

波と流れの共存場における底面乱流境界層に関する研究

浅野敏之*・岡本 浩**・岩垣雄一***

1. 緒 言

沿岸海域においては波浪とともに、波浪が誘因となって生じる海浜流が存在する。したがってそこでの底質の移動機構を解明するためには、波と流れの共存場における底面近傍の流体の挙動を明らかにする必要がある。また海浜流の発生理論を精密化するうえでも、波と流れの共存場における底面摩擦力についての正確な評価が不可欠である。

波と流れの共存場においては、底面近傍には一般に乱流境界層が形成されると考えられる。振動流場や波動場における乱流境界層を取扱った研究として、梶浦¹⁾や野田²⁾の研究がある。彼らの研究に共通するのは、境界層を内層・中間層・外層の3層に分割していることである。ここで、内層は層流底層と呼ばれ、実際にもそこでの流れは層流状態であると考えられるが、中間層と外層に区分したのは物理的な観点よりも、むしろ理論の取り扱い上の理由のためであろうと思われる。すなわち、このように区分しないと、外層の外縁において水粒子速度が非粘性解と一致し、かつ、せん断応力が0となるという2つの条件を満足させることができないからである。

波と流れの共存場における乱流境界層を取扱った研究には、Grant-Madsen³⁾の研究とその精密化を行った田中・首藤^{4),5)}の研究がある。Grantらの研究は、波から流れおよび流れから波への相互干渉を考察した最初の本格的な研究であるが、境界層を単層モデルとしているために、上述の2つの境界条件を両方同時に満足させることはできず、その外縁位置については、波動場における梶浦の考え方を準用して、流れによる変化を無視している。田中ら⁵⁾は梶浦にならって中間層と外層の区分を導入しているが、この考え方はもともとはMellor-Gibson⁶⁾らの定常流に対する平板乱流境界層の知見を波動場に準用したものである。両者の研究の目的は、波と流れの構成条件が変わることによる共存場の乱流境界層の特性の変化を解明することにあつたのであるから、こ

のように定常流の知見をそのまま非定常な共存場に導入することは疑問に思われる。

さらに両者の研究では、境界層方程式に移流慣性項を考慮していないという問題点も存在する。すなわち、波と流れの共存場の問題においては、移流慣性項中の $U\partial u/\partial x$ の項は、局所慣性項 $\partial u/\partial t$ と同じ一次のオーダーの項とみなすことができる。共存場における波動のポテンシャル解は、 $U\partial u/\partial x$ の項を考慮して得られるものであり、境界層方程式の解はその外縁においてこれのポテンシャル解と接続するものであるから、この項を含めて解析する必要があると考えられる。

本研究では、以上の問題点を踏まえ、共存場の乱流境界層方程式の解法において、新たな取扱いを試みた。これは上記の水粒子速度とせん断応力についての2つの条件を満足する境界層外縁位置を未知量とする、未定境界値問題として解く方法であって、この解法には不変埋込み法と呼ばれる手法を適用した⁷⁾。この理論から境界層厚、摩擦係数等の水理量を計算し、その特性を検討した。

一方、共存場における乱流境界層内の水粒子速度を測定した例としては、Bakker-van Doorn^{8),9)}、Kemp-Simons¹⁰⁾の研究があるのみで、実験的な知見も不十分な現状である。本研究では水槽底面に人工粗度を付けて、底面近傍の水粒子速度をレーザードップラー流速計により測定し、その水理特性を実験的に明らかにした。また、上述の理論的取扱いによって求められる計算値を実験値と比較することにより、この取扱い方法の妥当性を検討した。

2. 未定境界値問題としての乱流境界層方程式の解法

2.1 基礎方程式

渦動粘性係数 ϵ をGrant-Madsenと同様に、波動境界層内外で区別して次式で与える。

$$\epsilon = \kappa |u_*^*| z \quad z > \delta_w \cdots \cdots (1)$$

$$\epsilon = \kappa |u_{cw}^*| z \quad z < \delta_w \cdots \cdots (2)$$

ここに κ はカルマン定数、 u_*^* 、 u_{cw}^* はそれぞれ流れおよび共存場の摩擦速度、 δ_w は波動境界層の厚さである。波動境界層内のせん断応力は、

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工修 飛島建設(株)

*** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

$$\tau_w = \rho \kappa u_{cw}^* z \cdot \partial u / \partial z \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau_c = \rho \kappa u_{cw}^* z \cdot \partial U / \partial z \dots\dots\dots (4)$$

で示される波によるせん断応力 τ_w と流れのせん断応力 τ_c の和で表わされる。また共存場の摩擦速度 u_{cw}^* は底面せん断応力の一周期間の最大値 $\tau_{cw, \max}$ で与える。すなわち、

$$\begin{aligned} \tau_{cw, \max} &= \tau_c + \tau_w, \max = \rho u_{cw}^{*2} \\ &= \rho \kappa u_{cw}^* z \left. \frac{\partial(u+U)}{\partial z} \right|_{\max} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

式 (4) より波動境界層内の流れの流速分布として次式が得られる。

$$U = \frac{u_c^{*2}}{\kappa u_{cw}^*} \ln \frac{z}{z_0} \quad z < \delta_w \dots\dots\dots (6)$$

ここに z_0 は積分定数で、完全粗面のときには、粗度高さに等しくなる。以下では便宜的に粗度高さと称しておく。波動境界層外縁位置における流れの流速 U_p は上式において $z = \delta_w$ と置けばよい。波動境界層の外部領域における流れの流速分布は、式 (1) から次式で表わされる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{u_c^*}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta_w} + U_p = \frac{u_c^*}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta_w} + \frac{u_c^{*2}}{\kappa u_{cw}^*} \ln \frac{\delta_w}{z_0} \\ &\quad z > \delta_w \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

波動成分に対する境界層内水粒子速度を与える式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_p - u)}{\partial t} + U_p \frac{\partial u_p}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_w}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa u_{cw}^* z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに u_p は境界層外縁における波の水粒子速度であり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u_p &= \hat{u}_p \cos(kx - \sigma t) \\ &= \frac{H}{2} (\sigma - k\bar{U}) \frac{\cosh k\delta_w}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \dots\dots (9) \end{aligned}$$

上式で H は波高、 σ は角周波数、 k は波数、 h は水深である。

2.2 境界層方程式の解法

境界層内での波動成分 u を次式で表現する。

$$u = A(z) \cos(kx - \sigma t) + B(z) \sin(kx - \sigma t) \dots\dots (10)$$

上式を式 (8) に代入し、

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} dA/dz \\ dB/dz \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

と置き換えると次式を得る。

$$\frac{d\bar{\xi}}{dz} = \bar{\eta}, \quad \frac{d\bar{\eta}}{dz} = D\bar{\eta} + E\bar{\xi} + F \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{z}, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{\sigma - kU}{\kappa u_{cw}^* z} \\ \frac{\sigma - kU}{\kappa u_{cw}^* z}, & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma - kU_p}{\kappa u_{cw}^* z} \hat{u}_p \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

式 (12) の境界条件は次式である。

$$z = z_0 \text{ で, } \bar{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$z = \delta_w \text{ で, } \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

ここで δ_w は未知量であり、式 (15) は未定境界値問題であることを示す。式 (12) は次式の特性曲面の式となっており、次式がこの問題の不変埋込み方程式となる。

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta} (D\bar{\eta} + E\bar{\xi} + F) = \bar{\eta} \dots\dots\dots (16)$$

式 (12) は線形であるから、 $\bar{\xi}$ は次式のように表わすことができる。

$$\bar{\xi}(z, \eta) = G(z)\eta + H(z) \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) を式 (16) に代入して整理すると、次式を得る。

$$\frac{dG}{dz} + GD + GEG = I \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{dH}{dz} + GEH + GF = O \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 I は 2 行 2 列の単位行列、 O は 2 次元のゼロベクトルである。また境界条件式 (14) から、

$$G(z_0) = 0, \quad H(z_0) = O \dots\dots\dots (20)$$

ここに O は、2 行 2 列の零行列である。式 (20) を初期条件として式 (18), (19) を解けば、 $G(z)$ と $H(z)$ を求めることができる。

結局、式 (17) を変形した次式が成立するような z を求めれば、これが求める境界層外縁位置 δ_w である。

$$\eta(z) = G^{-1}(z) \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u}_p \\ 0 \end{pmatrix} - H(z) \right\} = O \dots\dots\dots (21)$$

このようにして得られる δ_w を用いて、 $z = \delta_w$ における境界条件式 (15) で、逆に $z = z_0$ まで式 (12) を解けば、目的とする解が得られる。

さて、流れ成分に対する摩擦速度 u_c^* は、流れのみの場合の流速分布から求められるが、これが得られない場合でも共存場における流れの断面平均流速 $\bar{U}$ がわかれば、波動境界層内外の流れの流速分布を示す式 (6), (7) を積分して $\bar{U}$ を求めることにより、2 次方程式の解として次式で計算できる。

$$u_c^* = \frac{-u_{cw}^* \alpha_2 + \sqrt{u_{cw}^{*2} \alpha_2^2 + 4\bar{U} \kappa u_{cw}^* (h - z_0) \alpha_1}}{2\alpha_1}$$

$$\text{ただし, } \alpha_1 = h \ln \frac{\delta_w}{z_0} - (\delta_w - z_0)$$

$$\alpha_2 = h \ln \frac{h}{\delta_w} - (h - \delta_w) \dots\dots\dots (22)$$

一方、共存場の摩擦速度 u_{cw}^* は式 (5) で定義されるが、式 (6) を用いて変形すると次式のようになる。

$$u_{cw}^{*2} = \kappa u_{cw}^* z_0 (\partial u / \partial z)_{z=z_0} + u_{cw}^{*2} \dots\dots\dots (23)$$

上式は、 u_{cw}^* についての2次式であり、 $(\partial u / \partial z)_{z=z_0}$ がわかれば u_{cw}^* は求められる。しかし $(\partial u / \partial z)_{z=z_0}$ は解として得られるものであって未知量である。従って、上述の手法により境界層内の波動解を求めるためには、まず u_{cw}^* に適当な値を仮定し、未定境界値問題を解いて $(\partial u / \partial z)_{z=z_0}$ の値を求め、これを式 (23) に代入して次のステップの u_{cw}^* を計算する。この手順を u_{cw}^* の値が十分収束するまで繰り返すことになる。

また、波動境界層厚 δ_w は物理的には $\tau_{w, \max} = 0$ となる高さと考えられるが、実際には z が無限大でない限り0とならない。ここでは δ_w として $\tau_{w, \max}$ が底面でのせん断応力の最大値 $\tau_{w, \max}|_{z=z_0}$ に比べて無視しうほど小さくなる高さで定義する。今回の計算では $\tau_{w, \max}|_{z=z_0}$ の0.01倍となる高さとした。この値を変化させると δ_w の値は当然変化するが、境界層方程式の計算を開始する位置が異なるだけであるから、境界層内部の水粒子速度やせん断応力には全く影響しない。

3. 計算結果および考察

前節で示した乱流境界層の新しい解法の妥当性を検討するため、いくつかの境界層の特性水理量について、流れによる変化を調べるとともに、Grant らの理論による結果と比較した。表-1 は波のみの場合に、以下に示す

表-1 境界層の水理特性量に対する著者らと Grant ら³⁾の理論による計算結果の比較(波動場)

		f_{cw}	u_{cw}^* (cm/sec)	δ_w (cm)	θ (rad.)
CASE-1	Authors	0.097	5.68	3.15	0.55
	Grant-Madsen	0.098	5.68	2.89	0.52
CASE-2	Authors	0.139	5.58	2.45	0.58
	Grant-Madsen	0.140	5.59	1.78	0.55

2つの計算条件に対する共存場の摩擦係数 f_{cw} 、摩擦速度 u_{cw}^* 、境界層厚 δ_w および底面せん断応力の境界層外縁水粒子速度に対する位相の前進 θ の計算結果を示したものである。計算条件は両ケースとも水深 $h=30$ cm、波高 $H=10$ cm、粗度高さ $z_0=0.1$ cm で、波の周期 T は CASE-1 が 2 sec、CASE-2 は 1.25 sec とした。また摩擦係数 f_{cw} の定義は次式のとおりである。

$$\tau_{cw, \max} = \rho u_{cw}^{*2} = (1/2) \rho f_{cw} u_p^2 \dots\dots\dots (24)$$

表より f_{cw} 、 u_{cw}^* 、 θ についての著者らの理論的取扱いによる結果は、Grant らの理論値とよく一致することがわかる。しかし δ_w については、Grant らは境界層の代表スケール $l = \kappa |u_{cw}^*| / \sigma$ の2または4倍(本計算においては $\delta_w = 4l$ とした)に仮定しているのに対し、著者らの取扱いでは δ_w は、前述のようにせん断応力が底面せん断応力の1%に減少する高さで定義し、未定境界値問題として解いた結果であって、両者の結果は異なることが

わかる。

一方、共存場においては、著者らは移流慣性項を考慮しているのに対し、Grant らの理論はこれを考慮していないために結果に差異が生じる。しかし著者らの取扱いで移流項を除去して計算すると、 δ_w を除く水理量は Grant らの理論値とよく一致することがわかった。

次に上述の4つの水理量の流れによる変化について考察する。図-1 は f_{cw} についての結果で、横軸は流れの断面平均流速 $\bar{U}$ と、流れを考慮した分散方程式から得られる波速 c との比である。 $\bar{U}/c$ の絶対値が同じであっても、順流の方が逆流より f_{cw} は大きくなるが、これは順流では流れが重なることにより、底面近くの波の水粒子運動が大きくなるのに対し、逆流では小さくなるためである。

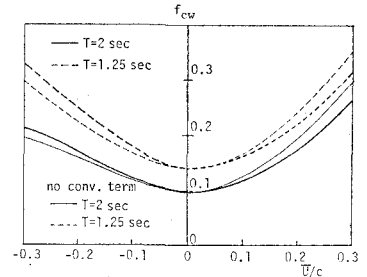


図-1 摩擦係数 f_{cw}

図-2 は u_{cw}^* についての結果であり、 f_{cw} と同様の性質を示す。図-3 は δ_w を境界層の長さスケール $\kappa |u_{cw}^*| / \sigma$ で無次元化した結果を示したものである。図からこの値は流れの流速の絶対値の増加とともに減少し、流れによらずこの値を一定とする Grant らの仮定とは異なる結果となる。図-4 は θ についての結果であり、順流では流速の増加とともに減少するのに対し、逆流では流速の増加とともに

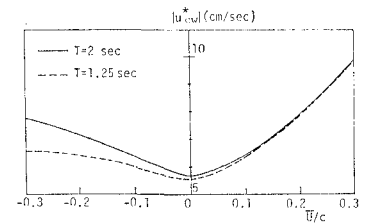


図-2 摩擦速度 u_{cw}^*

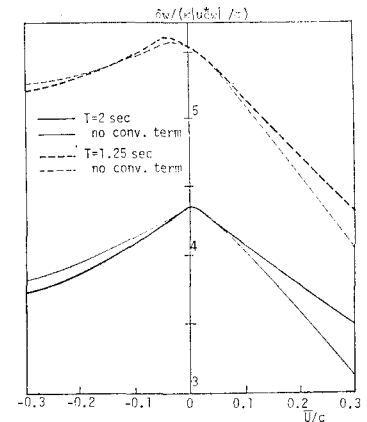


図-3 境界層厚の無次元表示 $\delta_w / (\kappa |u_{cw}^*| / \sigma)$

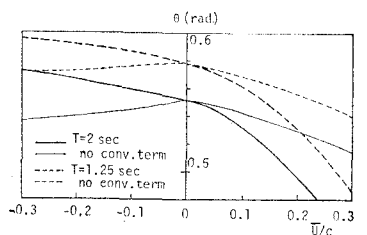


図-4 位相差 θ

表-2 実験条件

		$\bar{U}$ (cm/sec)	H (cm)	T (sec)	h (cm)
CASE-I	wave-only	0	8.52	1.67	30
	current-only	-20.0	—		
	co-existing	-17.4	7.74		
CASE-II	wave-only	0	7.99	1.67	30
	current-only	-30.3	—		
	co-existing	-25.9	7.49		
CASE-III	wave-only	0	8.22	1.67	30
	current-only	-41.6	—		
	co-existing	-36.7	6.30		

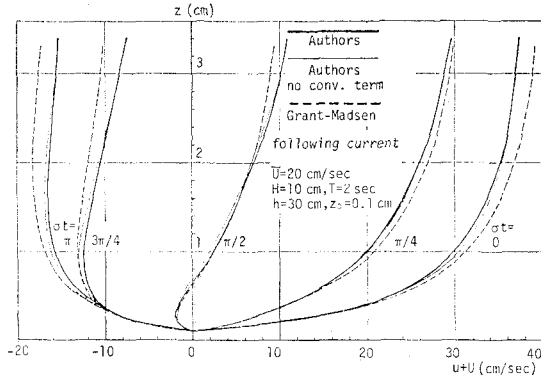


図-5 共存場における水粒子速度の鉛直分布 (順流)

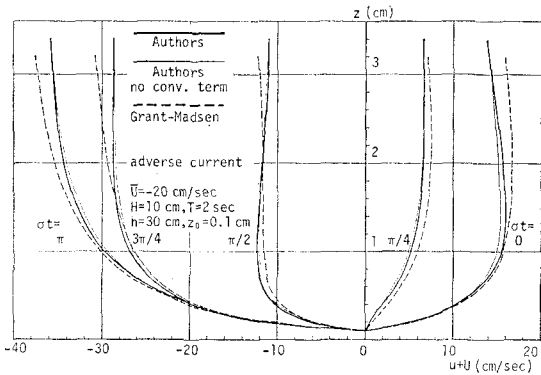


図-6 共存場における水粒子速度の鉛直分布 (逆流)

にわずかではあるが増加する傾向がある。

図-5, 図-6 は CASE-1 で設定された条件の下で, それぞれ流速 20 cm/sec の順流と逆流を与えた場合の, 水平方向水粒子速度の計算結果を示したものである。図中の細線で示した曲線は, 著者らの理論で移流項を考慮しない場合の計算結果である。これより移流項は, 順流の場合には水粒子速度の絶対値を小さくし, 逆流では大きくすることがわかる。移流慣性項 $U \cdot \partial u / \partial x$ と局所慣性項 $\partial u / \partial t$ の比は, U/c となるから, 移流項の効果はこの値が大きい時に顕著となる。しかし実際の沿岸海域で生起する流れと波の条件下では, 移流項の効果が無視できない場合は少ないと考えられる。

4. 底面近傍の水粒子速度に関する実験

紙数の制約上, 実験装置・実験結果の詳細は別報¹⁾に譲り, ここでは実験の概略と主要な結果のみを示す。

水槽底面全体に 2mm 角のアクリル棒を 15mm 間隔で貼り付けた棧粗度板を敷き, 粗度の頂点からの高さ 1.4~100mm の範囲にわたって, 水平方向水粒子速度をレーザードップラー流速計によって測定した。実験は波のみ, 流れのみ, および共存場について行った。実験条件を表-2 に示す。以下 CASE-III についての実験結果のみを示す。CASE-I は流れの流速が小さいため特性が

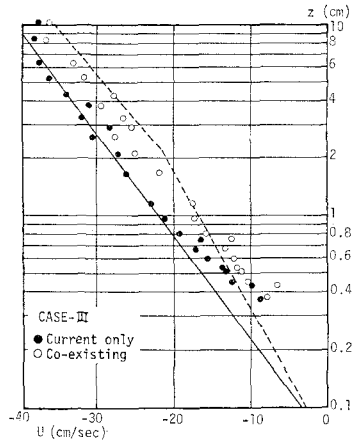


図-7 平均流の流速分布

CASE-III とやや異なるが, CASE-II は CASE-III とほぼ同様の特性を示したことを付記する。

図-7 は流れのみの場合の流速分布と, 共存場の場合の一周平均流速を平均流としたときの流速分布を示したものである。波が重疊すると平均流成分に対する水理学的な抵抗が増加するため, 流れのみの場合より流速が小さくなることがわかる。また図中の破線は, 流れのみの場の断面平均流速を用いて理論的に算出した平均流の流速分布を示す。

図-8 は波動場の水粒子速度の実験結果であり, 図中には著者らおよび Grant らの理論計算結果を併せて示している。図から位相 0 および $\pi/4$ の実測値は, 波動境界層内と考えられる z が 2cm より小さい領域で理論値より大きくなっており, 実測値の分布は理論値よりかなりふくらんだ形状を示している。また位相 $3/4\pi$ および π の実測値は, z が 5mm より小さい領域で理論値より絶対値がかなり小さくなっている。以上の特性はほぼ同様な実験条件の下で, 底面近傍の水粒子速度を実測した Bakker ら^{2),3)}の結果にも見られる。また, 波動境界層外においても理論値と実験値の不一致が見られるが, これは波の有限振幅性を考慮していないことが, その主たる原因と考えられる。

図-9 は共存場の結果であり波動場の結果と同様, 位

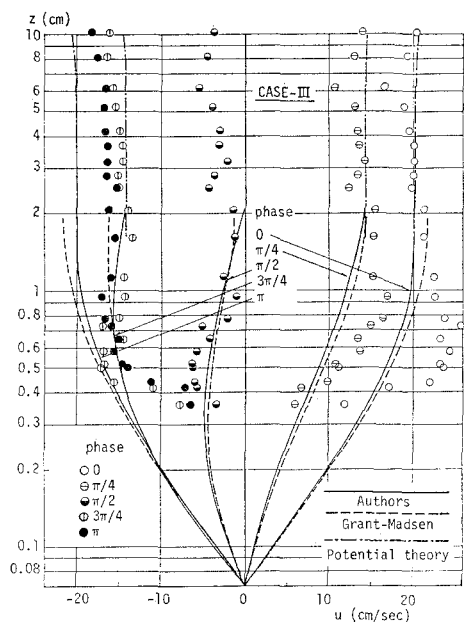


図-8 波動場の水粒子速度についての理論値と実験値の比較

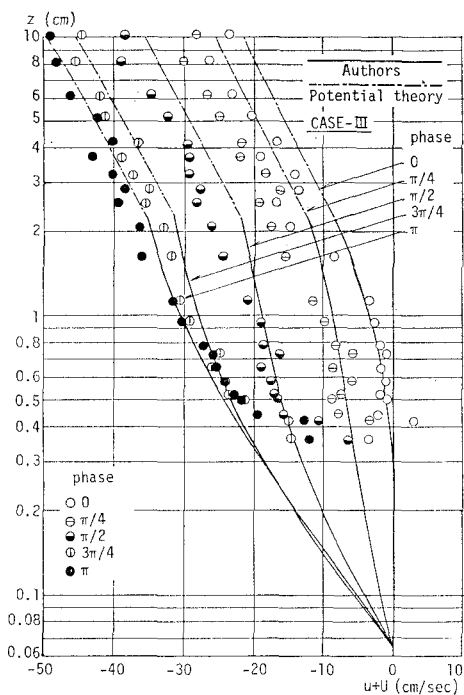


図-9 共存場の水粒子速度についての理論値と実験値の比較

相 $3\pi/4$ および π では z が 6 mm 以下の領域で実験値がかなり小さくなる。ここに示していないが、CASE-II の結果では位相 0 および $\pi/4$ で実験値は理論値よりやや大きくなるが、CASE-III のこの位相区間においては、両者の一致度は CASE-II より良いようである。この理由はケース数が少ないためははっきりしないが、CASE-III

は CASE-II より流れの流速が大きく、底面近くの層流底層が薄くなって、理論で仮定した状態と近づくためではないかと考えられる。

5. 結 論

本研究では、波と流れの共存場における波動境界層内の水粒子速度を算出する方法として、境界層外縁位置を未定境界点とする境界値問題としての解法を試み、摩擦係数等の境界層の水理特性量を計算し、流れによる変化の特性を明らかにした。さらに、流れのみ・波動のみおよび両者が共存する場合での底面近傍の水粒子速度を実測し、これと本研究で展開した理論的取扱いによる計算結果とを比較・検討した。その結果、境界層内全域にわたって渦動粘性係数が底面からの距離に比例すると仮定し、層流底層の存在を無視した乱流境界層のモデルでは、実測値を全領域にわたっては必ずしも十分に説明できないことがわかった。今後、測定精度の向上と併わせて、乱流境界層モデルの精密化が課題となろう。

最後に本研究は文部省科学研究費（一般研究A，奨励研究A）による研究の一部であることを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Kajiura, K.: A model of the bottom boundary layer in water waves, Bull. of Earthquake Res. Inst., Vol. 46, pp. 75~123, 1968.
- 2) 野田英明: 波動による乱流境界層の発達, 第16回海岸工学講演会講演集, pp. 23~27, 1969.
- 3) Grant, W. D. and O. S. Madsen: Combined wave and current interaction with a rough bottom, J. of Geophysical Research, Vol. 84, No. C4, pp. 1797~1808, 1979.
- 4) 田中 仁・首藤伸夫: 波・流れ共存場の底面摩擦に関する実験, 第27回海岸工学講演会論文集, pp. 163~167, 1980.
- 5) 田中 仁・首藤伸夫: 一方向流を伴う振動流に関する実験, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 259~263, 1982.
- 6) Mellor, G. L. and D. M. Gibson: Equilibrium turbulent boundary layers, J. Fluid Mech., 24, pp. 225~253, 1966.
- 7) 日野幹夫: 境界値問題の解法, 朝倉書店, p. 210, 1981.
- 8) Bakker, W. T. and Th. van Doorn: Near-bottom velocities in waves with a current, Proc. 16th International Conf. on Coastal Eng., pp. 1394~1413, 1978.
- 9) Bakker, W. T. and Th. van Doorn: Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves without and with a current, Waterloopkundig Laboratorium Delft Hydraulics Laboratory, M1423, part 1, p. 66, 1981.
- 10) Kemp, P. H. and R. R. Simons: The interaction between waves and a turbulent current: waves propagating with the current, J. Fluid Mech., Vol. 116, pp. 227~250, 1982.
- 11) 岩垣雄一・浅野敏之・岡本 浩: 波と流れの共存場における底面近傍の水粒子速度の特性について, 京都大学防災研究所年報, 第26号, B, 1983. (投稿中)