \text{.....(6)}$$

ただし、 η および h はそれぞれ静水面から測った水位

上昇量ならびに水深である。

式(1)~(3)から速度項を消去すれば圧力 p に関する Laplace 方程式

$$\nabla^2 p + p_{zz} = 0 \quad \text{.....(7)}$$

を得る。圧力分布が

$$p/\rho g = -z + f(h, z) \cdot \eta(x, y, t) \quad \text{.....(8)}$$

なる分離形で与えられるものとし、さらに f が h の弱い関数であるとすれば、

$$-\nabla^2 \eta / \eta = f_{zz} / f = k^2$$

となり、境界条件(4)および(6)から近似的に

$$f = \cosh k(z+h) / \cosh kh \quad \text{.....(9)}$$

を得る。ここに、 k は波数である。水深の変化が無視できない水域を考える場合には、 f は明らかに x, y の関数であり、この形は底面条件(6)を満たさないことになる。

Biesel³⁾ は一様勾配斜面上の進行波を摂動法によって解析し、振幅 a および底面勾配 β に関してそれぞれ1次の order までの解を求めている。これによれば、 β について0次の正弦波に対し、1次の補正項は $\pi/2$ の位相差を有するもので、その振幅は極大点で $0.3\beta a$ 程度ときわめて微小である。従って、式(8)および(9)は浅海波動に伴う圧力分布のかなり一般的な近似と考えられる。

3. 方程式系の2次元表記

本節においては、方程式系を水平面内の表記に改めることを考える。非線形項まで含めた表面条件式および底面条件式(6)を用いることにより、連続式(1)は鉛直方向に底面から水面まで厳密に積分され、

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \eta_t = 0 \quad \text{.....(10)}$$

となる。ここに、線流量ベクトル $\mathbf{q} = \int_{-h}^{\eta} \mathbf{v} dz$ である。

同様に運動方程式(2)を鉛直方向に積分し、式(8)および(9)の表示を用いれば、

$$\mathbf{q}_t + \nabla(C^2 \eta) - g \eta \nabla h / \cosh kh = 0 \quad \text{.....(11)}$$

あるいは

$$\mathbf{q}_t + C^2 \nabla \eta + g \eta \nabla h \cdot \mathbf{G} = 0 \quad \text{.....(12)}$$

ここに、

* 正会員 工博 筑波大学助教授 構造工学系

** 正会員 工修 電力中央研究所 土木研究所環境部

*** 正会員 工修 電力中央研究所 土木研究所環境部

$$G=1/\cosh kh-1/n$$

$$C^2=(g/k) \tanh kh$$

$$n=1/2-kh/\sinh 2kh$$

である。

式(10)および(12)から q を消去すると、

$$\eta_{tt}=\nabla \cdot (C^2 \nabla \eta - g \eta \nabla h \cdot G) \quad (13)$$

底勾配が十分小さいものとし、これを無視するならば式(12)および(13)はそれぞれ次のように簡略化される。

$$q_t + C^2 \nabla \eta = 0 \quad (14)$$

$$\eta_{tt} = \nabla \cdot (C^2 \nabla \eta) \quad (15)$$

$f \approx 1$ とする長波条件下で水深変化に関係なく上式が成立することは自明である。

一方、式(7)に鉛直分布関数 f を乗じた後、これを鉛直方向に積分すれば Berkhoff 型の方程式^{4),5)}

$$\eta_{tt} = (1/n) \nabla \cdot (n C^2 \nabla \eta) \quad (16)$$

が得られる。これは式(10)および(12)と類似の連立方程式

$$(1/n) \nabla \cdot (n q') + \eta_t = 0 \quad (17)$$

$$q'_t + C^2 \nabla \eta = 0 \quad (18)$$

と等価であるが、この場合 q' は式(10)の線流量 q と同じものではない点に注意せねばならない。

一般に、式(8)の形の圧力分布を仮定すれば、鉛直方向の運動方程式(3)および表面条件式(5)より

$$\eta_{tt} = (g/f_z|_{z=0}/f_{zz}) \nabla^2 (f \eta) \quad (19)$$

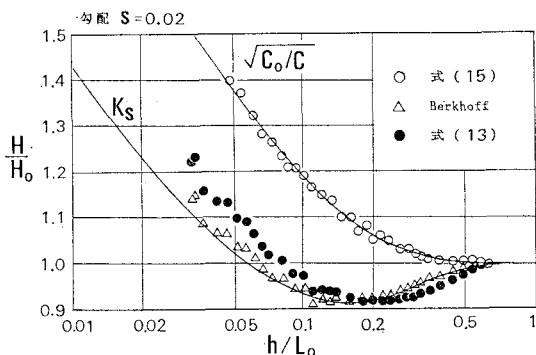
ここで、例えば式(9)のように f を x, y, z の関数として与えた場合、上式が解を持ち得ないことは明らかである。しかし、鉛直方向に任意の重みを付けて上式を積分すれば、 η に関する平面内の方程式が導かれ、これらはそれぞれに解を有する。式(13), (15), (16)等はいずれもこうした意味合いを持つものであり、またいずれも出発点において振幅と底面勾配の積の order の省略を含んでいるので、個々の精度を比較することは困難である。

4. 浅海域における波の変形

(1) 屈折および浅水変形

屈折に伴う波向の変化は運動学的な問題であり、進行する個々の波の位相関係を $\theta(x, y, t)$ とするとき、波数ベクトル k が $k = \nabla \theta$ によって与えられる限りにおいて、屈折の関係式 $\nabla \times k = 0$ は常に満たされる。式(10)および(12)の数値積分によって得られる線流量ベクトル q の方向が通常の波向線法で計算した波向と殆んど完全に一致することは、実算の結果を通じて確認されている。

水深変化に伴う波高の変化を調べるために、緩勾配の平行等深線海浜に斜め入射する波の変形を考える。等深線の方に y 軸をとり、その方向に現象が一樣であることから、



図一 波の浅水変形

$$\eta = a(x) \exp [i \{ l(x) \cdot x + m y - \omega t \}] \quad (20)$$

なる解を想定する。 l を x の弱い関数として、これを式(15)に代入すると、虚数部の方程式より

$$l C^2 a^2 \propto C \cos \alpha \cdot a^2 = \text{const.} \quad (21)$$

の関係を得る。ここに、 α は波向線が x 軸に対してなす角であり、従って $\cos \alpha$ は屈折による波向線間隔の変化が波の振幅に及ぼす効果を表わす因子である。波が直角入射する場合には水深変化に伴う浅水変形のみが生じ、この関係が $C a^2 = \text{const.}$ で与えられることになる。これは通常用いられるエネルギー・フラックスの連続式に比して、振幅 a の増大率が因子 $\sqrt{n}$ の分だけ過大評価されることを示している。伊藤ら²⁾は式(15)に基づいて波の計算を行なった後、補正を加えることによってこの問題を解決する方法を提案しており、これは事実良好な結果を与えるようである。

一方、Berkhoff の提案した方程式(16)について同様の考察を加えると、

$$\ln C^2 a^2 \propto n C \cos \alpha \cdot a^2 = \text{const.} \quad (22)$$

となって、上記の問題は生じない。この点について Berkhoff は、鉛直方向の積分に先立ち、圧力もしくは水平流速分布の重みを付けることによってエネルギーの保存性を確保したものとしている。しかし、その誘導の過程を見ると、連続式に重みを付けた結果になっており、これは十分な説明とは言い難い。むしろ式(16)の有用性は解の挙動から判断すべきものである。

それぞれの方程式を数値積分し、1/50 勾配の一樣斜面上における浅水変形の状況を計算した結果が図一に示されている。これは本項の議論を実算例によって追認したものである。数値計算によって得られた波高比はいずれの場合にも斜面からの反射波のためにうねりを呈している。図中の K_s はいわゆる浅水係数であるが、式(13)から計算された波高変化はいく分これと異なる傾向を示している。

(2) 反射および回折

前節で論じた各種の方程式は底面勾配の効果を十分に

考慮したものではない⁶⁾。底面条件(6)は連続式の積分に際しては完全な形で用いられており、従って、流水断面面積の変化に伴う波の反射はほぼ満足すべき形で計算される。しかしながら、運動方程式の取り扱いにおいては式(8)および(9)で表わされる圧力分布を前提としているので、底面の傾斜の力学的効果による波の反射はほとんど除外したことになる。とくに局地的に急勾配斜面が存在するような場合には、数値計算における計算格子間隔のとり方によって差分近似の精度も問題となる。

この種の方程式に基づく数値計算は、一般に空間的な積分を時間的に積み上げる形で行なわれるが、実際には式(13)、(15)あるいは(16)等を遷移波の解析に適用することはできない。例えば、静水状態の水域に進入する波の計算を行なう場合、先端域における波高の低減といった現象は全く生じない。言い換えれば、見かけ上波動エネルギーの伝播速度が常に位相速度と一致するため、境界で与えた仕事量よりも水域内に蓄積されるエネルギーのほうが大きくなるということであって、これは圧力分布を外的に規定したことによって生じる一つの矛盾である。しかし、定常状態の波の場を求める際には、平衡状態に至るまでの遷移過程の計算が必然的に省かれることは却って好都合である。

構造物等の全水深境界は上記とは全く異なる問題であり、これらに伴う波の回折ならびに反射に関しては、流量条件等を適宜に与えれば、いずれの方程式によってもほぼ完全な計算がなされる。一例として一様水深の水域内に半無限堤を想定し、これに直角入射する波の回折

と反射を試算した。式(13)、(15)および(16)を用い、同一条件下でそれぞれ数値積分を行なったが、得られた結果相互間に有意な差異は認められなかった。堤の前後2本の測線に沿う波高分布が図-2中でSommerfeldの解析解と比較されている。前面の重複波域で両者間によく分の差が生じているが、その理由は明らかではない。

(3) 砕波後の波の減衰

波高を H 、実質的な水深を h とするとき、砕波基準を与える最も簡単な経験式は

$$H = \gamma h \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。 γ は定数とされるが、実際にはとくに重合波の場ではその値は必ずしも一定ではない。砕波後の波高変化に関するわれわれの見解は必ずしも充分なものではないが、一様斜面上では式(23)が波高分布の良好な近似となることが知られている⁷⁾。いま、 x 軸方向に進行する微小振幅の長波

$$\eta = (H/2) \cos l(x - Ct), \quad q = (C\eta, 0) \quad \dots\dots\dots (24)$$

を考える。ここで、波高 H が波の進行とともに漸変するものとすれば、これらの表示を式(14)左辺に代入することにより残差

$$H_x \cdot C |q|/H$$

を得る。さらに、式(23)を考慮すれば、式(12)もしくは(14)の左辺に

$$\beta Cq/h \quad \dots\dots\dots (25)$$

なる線形の減衰項を追加することによって、砕波後の波の変形が表現されるとの結論に達する。これは主として砕波帯内で卓越する乱れに起因する力に対応する項と考えられる。上述の波高分布はもとより一般的なものではなく、また式(25)の形の解は連続式にも類似の補正項を加えない限り成立しない。このことから上式中の減衰係数 β は砕波帯内の平均底面勾配の order の値をとると思われるものの、より詳細な検討は今後の研究にまたねばならない。

(4) 流れの効果

radiation stress に起因する流れと平均水位の変動は、平均流に関する連続式および運動方程式に基づいて解析される。こうした平均流が存在する場合、とくに位相速度の変化という形で波の場もその影響を受けることになる。平均流速を $\bar{v}$ とするとき、具体的には運動方程式(2)および表面条件式(5)にそれぞれ移流項の一部を残し、

$$v_t + (\bar{v} \cdot \nabla) v + Fp/\rho = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

および

$$z=0 \quad \text{で} \quad w = \eta_t + \bar{v} \cdot \nabla \eta \quad \dots\dots\dots (27)$$

と書き改める必要がある。一様流速 $\bar{v}$ を既知量とすれば、これによって方程式系が線形性を失うわけではないので、一様水深場における波動解は容易に得られる。解は見かけ上通常の微小振幅波とほとんど変わらないが、

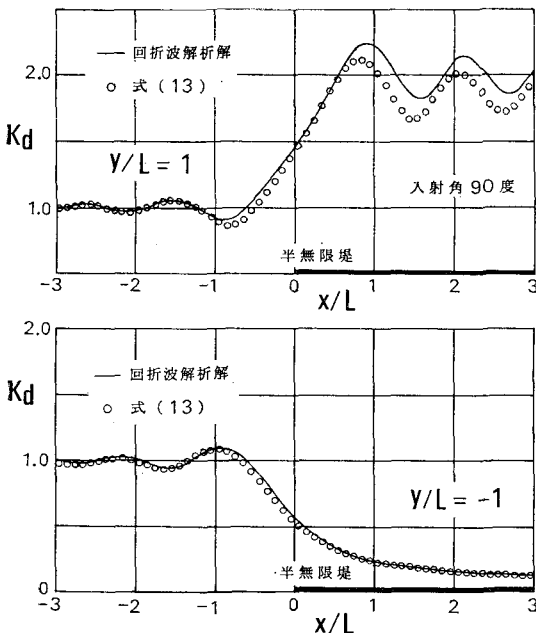


図-2 回折および反射による波高分布

位相速度が変化し、波数の算定に用いる分散関係式は

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh} + k \cdot \bar{v} \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここに、 ω は角周波数である。

この場合、式 (11) に対応する方程式は

$$q_t + (\bar{v} \cdot \nabla) q + F(C^2 \eta) - g \eta F h / \cosh kh = 0 \dots (29)$$

であり、一様流速が水粒子速度の振動成分と同一の order の量であれば、式 (26) の鉛直方向積分に際して現われる底勾配の項はそれほど重要ではない。

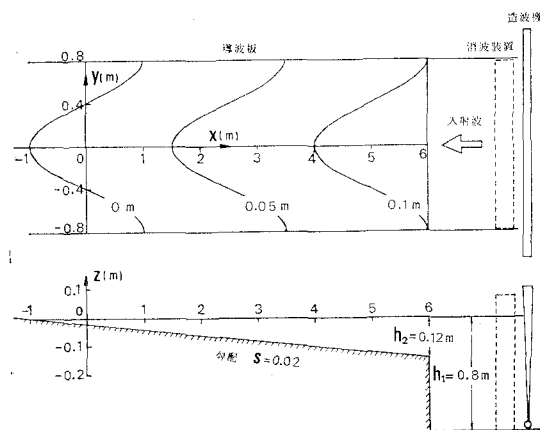
5. 波動場の実算例

以上の議論を総括的な視点から検証する目的で、図—3 に示したような正弦波平行等深線海浜を対象とした水理模型実験を実施した。図のように x, y 軸を選ぶと、水深変化は

$$h(x, y) = 0.02 \left\{ x + \cos \left(\frac{2\pi y}{1.6} \right) \right\} \quad (\text{単位: m}) \dots\dots\dots (30)$$

である。この水深変化が汀線方向に規則的に繰り返す状況を想定し、現象の対称性を考慮して、図のように導波板を設置した。 x 方向の斜面勾配 s は現地海岸に近い値として、 $s=0.02$ と比較的緩く設定したが、一方で造波機設置水深を充分確保する必要があるため、沖側の地形は階段状とした。入射波の周期は 1.2 sec, 入射角は海浜模型に直角方向とした。波は浅水域で両側壁に向かって屈折するので、中央域の波高は波の進行とともに次第に減少する。この波高変化の結果として、最大流速 15 cm/sec 程度の一對の循環流が観測された。

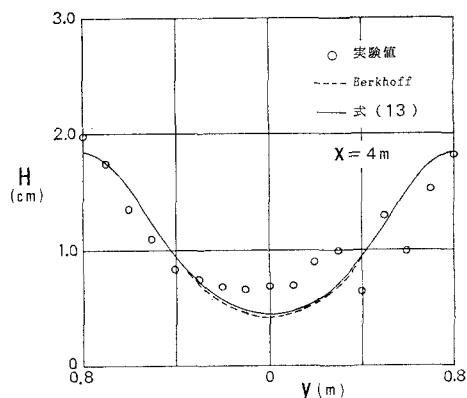
一方、数値計算は式 (10) および (11), 式 (17) および (18) をそれぞれ連立させる形で行った。前者については砕波帯内で式 (25) の形の減衰項をも考慮した。ただし、砕波点は実験波高の岸沖方向変化から判定して、これを計算に用いた。明瞭な砕波点は両側の導波板から約 20 cm 程度の範囲までに見られ、 $|y|=0.7$ m の場合



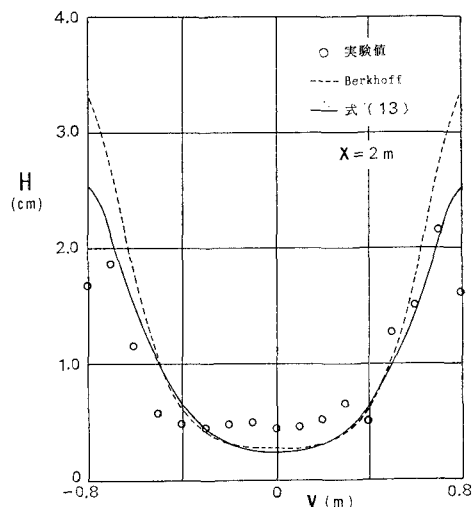
図—3 海浜模型

は $x_b=2.3$ m, $|y|=0.8$ m の場合は $x_b=2.5$ m であった。この場合の $\gamma (=H_b/h_b)$ は 0.88~0.94 程度で、単一進行波の場合より若干大きくなっている。これは波の重合効果が表われたためと思われる。なお、水路の中央部では浅水効果が屈折効果で打ち消されるため、砕波は汀線の極近傍に至るまで生じなかった。

差分計算手法としては、伊藤・谷本¹⁾と同様に leap-frog 法を採用し、計算格子間隔は $\Delta x = \Delta y = 5$ cm, 時間間隔は $\Delta t = 0.01$ sec として、第 3 波が計算領域の岸側端に到達するまでの計算を行った。沖側の段差を計算領域から除外するため、計算上では $x > 6$ m の領域は一定水深 $h=12$ cm とし、 $x < 1.5$ m の領域も一定水深 $h=3$ cm とした。この一定水深部に設けた岸側および沖側の境界は谷本¹⁾にならって無反射性境界とした。計算は無次元波高 H/H_i について行ない、 $x=6$ m の断面を通過するエネルギーフラックスを実験値と等置することにより、入射波高 $H_i=1.06$ cm の結果を得た。この計算では波



(1)



(2)

図—4 波高の横断方向分布

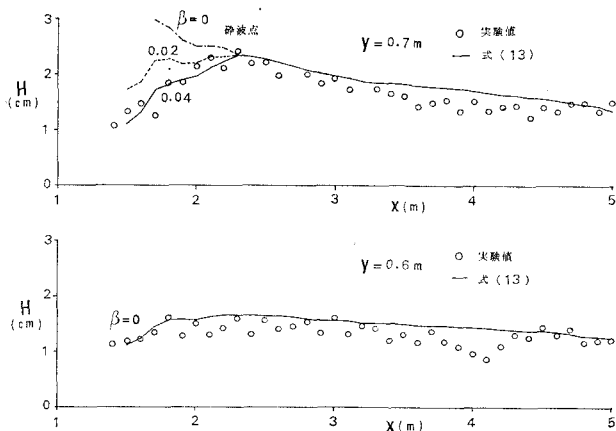


図-5 波高の縦断方向分布

と流れの干渉は考慮されていない。

図-4 は y 軸方向の波高分布について、実験値と計算値を比較したものである。 $x=4$ m の断面は砕波前の領域にあるが、 $X=2$ m の断面では $|y|=0.7\sim 0.8$ m の範囲が砕波後の領域となっている。二種の計算結果はほとんど変わらず、いずれも全般的に実験値と良く一致している。ただし、式 (13) に対応する計算では、砕波後の領域で減衰係数として $\beta=0.04$ がとられている。実験では両側端および中心線付近にそれぞれ向岸流および離岸流が生じており、とくに波高の大きい側壁近傍での波の挙動はかなり複雑である。側壁からある程度離れた領域では、上述の減衰項により実験における砕波後の波高低下を再現することが可能である。図-5 の例によれば、 $y=0.7$ m の測線上で、減衰項を $\beta=0.04$ と底面勾配のほぼ2倍にとった場合に、計算値と実験値の間に良好な符合が見られている。

6. 結 語

任意地形の水域における波の変形は、線形の偏微分方程式系の数値積分によりかなり完全な形で解析される。この計算法をより一般的なものとする上で、底面の傾斜による波の反射の十分な評価、減衰係数の普遍的表示の追究、および汀線近傍の水理現象の考慮等が残された課

題となっている。

なお、本研究の遂行に当たり、数値計算に関しては開発計算センター 定森良夫氏の協力を得た。

参 考 文 献

- 1) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—，第18回海岸工学講演会論文集，pp. 67~70，1971。
- 2) 伊藤喜行・谷本勝利：波向線交差領域での波の屈折—数値波動解析法の応用(2)—，第19回海岸工学講演会論文集，pp. 325~329，1972。
- 3) Biesel, F.: Study of wave propagation in water of gradually varying depth, U.S. Nat. Bur. Stds. Circ. 521, Gravity Waves, pp. 243~253, 1952.
- 4) Berkhoff, J. C. W.: Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp. 471~490, 1972.
- 5) Berkhoff, J. C. W.: Mathematical models for simple harmonic linear water waves—Wave diffraction and refraction, Delft Hyd. Lab. Pub. No. 163, 103 p., 1976.
- 6) Battjes, J. A.: Refraction of water waves, Proc. ASCE, Vol. 94, WW4, pp. 437~451, 1968.
- 7) 磯部雅彦・西村仁嗣・柄登志彦：不規則波の砕波変形に関する実験的研究，第27回海岸工学講演会論文集，pp. 139~142，1980。
- 8) 谷本勝利・小舟浩治：数値波動解析法による港内波高分布の計算，第22回海岸工学講演会論文集，pp. 249~253，1975。