

ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の統計的特性

土屋 義人*・安田 孝志**・篠田 成郎***

1. 緒 言

海岸波浪を特色づけているものはその不規則性と非線形性であり、ここに海岸波浪の力学的取り扱いを困難にしている最大の原因があると考えられる。

従来の不規則波の表現法の一つであるスペクトル解析法は、力学理論としての側面を持っているため、統計量が同時に力学的諸量になるという優れた特色を有しているが、同時に、非線形干渉によってパワースペクトルが変化し、不偏推定量として統計量を取り扱うことができなくなるため、海岸波浪の統計的特性の不偏の評価が困難になるという欠点も合わせ持っている。さらに、非線形性の存在は、各成分波の統計的独立性を壊すことにほかならず、水位変動の正規性を中心極限定理によって保証することは不可能となる。波別解析法においては、こうした適用上の問題は生じないが、統計量が対象とする波の力学的諸量と概念的に結びついているにすぎず、統計量の推定値から直ちに海岸波浪の力学的特性を評価することはできないという問題がある。

これに対して、ソリトンスペクトル理論¹⁾²⁾では、海岸波浪は非線形波動解であるソリトン³⁾を成分波とするソリトン構造を持つという観点から、ソリトンをスペクトル成分とすることによって海岸波浪の特性の評価が行われることになる。これによって、非線形性と不規則性の評価が可能となり、スペクトルの空間的不変性がソリトンの固有値の空間的不変性によって一義的に保証され、従来の手法が抱えていた上述の問題点が解決されることになる。さらに、この理論によれば、ソリトン構造を持つ海岸波浪の不規則性とは、ソリトンの力学的特性を支配する固有値とソリトンの位置を決定する位相の不規則性に依存することになるが、究極的には発生域での波の不規則性のみに依るものと考えられる。

本研究では、このような観点から、ソリトンの固有値と位相の不規則性を確率論的に取り扱うことによって、海岸波浪の不規則性の不偏の評価を試み、固有値の頻度

分布であるソリトンスペクトルが線形スペクトル理論におけるパワースペクトルと同様な性格を有することを示す。さらに、現地海岸波浪との比較においてこの理論の適用性を検証すると同時に、ソリトンスペクトル理論によって表現される海岸波浪の持つ統計的特性について検討を加える。

2. ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の統計的取り扱い

ここでは、ソリトンスペクトル理論で表現される海岸波浪に不確定量として介入する不規則性が何に起因しているかを明確にし、さらに、この理論を用いて定義された統計量の特性を明らかにしていく。

(1) 海岸波浪の統計量の定義

ソリトン構造³⁾を持つ海岸波浪は、無数の独立粒子として伝播するソリトンの集合と考えられる。そこにおけるソリトンの挙動は、力学理論に従う決定論的なものであり、任意時刻におけるすべてのソリトンの位置と固有値は初期条件により完全に確定するものである。しかし、実際にはソリトンの数がきわめて多く、その運動を厳密に解析することは困難である。さらに、分散性の卓越した深海域から、分散性と非線形性が平衡する浅海域に至るまでの力学的な機構が未知であるために、ソリトン構造を持つ海岸波浪の初期状態を知ることが現状ではきわめて困難となっている。このため、個々のソリトンを決定論的に取り扱うことによって海岸波浪を表示するのではなく、ソリトンの集合として海岸波浪を捉え、その集合に関する統計量を基にして、その特性の評価を行うことが必須となる。

ソリトン構造を持つ海岸波浪は、各ソリトンの固有値と位相を決定することにより、一義的に表示される。固有値はソリトンの波高に相当する物理量であり、また隣り合うソリトンの位相の差はソリトンの間隔を表す。すなわち、海岸波浪の初期状態が未知であるために、これらの物理量が不確定量となっている。これより、海岸波浪の不規則性はソリトンの固有値と位相の不規則性に依っていると考え、これらの集合をソリトンの集合に対応した標本空間とすれば、対象とする海岸波浪における

* 正 会 員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正 会 員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 岐阜大学大学院工学研究科

ソリトンの固有値と位相は不規則変数として取り扱われることになる。そこで、これらの不規則変数を用いることにより、海岸波浪の統計量を定義することにする。ただし、位相に関しては、その物理的意味の上からも直接不規則変数として取り扱うことは不適当であるので、前述のソリトンの間隔を位相に代わる不規則変数として扱うことにする。

(2) ソリトンスペクトル分布

不規則変数として扱われる固有値の母集団分布は、海岸波浪の統計的特性を支配する統計量となるため、これを以下ではソリトンスペクトル分布と呼ぶことにする。ソリトンの固有値の時空間的不変性が理論的に保証されており、これを統計量とした場合、不偏推定量としての理論展開が可能になるという利点が生じる。このため、ソリトンスペクトル分布も時空間において保存され、固有値の標本の大きさが大きい時、その分布はソリトンスペクトル分布と一致する。したがって、海岸波浪の観測記録から得られた固有値の確率関数は、対象とする海岸波浪の統計的特性を不偏的に評価するものと言える。

以下の議論に先立ち、ここで固有値の確率密度関数 $f_A(a)$ を次式のように与える。

$$f_A(a) = \sum_k p(k) \delta(a - \alpha_k) \quad (1)$$

ここに、 $p(k)$; ソリトンスペクトル分布、 δ ; Dirac のデルタ関数、 α_k ; 確率関数 $p(k)$ における k 番目の階級値、および a ; 固有値 A の標本平均 μ_A および標本分散 σ_A^2 によって標準化された不規則変数であり、次式で表わされる。

$$a_j = (A_j - \mu_A) / \sigma_A \quad (2)$$

(3) ソリトン間隔の分布

一様水深場におけるソリトンの伝播速度はその固有値に一義的に支配されており、各ソリトンは独立した粒子性波動として伝播するため、ソリトンの間隔は他の不規則変数に対して統計的に独立であると考えられる。しかしながら、海岸波浪には深海域での波の特性が残影として残り、ソリトンの固有値と間隔の相関は無視できないと推察される。そこで、固有値と間隔の相関係数 ρ を母数として、固有値の確率密度関数 $f_A(a)$ から間隔の確率密度関数 $f_T(t)$ を導く。以下、ソリトン群が時空間で伝播し、その配列が初期条件の時空間発展として規定されることを考えて、固有値の場合と同様に、ソリトンの間隔 $T_j = \delta_{j+1} - \delta_j$ を、その標本平均 μ_T および標本分散 σ_T^2 によって次式のように標準化された不規則変数で考えることにする。

$$t_j = (T_j - \mu_T) / \sigma_T \quad (3)$$

まず、図-1 に示すようにソリトンの固有値 a_j と間隔 t_j の相関関係からのずれを確率誤差項 ϵ_j と考えて

$$t_j = a_j + \epsilon_j \quad (4)$$

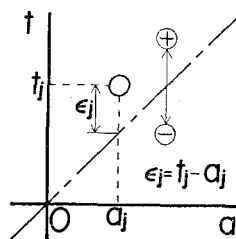


図-1 確率誤差項 ϵ_j の定義

と定義する。 a および t は規準化測度であるため、確率誤差項の平均値および分散はそれぞれゼロおよび $2(1-\rho)$ で与えられる。ここで、確率誤差項の確率分布は正規分布に従うとして理論展開の簡略化を図る。なお、この仮定の妥当性については、後述するよ

うに現地波浪の観測データを用いて検証する。

ついで、確率誤差項と固有値の結合確率密度関数について考える。 a と ϵ の規準化測度 z との結合確率密度関数 $f(a, z)$ は、おのおのの確率密度関数 $f_A(a)$ および $f_E(z)$ を用いて次式で表される。

$$f(a, z) = f_A(a) f_E(z) \quad (5)$$

ここに、

$$f_E(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-z^2/2] \quad (6)$$

である。さらに、式(5)に次の非特異変換をほどこす。

$$u = Av + \mu \quad (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} a \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ z \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho-1 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

であり、一般に μ は平均値ベクトルおよび $AA^T = \Sigma$ は共分散行列と呼ばれる。ただし、 A^T は行列 A の転置行列である。これより、固有値 a と確率誤差項 ϵ の結合確率密度関数 $f(a, \epsilon)$ は次式で与えられる。

$$f(a, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} f_A(a) \exp \left[-\frac{\{(1-\rho)a + \epsilon\}^2}{2(1-\rho^2)} \right] \quad (9)$$

ソリトンの間隔 t の特性関数 $\phi_T(u)$ は、式(4)および(9)より、

$$\phi_T(u) = \exp \left[-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ipau] f_A(a) da \quad (10)$$

となる。この特性関数 $\phi_T(u)$ をフーリエ逆変換すると、ソリトンの間隔の確率密度関数 $f_T(t)$ が次式のように導かれる。

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \sum_k p(k) \exp \left[-\frac{(t - \rho\alpha_k)^2}{2(1-\rho^2)} \right] \quad (11)$$

(4) 水位変動

以上の議論では、ソリトンの集合に対する平均的な特性にのみ着目しているため、ソリトンの時間軸上の順番、すなわちソリトンの時系列に関する情報が失われている。このため、水位変動 η を表示するには、前述のソリトンスペクトル分布のみでは不十分であり、さらに、一

対の固有値と間隔の組 (A_j, T_j) が順番に与えられることが必須となる。しかるに、各ソリトンは固有値のみに支配される独立粒子として伝播するため、各測点でのソリトンの時系列特性は空間的には何ら保存されず、その時系列特性の評価は無意味であると考えられる。このため、 (A_j, T_j) の組は式 (4) の意味において確率的にしか定まらず、水位変動 η は、この組をある確率をもって定めることにより決定される推定量として扱われ、それはソリトンスpekトル理論によれば、

$$\hat{\eta} = \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \operatorname{sech}^2 \hat{\theta}_j - \eta_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表される。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_j &= f_A^{-1}(p_{A_j}) \sigma_A + \mu_A, \\ \hat{\theta}_j &= \sqrt{3} \hat{A}_j / 4 (x/h - \hat{c}_j t \sqrt{g/h} + \hat{\delta}_j), \\ \hat{c}_j &= 1 + \hat{A}_j / 2 - 3\eta_0 / 2, \\ \hat{\delta}_j &= \sum_{k=1}^j \{ f_T^{-1}(p_{T_k}) \sigma_T + \mu_T \}, \\ \eta_0 &= -(2/T^*) \sum_{j=1}^N \sqrt{\hat{A}_j / 3} \tanh \hat{\theta}_j|_0^T / \hat{c}_j \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり、 $f_A^{-1}(p_{A_j})$ ；固有値の確率密度関数において確率 p_{A_j} で定まる j 番目の標準化測度、および $f_T^{-1}(p_{T_k})$ ；間隔の確率密度関数において確率 p_{T_k} で定まる k 番目の標準化測度である。

これによって、ソリトンスpekトル分布に加えて、ソリトンに関する平均値および分散が与えられれば、ソリトン間隔の確率密度関数を導くことができ、直ちにこれら 2 つの確率分布から水位変動を推定することが可能となる。

3. ソリトンスpekトル理論による海岸波浪の統計的特性

ここでは、ソリトンスpekトル理論を基礎にして前述したように定義された統計量の特徴を観測データによって明らかにすると同時に、従来の手法による結果との比較も併せて示す。さらに、これらの統計量を用いて海岸波浪の粒子性についても考察する。

(1) 現地波浪の観測波形

解析は、京大防災研究所附属大渦波浪観測所の観測棧橋に設置された 2 台の容量式波高計によって 1981 年 3 月 7 日に得られたうねり性の海岸波浪の 60 分間連続記録に対して行った。なお、2 台の波高計の間隔は 8.75 m であり、いずれの水深も 5.7 m であった。以下、沖側および岸側の測点をそれぞれ P. 1 および P. 2 とし議論を進める。

図-2 は、このときの海岸波浪の観測波形とソリトン

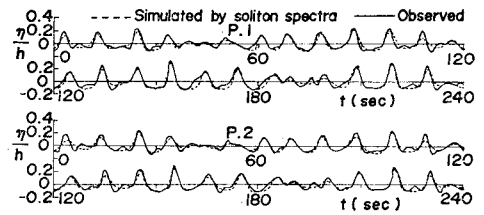


図-2 観測波形とソリトン合成波形との比較

合成波形との比較の一例を示す。これより、ソリトンスpekトル理論による海岸波浪の表示精度はきわめて良好であり、以下の統計量に関する議論において、表示精度に問題のないことが確認できる。図-3 は、測点 P. 1 および P. 2 での海岸波浪の水位分布である。水位分布の空間変化は小さいが、正規分布から大きく歪んでおり、測点 P. 1 における kurtosis および skewness がそれぞれ 4.61 および 1.16 となっていることから、非線形性が卓越した波浪であることがわかる。

表-1 は、波形の定常性の検定として、ノンパラメトリック手法による連検定を行った結果である。ここでは、

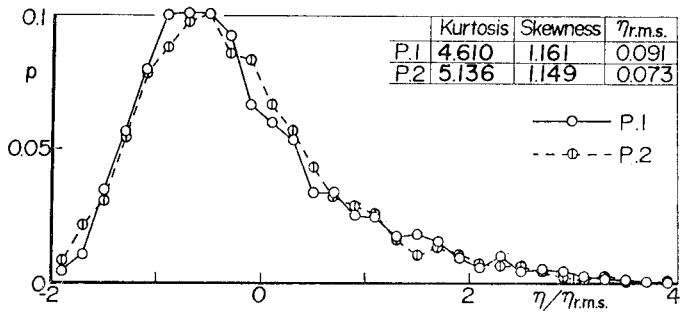


図-3 水位分布の空間変化

波形の標本記録を各区間のデータが独立であると考えてさしつかえないような時間区間に分け、各区間に対する標本標準偏差値の列をそれらの中央値に関する連の大きさによって検定を行った。いずれの時間間隔においても、標本値列の変動が不規則で、トレンドを示しておらず、有意水準 5% で定常性の仮説が許容される。

(2) 固有値の標本分布

図-4 は、式 (2) により標準化した 2 測点での固有値の標本分布の比較を示す。標準化した固有値の値が 1.4 以上および -0.6 以下の両端において固有値の分布形状は良好な一致を示しているが、標本平均値の周りで伝播

表-1 定常性に対する連検定結果

Time interval [min]	Number of run		Region of acceptance (Level of significance =0.05)
	P. 1	P. 2	
1.0	30	28	24~37
2.0	13	20	11~20
3.0	8	12	6~15

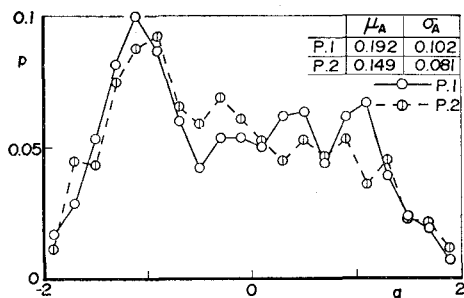


図-4 固有値の標本分布の空間変化

に伴う分布形状の正側から負側へのシフトが認められ、標本分布の空間的不変性が必ずしも成立していない。この理由としては、ソリトンスペクトル理論では無視されているソリトン化していない分散波や長周期成分波との相互干渉の影響などが考えられるが、これらの評価は今後の課題として、ここで得られた標本分布は不偏性を持つと判断する。

図-5 は、線形スペクトル理論によって得られた2測点でのパワースペクトルの変化を示す。これによれば、伝播に伴うパワーの低下が全周波数にわたり顕著であり特にピーク周波数においては $8.1 \text{ m}^2 \cdot \text{sec}$ だけ低下している。また、図-6 は、2測点間のコヒーレンスを示したもので、これから 0.25 Hz 以上の高周波域でパワースペクトルの著しい変化が見られる。図-7 は、ゼロアップクロス法によって定義された波高の標本分布を示す。前述の図-4 に示したソリトンの固有値の標本分布と比べ、全体にわたる分布形状の変化が認められる。このように、線形スペクトル理論や波別解析法による統計量は、少なくとも極浅海域においては、空間的不変性に若干問題のあることが認められ、ソリトンスペクトル分布の優位性が明らかとなろう。

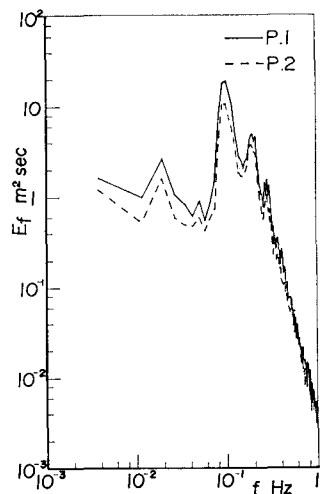


図-5 パワースペクトルの空間変化

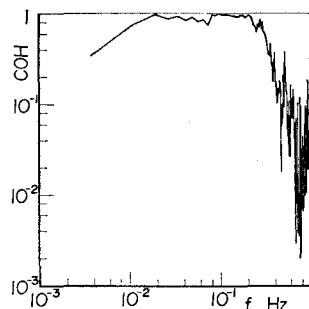


図-6 コヒーレンス

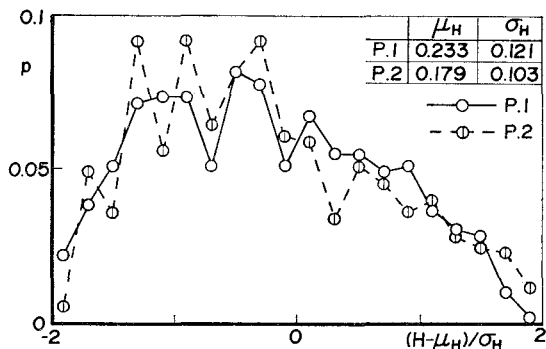


図-7 ゼロアップクロス法による波高の標本分布

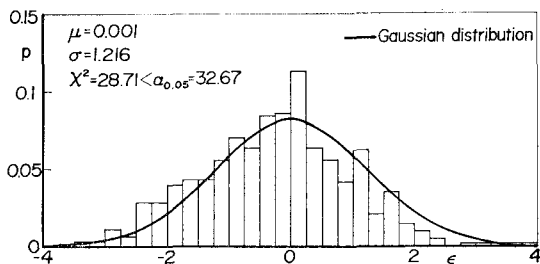


図-8 確率誤差項の標本分布と正規分布との比較

(3) 確率誤差項の標本分布

図-8 は、測点 P. 2 におけるソリトンの固有値および間隔から式 (4) を用いて得られた確率誤差項の標本分布と、その標本平均および標本分散を母数とする正規分布の確率密度関数との比較を示す。標本分布のほうやや負側へ偏っているが、全体的には正規分布に比較的良好一致していると言えよう。このことを客観的に検証するために、前述の仮説に対してカイ 2 乗適合度検定を行った結果、標本の大きさ 628 および有意水準 5% でこの仮説が許容されることがわかった。測点 P. 1 においてもほぼ同様な結果が得られた。これより、誤差項は正規分布に従うことが検証され、この仮定に基づく理論の展開が十分可能であると判断される。

(4) ソリトン間隔の標本分布

図-9 は、図-4 に示したソリトンスペクトル分布および固有値と間隔の相関係数を式 (11) に適用して理論分布を求め、これと測点 P. 2 における観測データより

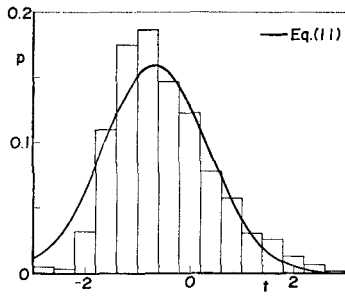


図-9 ソリトン間隔に関する標本分布と理論分布との比較

得られたソリトンの間隔の分布とを比較したものである。ここでは、測点 P. 1 での比較を割愛したが、この場合を含めて実際の標本分布と理論分布が良い一致を示しており、ここで取り扱った程度の時空間スケールではソリトンスpekトル分布を基にした統計的な理論展開の妥当性が検証される。

(5) 海岸波浪の粒子性

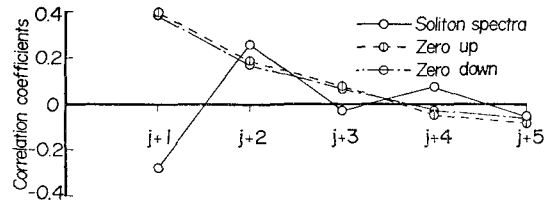
前述したように、ソリトンスpekトル理論では、海岸波浪はソリトンを成分波とする粒子的構造を有しているとの観点に立っているが、このことをこれまでの理論の展開に基づいて統計的な側面から考察することにする。

まず、ソリトンの固有値と間隔の相関について調べる。表-2 は、伝播に伴うこれらの相関係数の変化を、ゼロアップクロス法およびゼロダウンクロス法による波高と周期の相関係数との比較において示したものである。ゼロクロス法に比べ、ソリトンスpekトル理論による方が相関はかなり小さくなっている。また、いずれの場合にも伝播に伴う相関係数の低下が見られ、特にソリトンスpekトル理論による場合にこれは顕著となる。これらのことは、残影としてなお残っている周期波の特性が伝播の過程で消失して行き、それに代わって、ソリトン構造としての海岸波浪の粒子的特性が顕著になってくることを表しているものと考えられる。相関係数のこのような低下は、ソリトンスpekトル理論によってきわめて自然に説明される。

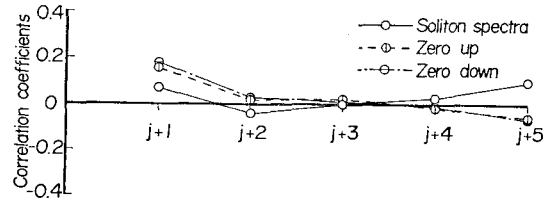
図-10 は、 j 番目のソリトンと $j+1, \dots, j+4$ および $j+5$ 番目のソリトンとの固有値および間隔に関する相関係数を、ゼロクロス法での相関係数と比較して示したものである。まず、固有値、あるいは波高相互の相関において、ゼロクロス法には離れた波であるほど相関が小さくなるという一定の傾向が見られ、波高の連なりを

表-2 伝播に伴う波高・周期の相関係数の変化

	P. 1	P. 2
Theory of soliton spectra	0.359	0.261
Zero-up crossing	0.665	0.618
Zero-down crossing	0.683	0.602



(a) 固有値 (波高)



(b) 間隔 (周期)

図-10 固有値および間隔に関する相関係数の比較

木村の研究³⁾のようにマルコフ連鎖として扱うことは見掛け上可能となることがわかる。これに対して、ソリトンスpekトル理論では、相関係数の絶対値自体が小さくなる傾向はあるものの、相関係数の意味から判断すれば、固有値相互に相関関係は存在しないと考えられる。また、間隔あるいは周期相互の相関についても、ソリトンスpekトル理論の場合よりゼロクロス法による場合の方に若干の相関が見られるが、それらの絶対値は非常に小さく、間隔相互において無相関と考えられる。これらより、海岸波浪のソリトンはおおの独立な粒子と扱うことができ、その粒子性が明瞭となるものと言えよう。

4. 結 語

以上、極浅海域における海岸波浪はソリトン構造を持つとの観点から、ソリトンスpekトル理論に基づき、力学特性との対応において海岸波浪の統計量を定義し、その特性を理論および観測データの両面から検討した。その結果、固有値の母集団分布であるソリトンスpekトル分布を用いて海岸波浪の統計理論を展開する可能性を見出すことができ、さらに、これらの統計量を用いることにより、海岸波浪がソリトンを成分波とする粒子的な構造を持つことも統計的な側面からかなり明確にすることができた。

参 考 文 献

- 1) 土屋義人・安田孝志・武山保徳：相互干渉を無視した場合のソリトンスpekトルの理論，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 89~93, 1981.
- 2) 安田孝志・篠田成郎・土屋義人：ソリトンスpekトル理論による海岸波浪の内部特性表示，第29回海岸工学講演会論文集，pp. 36~40, 1982.
- 3) Kimura, A.: Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 2955~2973, 1980.