定形波の理論における微分摂動法の応用

椎貝博美*・西村仁嗣**・京藤敏達***

1. 緒　　言

微小パラメーターを含む方程式系の摂動解を求める際，そのパラメーターによる微分を繰り返すことによって各次の方程式系を求めて行く手法を微分摂動法[1),2)]という．方程式をパラメーターで微分したり，解をテイラー級数の形で与えることは，従来，bifurcation の研究[3)]で行なわれているが，これは微小パラメーターに関する解の関数形により深く注目した手法である．もとより，この方法によって冪級数展開を基本とする在来の摂動法におけるものと異なる解が得られるわけではないが，摂動の過程ならびに結果の数学的意味はきわめて明確となる．本研究は，上記の微分摂動法を定形波の基礎理論に応用することによってその有用性を示し，併せて波の位相速度の不確実性および波の変形に応じて生じる平均水位変動の物理的意味等を理論的に説明しようとするものである．

2. 微分摂動法

非線形の微分方程式

$$N(x,\dot{x},\ddot{x};\varepsilon)=0,\quad \dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}\cdots(1)$$

が与えられたとき，その解は $x=x(t;\varepsilon)$ である．ε と t が互いに独立で，x が t に関して2回，ε に関して1回微分可能であれば N のパラメーター ε に関する実質微分は次のように書かれる．

$$\frac{dN}{d\varepsilon}=\frac{\partial N}{\partial x}x_\varepsilon+\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial N}{\partial \ddot{x}}\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial N}{\partial \varepsilon},\quad x_\varepsilon=\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\quad\cdots(2)$$

N は任意の t と ε に対して0であるから，その実質微分も恒等的に0でなければならない．このことから，$x_0\equiv x(t;0)$，$x_1\equiv x_\varepsilon(t;0)$ として，次式を得る．

$$\frac{\partial N}{\partial \ddot{x}_0}\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{\partial N}{\partial \dot{x}_0}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial N}{\partial x_0}x_1+\frac{\partial N}{\partial \varepsilon}=0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial \ddot{x}_0}\equiv\frac{\partial N}{\partial \ddot{x}_0}(x_0,\dot{x}_0,\ddot{x}_0;0)\cdots\cdots(3)$$

x_0 が与えられた時，上記の方程式は x_1 を規定する線形の常微分方程式となる．この操作を繰り返すことにより，

$$x_n=\left.\frac{\partial^n x}{\partial \varepsilon_n}\right|_{\varepsilon=0}\quad\cdots\cdots(4)$$

が順次定義される．こうして得られた x_n を用いて $x(t;\varepsilon)$ の ε に関するマクローリン展開は，

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\frac{\varepsilon^2}{2!}x_2+\cdots\quad\cdots\cdots(5)$$

のように与えられる．

3. 永年項の除去

永年項[4)]は，非線形の微分方程式の摂動に際してしばしば現われるもので，時間 t に比例する物理的に意味のない項である．一般に単一周期 T を有する関数は，$x(t)=X(\omega t)$，$\omega=2\pi/T$ と書かれる．この場合，関数 X の周期は 2π である．x が微小パラメーター ε に依存し，ω もまた ε に依存すると仮定する．$x(t;\varepsilon)$ を ε で単純摂動すれば微分摂動法により，

$$\frac{d}{d\varepsilon}(xt;\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}X(\omega t;\varepsilon)=X_\tau\omega_\varepsilon t+X_\varepsilon,$$
$$\tau=\omega t\quad\cdots\cdots(6)$$

となる．X_τ，X_ε はいずれも周期関数であり，x_ε は $t\to\infty$ のとき無限大となる．このように，永年項は周期関数の周期が摂動されることによって生じる．こうした永年項を除去するために従来とられてきた方法は，まず変数変換 $\tau=\omega t$ を行ない，得られた方程式を改めて摂動法で解くというものである．しかしながら，変数変換のヤコビアン $J=\omega$ が $\varepsilon=0$ のとき特異点を持たなければ，永年項を含んだ解と永年項を除去した解の間には一定の関数関係が存在するので，前者から直接後者を導くことも可能である．すなわち，$x(t;\varepsilon)=X(\omega t;\varepsilon)$ を微分摂動することにより，

$$\left.\begin{aligned}
&x_0(t)=X_0(\omega_0 t)\\
&x_1(t)=\omega_1 tX_{0\tau}(\omega_0 t)+X_1(\omega_0 t)\\
&x_2(t)=\omega_2 tX_{0\tau}(\omega_0 t)+2\omega_1 tX_{1\tau}(\omega_0 t)\\
&\qquad+(\omega_1 t)^2X_{0\tau\tau}(\omega_0 t)+X_2(\omega_0 t)\\
&x_3(t)=\omega_3 tX_{0\tau}(\omega_0 t)+3\omega_1\omega_2 t^2X_{0\tau\tau}(\omega_0 t)
\end{aligned}\right\}$$

* 正会員　工博　筑波大学教授　構造工学系
** 正会員　工博　筑波大学助教授　構造工学系
*** 学生会員　　筑波大学大学院　工学研究科

$$\left.\begin{aligned}&+3\omega_2 t X_{1\tau}(\omega_0 t)+3(\omega_1 t)^2 X_{1\tau\tau}(\omega_0 t)\\&+3\omega_1 t X_{2\tau}(\omega_0 t)+(\omega_1 t)^3 X_{0\tau\tau\tau}+X_3(\omega_0 t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(17)$$

が順次求められる．上式を用いて，与えられた x_n に対し X_n が周期関数となるように，各 ω_n を定めることができる．

4．摂動解析における等角写像の応用

微小な変動を有する境界を等角写像によって直線境界に変換し，このとき用いた微小パラメーターについて摂動を行なうことにより，得られた方程式を解く方法がある．この手法は，砂れん上の流れ[5)]の解析や界面の安定問題[6)]等に実際に応用されている．

変数変換のヤコビアンに特異性がなければ，変換前後の関数は一意的に対応し，変換前の解から変換後の系における解を改めて方程式を解くことなく，直接求めることができる．しかも，これによって解の性質がいく分改善される場合がある．

具体的な例として，砂れん上の流れを解析した Lyne の変換[5)]について考えよう．等角写像

$$\zeta=z-i\varepsilon e^{ikz},\quad \zeta=\varphi+i\phi,\ z=x+iy \quad\cdots\cdots(8)$$

によれば，$x-y$ 平面内の波状境界 $y=\varepsilon\cos kx$ が ε について一次の精度で $\varphi-\phi$ 平面内の直線境界 $\phi=0$ に変換される．この場合，変数変換のヤコビアンは

$$J=1+2\varepsilon k e^{-ky}\cos kx+O(\varepsilon^2) \quad\cdots\cdots(9)$$

であり，$\varepsilon=0$ はその特異点ではない．

Lyne[5)] によれば変換前の流れ関数 $H(x,y;\varepsilon)$ を x,y 方向の流速成分 $\hat{u},\hat{v}$ について

$$\hat{u}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \hat{v}=-\frac{\partial H}{\partial x} \quad\cdots\cdots(10)$$

のように定義する時，対応する変換後の流れ関数 $S(\varphi,\phi;\varepsilon)$ は φ,ϕ 方向の流速成分 u,v について

$$u=J^{1/2}\frac{\partial S}{\partial\phi},\quad v=-J^{1/2}\frac{\partial S}{\partial\varphi} \quad\cdots\cdots(11)$$

となる．

一方，$(\hat{u},\hat{v})$ と (u,v) の関係は幾何学的に求められ，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\hat{u}&=u\phi_y/J^{1/2}-v(-\phi_x/J^{1/2})=S_\phi\phi_y+S_\varphi\varphi_y\\\hat{v}&=u(-\phi_x/J^{1/2})+v\phi_y/J^{1/2}=-S_\phi\phi_x-S_\varphi\varphi_x\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(12)$$

従って，H と S は $H(x,y;\varepsilon)=S(\varphi(x,y;\varepsilon),\phi(x,y;\varepsilon);\varepsilon)$ の関係で結ばれる．逆に，φ,ϕ を独立変数とすると，

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=Z-i\varepsilon e^{ikZ},\quad Z=X(\varphi,\phi;\varepsilon)+iY(\varphi,\phi;\varepsilon)\\&S(\varphi,\phi;\varepsilon)=H(X(\varphi,\phi;\varepsilon),Y(\varphi,\phi;\varepsilon);\varepsilon)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(13)$$

である．この方程式を微分摂動して，$H_0(x,y)$，$H_1(x,y)$ から $S_0(\varphi,\phi)$，$S_1(\varphi,\phi)$ を求める．まず，式 (13) で $\varepsilon=0$ とすると

$$\left.\begin{aligned}&\zeta=Z_0\\&S_0(\varphi,\phi)=H_0(X_0,Y_0)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(14)$$

であり，結局 $S_0(\varphi,\phi)=H_0(\varphi,\phi)$ となる．すなわち，$H_0(x,y)$ の (x,y) を形式的に (φ,ϕ) で置き換えれば $S_0(\varphi,\phi)$ が得られる．次に，式 (13) を ε で微分すると，

$$\left.\begin{aligned}&0=\frac{\partial Z}{\partial\varepsilon}-ie^{ikZ}+\varepsilon k e^{ikZ}\frac{\partial Z}{\partial\varepsilon}\\&\frac{dS}{d\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial H}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(15)$$

ここで $\varepsilon=0$ とすることにより微分摂動した方程式

$$\left.\begin{aligned}&Z_1=ie^{ikZ_0}\\&S_1=\frac{\partial H_0}{\partial X_0}X_1+\frac{\partial H_0}{\partial Y_0}Y_1+H_1\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(16)$$

が得られる．これらの式から X_1, Y_1 を消去して，S_1 と H_1 の関係式

$$\begin{aligned}S_1(\varphi,\phi)=&H_{0x}(\varphi,\phi)(-e^{-k\phi}\sin k\varphi)\\&+H_{0y}(\varphi,\phi)e^{-k\phi}\cos k\varphi+H_1(\varphi,\phi)\end{aligned} \quad\cdots\cdots(17)$$

を得る．ここに，$H_n(\varphi,\phi)$ は $H_n(x,y)$ の変数 (x,y) を形式的に (φ,ϕ) に置き換えた関数である．このようにして，変換前の系における流れ関数の表示が与えられるならば，これから変換後の系における流れ関数が知られる．

等角写像によって，境界を直線状に変換することの利点は，数値計算の場合には境界条件が与え易くなることであり，摂動法においては精度の向上を図り得ることである．これはまた，Euler 変換と類似の操作と考えることも可能である．Euler 変換[7)]はパラメーターによる特異点が $\varepsilon=-\varepsilon_0$ にある時に，ε のベキ級数を改めて $\delta=\varepsilon/(\varepsilon+\varepsilon_0)$ で展開することにより，近似解を厳密解に近づける変換である．この場合にも，$f(\varepsilon)=\bar{f}(\delta)$ とし，これを微分摂動すれば，$f_0=\bar{f}_0$，$f_1=(1/\varepsilon_0)\bar{f}_1$ 等を得る．また，ヤコビアン J は，$J_0=1/\varepsilon_0$ となり特異点を持たない．$\varepsilon\to-\varepsilon_0$ のとき $f(\varepsilon)\to\infty$ という厳密解の性質を考慮したことにより，近似解の精度が向上している．

以上のように，変数変換のヤコビアンが $\varepsilon\to0$ のとき特異にならない限り，変数変換前の解から変換後の解が完全に決まる．このような場合にも，近似解は改良され，Burger 方程式や K-dV 方程式におけるように厳密解[1),2)]が得られることもある．現在用いられている摂動のさまざまな手法を微分摂動法により，厳密解との関係から再整理することは重要と思われる．

5．2次元定形波

2次元定形波は，3つのパラメーター D (水深)，H (波高)，および L (波長) によって規定され，その組み合わせから成る2つの無次元量 $\alpha=HL^2/D^3$ および $\beta=(D/L)^2$ を用いて，その基礎方程式系を記述することが

できる[8]．すなわち，無次元の流れ関数 ϕ および無次元の水位上昇量 η について

$$\left.\begin{aligned}&\beta\phi_{xx}+\phi_{zz}=0\\&z=-1 \text{ で } \quad \phi=\mu\\&z=\eta \text{ で } \quad \phi=0\\&z=\eta \text{ で } \quad \frac{1}{2}(\phi_z^2+\beta\phi_x^2)+\eta=\lambda\\&\eta(0)-\eta\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\beta\\&\int_0^1 \eta dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここに，x は波の進行方向，z は静水面より鉛直上向きにとった距離座標であり，前者は波長，後者は水深により無次元化されている．μ および λ は定数である．なお，$x=0$ が波の山となるように位相を定める．この方程式の解は，一般に $\phi=\phi(x,y;\alpha,\beta)$ で与えられ，α あるいは β による2種の摂動が可能である．各次の摂動解が満たすべき方程式を導くために，非線形の境界条件の微分摂動を行なう．任意の関数 $f(x,z;\varepsilon)$ について，$f_n=(\partial^n f/\partial\varepsilon^n)(x,\eta_0,0)$ を計算すると，

$$\left.\begin{aligned}&[f]_1=f_1+f_{0z}\eta_1\\&[f]_2=f_2+2f_{1z}\eta_1+f_{0zz}\eta_1^2+f_{0z}\eta_2\\&[f]_3=f_3+3f_{2z}\eta_1+3f_{1zz}\eta_1^2+3f_{1z}\eta_2\\&\qquad+3f_{0zz}\eta_1\eta_2+f_{0z}\eta_3+f_{0zzz}\eta_1^3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(19)$$

ここに，$[F]=F(x,\eta,\varepsilon)$ である．上式は，η が ε の関数であるとして単純に ε で微分したものである．同様に，

$$\left.\begin{aligned}&[F^2]_1=2[F]_0[F]_1\\&[F^2]_2=2[F]_1^2+2[F]_0[F]_2\\&[F^2]_3=8[F]_1[F]_2+2[F]_0[F]_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

以上の公式を用いて，波の基礎方程式を α で微分摂動すれば，

$$\left.\begin{aligned}&\beta\phi_{1xx}+\phi_{1zz}=0\\&z=-1 \text{ で } \quad \phi=\mu_1\\&z=0 \text{ で } \quad \phi_1-\mu_0\eta_1=0\\&z=0 \text{ で } \quad -\mu_0\phi_{1z}+\eta_1=\lambda_1\\&\eta_1(0)-\eta_1\left(\frac{1}{2}\right)=\beta\\&\int_0^1 \eta_1 dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

となり，これは微小振幅波の基礎方程式に対応する．以下，これらの演算を繰り返すことにより，順次 $\phi_n=\partial^n\phi/\partial\alpha^n|_{\alpha=0}$ が求められ，$\phi=\sum_n \phi_n(x,z;\beta)\alpha^n/n!$ は Stokes 波になる．次に基礎方程式を β で微分摂動すれば，

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{1zz}=0\\&z=-1 \text{ で } \quad \phi_1=\mu_1\\&z=0 \text{ で } \quad \phi_1-\mu_0\eta_1=0\\&z=0 \text{ で } \quad -\mu_0\phi_{1z}+\eta_1=\lambda_1\\&\eta_1(0)-\eta_1\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\\&\int_0^1 \eta_1 dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

となり，順次 $\phi_m=\partial^m\phi/\partial\beta^m|_{\beta=0}$ の満たす方程式が得られ，$\phi=\sum_m \phi_m(x,z;\alpha)\beta^m/m!$ として cnoid 波が得られる．

このように，ϕ は無次元パラメーター α,β の関数であり，α で展開すれば Stokes 波，β で展開すれば cnoid 波となる．また，定形波の存在および一意性については，Levi-Civita[9] によりすでに示されているから，両者の解は同一の ϕ をそれぞれ α,β で Taylor 展開したものである．

2次元定形波は，これとともに進行する移動座標系から見る時，パラメーター α，β によって完全に定まる．このように現象を定常化するために用いた移動性座標系においては，任意の断面を通過する線流量 q' は $q'=\phi(x,\eta)-\phi(x,-1)=-\mu$ となっている．ところが，この座標系は静止座標系から見ると波の位相速度 C で移動しているので，静止座標系から観測した一周期平均の線流量 $\bar{q}$ は，$\bar{q}=q'+C=-\mu+C$ である．静止座標系において $\bar{q}=0$ なる条件を与えれば波の位相速度は $C=\mu$ となる．ただし，本節の議論における物理量はすべて無次元量であることに注意する．一方，移動座標系における水粒子の水平速度 u を Euler 的に記述する時，直観的にはその定数項の符号を変えたものが波速になっていると考えられる．しかしながら，この考え方に基づいて波速を定義する時，一周期平均の線流量 $\bar{q}$ は，Stokes 波においては2次，cnoid 波においては1次の order の量となる．これがいわゆる全断面にわたる質量輸送であるが，こうした波速の定義には物理的に明確な意味はない．

本来，無限領域を伝播する波は，初期値問題として解かない限り定まらない[10]．これを Rayleigh の方法で定常化し，固有値問題としてとり扱かう場合，波速と一様流を区別することは不可能である．

6. Radiation Stress

Rayleigh の方法で定常化した座標系における Stokes 波の速度ポテンシャル ϕ は，

$$\left.\begin{aligned}&\phi=-C_0x-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{g}{k}\tanh kh\\&\quad\times\frac{\cosh 4kh+8}{8C_0\sinh^4 kh}x+\frac{H}{2}C_0\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\\&\quad\times\sin kx+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{3kC_0}{4\sinh^4 kh}\\&\quad\times\cosh 2k(z+h)\sin 2kx+O(H^3)\\&C_0=\left(\frac{g}{k}\tanh kh\right)^{1/2}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

で与えられる．ただし，x,z はそれぞれ水平方向，およ

び鉛直上向きにとった座標，H は波高，k は波数，h は静水面から測った水深，g は重力の加速度で，これらはすべて次元量である．ここで，質量輸送が存在しないものとすれば，静止座標系における速度ポテンシャル $\tilde{\phi}$ および C 波速はそれぞれ次式のように定まる．

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\phi}=&-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{kC_0\cosh kh}{h\sinh kh}\tilde{x}\\&+\frac{H}{2}C_0\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin k(\tilde{x}-Ct)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{3kC_0}{4\sinh^4 kh}\\&\times\cosh 2k(z+h)\sin 2k(\tilde{x}-Ct)\\C=&C_0+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{g}{k}\tanh kh\frac{\cosh 4kh+8}{8C_0\sinh^4 kh}\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{kC_0\cosh kh}{h\sinh kh}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(24)$$

ここに，$\tilde{x}$ は固定座標において波の進行方向にとった座標である．次に，この波が一様な流れ Q と共存する場合を想定すると，鉛直方向に一様な流速

$$U=\frac{Q}{h+\bar{\eta}}\quad\cdots\cdots(25)$$

が存在することになる．ここに，$\bar{\eta}$ は平均水位の上昇量である．この時，速度ポテンシャル ϕ' および C' はそれぞれ，

$$\left.\begin{aligned}\phi'=&Ux-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{kC_0\cosh kh}{h\sinh kh}x\\&+\frac{H}{2}C_0\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin k(x-(C+U)t)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{3kC_0}{4\sinh^4 kh}\\&\times\cosh 2k(z+h)\sin 2k(x-(C+U)t)\\C'=&C+U\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

で与えられる．

Longuet-Higgins ら[11),12)]は，摂動法によって波と波もしくは波と流れの相互干渉に考察を加え，radiation stress の概念を導いた．彼らはこうした複数の現象が共存する場の相互干渉の問題を考え，また非一様な波の場の解析を行なった．これら以外にも，例えば，波高が徐々に増大するといった非定常過程の現象に伴ない，非線形効果によって wave-set-down や質量輸送が生じることも考えられる．ここでは，定常過程の波について wave-set-down や質量輸送が存在するか否かを論じるために，緩かに変化する斜面上の進行波を考える．水深の変化が緩かであることから定形波理論が近似的に成立するものとし，微小振幅波のポテンシャルから流速の周期的な部分 u' および v' の関数形を求めると，

$$\left.\begin{aligned}u'=&\frac{\partial\phi'}{\partial x}\doteqdot\frac{H}{2}kC_0\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\\&\times\cos k(x-(C+U)t)\\v'=&\frac{\partial\phi'}{\partial x}\doteqdot\frac{H}{2}kC_0\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\\&\times\sin k(x-(C+U)t)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

となる．一様流をも含めた速度分布 $u=\bar{u}+u'$, $v=v'$ を考え，運動量保存の式と連続の式に平均化操作を行なうと，波の周期に比して緩かに変化する流れの方程式が得られる[13)]．一方，U が H^2 の order であれば定形波の解 (26) は

$$\begin{aligned}\phi'=&Ux-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{kC_0\cosh kh}{h\sinh kh}x\\&+\frac{H}{2}C_0\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin k(x-C_0t)\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{H}{2}\right)^2\frac{3kC_0}{4\sinh^4 kh}\cosh 2k(z+h)\\&\times\sin 2k(x-C_0t)+O(H^2)\quad\cdots\cdots(28)\end{aligned}$$

と書かれる．Longuet-Higgins は波の摂動解の H^2 のオーダまでに意味を持たせて議論しており，速度ポテンシャルに関する上記の表示はこれと同等の近似度を有するものである．波高は，エネルギー保存の式

$$EC_g=\text{const.}\quad\cdots\cdots(29)$$

から求められる．ここに，C_g は波の群速度である．また，圧力方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\phi_x^2+\phi_z^2)++\frac{P}{\rho}+z=F(t)\quad\cdots\cdots(30)$$

において，時間の任意関数 $F(t)$ は Euler の方程式を x もしくは z で積分した際に現われるものであり，境界条件から定まる．また，この形では速度ポテンシャルの定義 $u=\partial\phi/\partial x$, $v=\partial\phi/\partial z$ に際して，ϕ が t のみの項を含まないとしても一般性を失わない．式 (28) を用いて，無限遠点 $x\to-\infty$ の速度ポテンシャルを求め，これから $F(t)$ を定めると，

$$F(t)=\frac{H_\infty^2}{8}\frac{(k_\infty C_\infty)^2}{2\sinh^2 k_\infty h_\infty}\quad\cdots\cdots(31)$$

ここに，添字 ∞ は無限遠点における諸量の値を示す．自由表面における圧力方程式は

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\eta)+\frac{1}{2}\{\phi_x(x,\eta)^2+\phi_z(x,\eta)^2\}+\eta=F(t)\quad\cdots\cdots(32)$$

である．これに式 (28) を代入して，η を H^2 の order まで正しく求め，時間平均 $\bar{\eta}$ をとれば

$$\bar{\eta}=\frac{H_\infty^2}{8}\frac{(k_\infty C_\infty)^2}{2\sinh^2 k_\infty h_\infty}-\frac{H^2}{8}\frac{(kC_0)^2}{2\sinh^2 kh}\cdots(33)$$

角周波数 $\sigma=kC_0=k_\infty C_\infty$ を用いて上式はまた

$$\bar{\eta}=-\frac{\sigma^2}{16g}\left(\frac{H^2}{\sinh^2 kh}-\frac{H_\infty^2}{\sinh^2 k_\infty h_\infty}\right)\cdots\cdots(34)$$

と書かれる．これまでの議論に，角周波数 σ を用いなか

ったのは，周期が座標の移動速度に応じて変化するからである．式 (34) は，平均水位の変動すなわち wave-set-down を示すものであり，Longuet-Higgins らが radiation stress 項を含む平均化された運動量式を積分して求めた表示[14]と完全に一致している．Longuet-Higgins が運動量式に平均操作をほどこし，これを積分したのに対し，ここでは運動量式の積分形である圧力方程式の時間平均をとったもので，表記の精度に注意を払えば，両者が一致することは当然である．マクロ的にとらえれば，振幅の増大に伴なう平均的な運動エネルギーの増大に応じて，wave-set-down による平均水位の低下が生じていることになるが，そのメカニズムの詳細を見ると局地的に radiation stress と平均水位勾配とが釣り合っているということである．

砕波後の極浅領域では，乱れが卓越し波動エネルギーが保存されない．従って，砕波帯内の wave-set-up に関して同様の考え方を押し進めるためには，圧力方程式において乱れに伴なう水頭損失を考慮する必要がある．

参考文献

1) 椎貝博美・京藤敏達: 流体力学に用いられる摂動法について, Nagare, 13-4, pp. 14～18, 1981.
2) 椎貝博美・京藤敏達: 微分摂動法による厳密解――流体力学への応用例――, ながれ, 1-4, pp. 373～381, 1982.
3) Joseph, D. D. and D. H. Sattinger: Bifurcation time periodic solutions and their stability, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 45, pp. 79～109, 1972.
4) 近藤次郎: 技術者・研究者のための応用数学（下），丸善, pp. 268～316, 1965.
5) Lyne, W. H.: Unsteady viscous flow over a wavy wall, Jour. Fluid Mech., Vol. 50, pp. 33～48, 1971.
6) Benjamin, T. B.: Shearing flow over a wavy wall, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, pp. 161～205, 1959.
7) van Dyke, M.: Analysis and improvement of perturbation series, Q. Jour. Mech. Appl. Math., Vol. 27, pp. 423～450, 1974.
8) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦: 有限振幅波理論の適用範囲について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 10～14, 1977.
9) Littman, W.: On the existence of periodic waves near critical speed, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 10, pp. 241～269, 1957.
10) Stoker, J. J.: Some remarks on radiation conditions, Proc. of Symposia in Appl. Math., Vol. 5, pp. 97～102, 1952.
11) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, pp. 565～583, 1960.
12) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Jour. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 529～549, 1960.
13) Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 261p., 1969.
14) Longuet-Higgins, M. S. and R. W. Stewart: Radiation stresses in water waves; a physical discussion, with applications, Deep-Sea Research, Vol. 11, pp. 529～562, 1964.