

波浪の非線型性とその記述パラメーター

合 田 良 実*

1. ま え が き

水面波は、第1近似としては線型な正弦波およびその重ね合わせとして取り扱われるが、実際には非線型な性質も強く、これを無視することができない。このため、規則波については各種の有限振幅波の理論が導かれ、波形、粒子運動等が研究されている。また、規則的な深海波が進行とともに変形し、複数の群波に分裂する^{1),2)}のも非線型な現象の一つである。海面の不規則波では、波形水位の頻度分布の正規分布からのずれや、周波数スペクトルに時に見られる高調波の副次ピークなどが、波浪の非線型性の現われである。

近年は、波浪の非線型性の研究が活発である。たとえば海面波を線型スペクトルの概念ではなく、卓越波のストークス波分散として説明しようとする試みがいろいろなされている³⁾⁻⁵⁾。ただし、現在のところ深海波に限定されていて、非線型性が強まる浅海波にまでは踏み込んでいない。

こうした研究の前提としては、まず水面波の非線型性がどの程度のものかを的確に把握しておく必要がある。本論文はこうした観点から、深海波から長波に至る波浪の非線型性の統一的記述を試みるものである。

2. 非線型パラメーターの提唱

深海波では、波形勾配 H/L が非線型性を表わすパラメーターである。一方、長波領域ではアーセル数⁶⁾ HL^2/h^3 によっていろいろな現象が説明できる。そこで、この両者を接続するものとして次のパラメーターを考える。

$$\Pi = (H/L_A) \coth^3 k_A h \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$\omega^2 = (2\pi/T)^2 = g k_A \tanh k_A h, \\ k_A = 2\pi/L_A \quad \dots\dots\dots (2)$$

以下では、このパラメーター Π によって波浪の非線型性のかなりのものが統一的に記述できることを示す。

3. 表面波形の非線型性

(1) 規則波の理論波形

深海域から浅海域の有限振幅波としてストークス波の第3次近似解⁷⁾を用いると、その表面波形は

$$k\eta = \left[\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^3 b_{11} \right] \cos \theta + \varepsilon^2 b_{22} \cos 2\theta \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^3 b_{33} \cos 3\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{8} (3 \coth^4 kh + 8 \coth^2 kh - 9) \\ b_{22} &= \frac{1}{4} (3 \coth^3 kh - \coth kh) \\ b_{33} &= \frac{3}{32} (9 \coth^6 kh - 3 \coth^4 kh \\ &\quad + 3 \coth^2 kh - 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

この解は、Skjelbreia と Hendrickson⁸⁾ のものと形がやや異なるけれども、実質的には同一である⁷⁾。

一方、長波領域から浅海域の有限振幅波としてはクノイド波の第2次近似解⁹⁾を用いる。岩垣¹⁰⁾によると、その表面波形は次のように表わされる。

$$\frac{\eta}{H} = cn^2 \left(2K \frac{x}{L}, \kappa \right) \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \right. \\ \left. \times \left[1 - cn^2 \left(2K \frac{x}{L}, \kappa \right) \right] \right\} - \frac{\eta_t}{H} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに h_t は、波の谷からの水深である。数値計算では κ と H/h を初期値とし、第1次近似解の η_t/H を用いて h_t/h の初期値を求め、波形算定後に h_t を修正した。周期は波長/波速で求め、これから微小振幅波の波長 L_A を算出した。

図—1は $\Pi \approx 0.10$ および 0.35 についてストークス波とクノイド波の波形を比較したものである。前者はほとんど一致し、後者はストークス波で3倍周波数成分による2次波峰が現われているものの波頂高は一致している。

ストークス波については、 $h/L_A = 0.05 \sim 1.0$ 、クノイド波については $\kappa^2 = 0.5 \sim (1-10^{-9})$ の範囲について計算し、波頂高比 η_0/H 、波形のひずみ度 $\sqrt{\beta_1}$ 、相対波高比

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 水工部

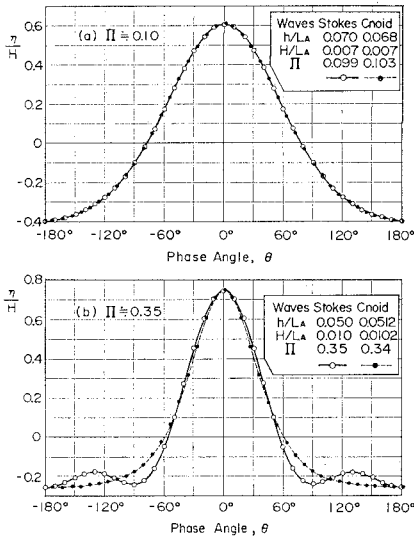


図-1 ストークス波とクノイド波の波形の比較

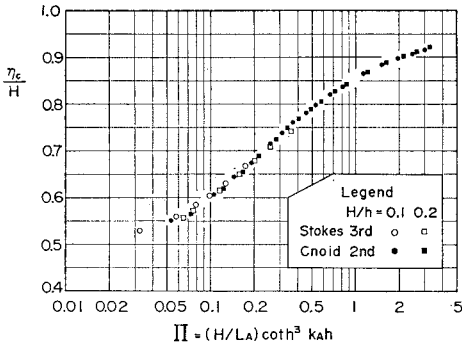


図-2 非線形性パラメーター Π の関数としての相対波頂高 η_c/H

H/η_{rms} を求めた。このうち η_c/H を新しいパラメーター Π の関数として 図-2 に示す。 H/h を 0.1 と 0.2 に限定すると、ストークス波とクノイド波は滑らかに接続する。ストークス波の場合、 η_c/H は $\Pi' = (H/L_A)(3 \coth^3 k_A \cdot h - \coth k_A h)$ のパラメーターを使うほうが全計算値が揃うけれども、式 (1) の Π でも h/L_A ほどの差は小さい。波形のひずみ度の場合、ストークス波では見掛け上 2 次波峰が出現するため $\Pi \geq 0.15$ でクノイド波からずれ始める。

(2) 規則波の表面波形の実験値

著者が以前に測定した $h/L_A = 0.05 \sim 0.5$ の範囲の波形データ¹¹⁾について理論値と比較したのが 図-3, 4 である。前者の波頂高比は理論値が実験値の上限に近い。これは、実験波形に 2 次波峰が発生していたためで、特に $h/L_A = 0.05$ のデータがそうである。砕波時の波形は 2 次波峰が比較的小さかったため、理論値に近いと思われる。

図-4 の H/η_{rms} は実験値のほうがやや大き目である。

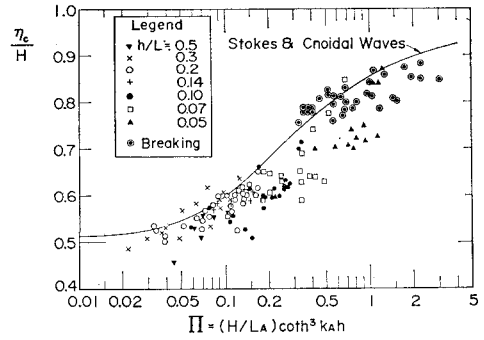


図-3 規則波実験による相対波頂高 η_c/H

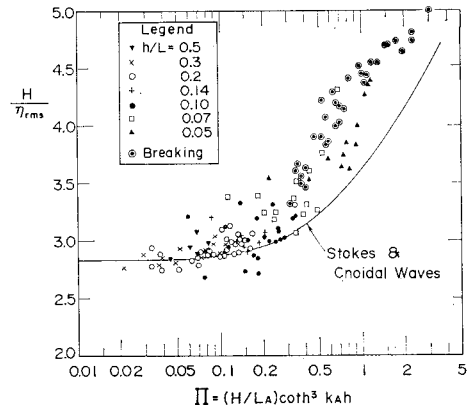


図-4 規則波実験による相対波高 H/η_{rms}

しかし、 Π の増加につれて H/η_{rms} の比が増大する傾向は明らかであり、 h/L_A の効果は、 Π によって適切に表示されていると考えられる。なお、理論値が低目なのは近似精度がまだ不十分のためと考えられる。

(3) 現地波浪の表面波形の非線形性

著者が以前に発表した留萌、苫小牧、山背泊、および金沢港の表面波形記録 79 例¹²⁾ならびに中央アメリカのコスタリカの典型的なうねりの記録 49 例¹³⁾について、波形の非線形性を解析した結果が 図-5~7 である。波頂高比は、記録中の最高波頂高比 η_{max} とその記録中の

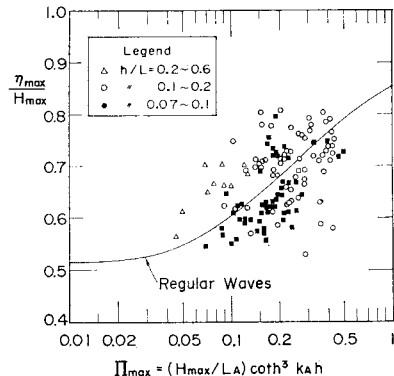


図-5 現地波浪データにおける相対波頂高 η_{max}/H_{max}

最高波高 $H_{\max}$ の比であり、パラメーターとしては $H_{\max}$ に対する $\Pi_{\max}$ を用いている。現地波浪ではデータのばらつきが大きい、平均的には理論曲線に乗っていると言える。

図-6 の波形のひずみ度 $\sqrt{\beta_1}$ は、 $H_{1/3}$ に対する $\Pi_{1/3}$ を用いると、平均的に理論曲線に一致する。Huang と Long¹⁴⁾ は $\sqrt{\beta_1} = 8\pi\eta_{\text{rms}}/L_p$ の関係を観測値の平均として提示しているが、今回の理論値はこれよりもやや低く、 $\Pi_{1/3}$ の小さい範囲では $\sqrt{\beta_1} \doteq 4.2\Pi_{1/3} = 4.2H_{1/3}/L_{1/3}$ (深海波の場合) で近似される。

図-7 の $H_{1/3}/\eta_{\text{rms}}$ の場合は Longuet-Higgins¹⁵⁾ が示したように、波群中の波高がレーリー分布し、個々の波は有限振幅の規則波の波形で近似できると仮定して理論曲線を求めた。深海波の波浪については $H_{1/3}/\eta_{\text{rms}}$ の比が理論値である 4.004 よりも小さい約 3.8 の値を平均的にとることが知られている。これは今回のデータでも $\Pi_{1/3} \leq 0.1$ の範囲で成立する。しかし、 $\Pi_{1/3}$ が大きく

なるにつれ $H_{1/3}/\eta_{\text{rms}}$ の比は明らかに増大する。その増大率は理論値よりも大き目であり、図-4 の傾向と対応している。

図-5~7 の結果は、特に浅海域における波浪データを解析する際には非線型性パラメーター Π の値に留意すべきことを示している。また、理論曲線との平均的一致は、浅海域の不規則波形を非線型な規則波の波列として取り扱うことの可能性を示唆していよう。

4. 周波数スペクトルの非線型性

(1) スペクトルの2次干渉理論

波形の非線型性に対応して、周波数スペクトルにも非線型干渉の結果による非線型成分が出現する。Tick¹⁶⁾、浜田¹⁷⁾の2次干渉理論によると、線型な1次スペクトルを $S^{(1)}(f)$ として、2次スペクトル $S^{(2)}(f)$ は次のように計算される。

$$S^{(2)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \omega_1) S^{(1)}(f_1 - f) S^{(1)}(f) df \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

$$K(\omega, \omega_1) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{gk k'}{\omega(\omega_1 - \omega)} + \frac{\omega(\omega_1 - \omega)}{g} - \frac{\omega_1^2}{g} + \omega_1^2 \left[\frac{g(\omega_1 - \omega)k^2 + g\omega k'^2}{\omega(\omega_1 - \omega)\omega_1} + \frac{2gk k'}{\omega(\omega_1 - \omega)} - \frac{\omega(\omega_1 - \omega)}{g} - \frac{\omega_1^2}{g} \right] \right\} [g|k + k'| \tanh |k + k'| h - \omega_1^2] \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad (\omega_1 - \omega)^2 = gk' \tanh k' h \quad \dots\dots\dots (8)$$

この理論は、単一方向の不規則波を対象としたものであるが、コスタリカで取得されたうねりの場合はほぼその条件を満足していたので、観測された周波数スペクトルをこの理論を用いて1次と2次のスペクトルに分離した一例が図-8である。水深は約17mである。主ピークの2倍周波数の所に見られる副ピークは2次干渉の結果であり、また $f < 0.03 \text{ Hz}$ の部分も同じく非線型成分である。2次スペクトルの計算値が部分的に観測値を超過しているのは、近似精度の不足のためと思われる。

この理論に基づき、水深が浅くなった場合の周波数スペクトルの変化を計算した1例が図-9である。ただし浅水変形は無視している。水深が浅くなるにつれて2倍周波数の位置に非線型成分からなる2次ピークが現われ低周波数領域でスペクトルと密度が増大する。なお、この理論では2次干渉までであるが、実際現象ではさらに高次の干渉のためにピークの3倍、4倍、...の周波数の位置にも副次ピークが出現する。

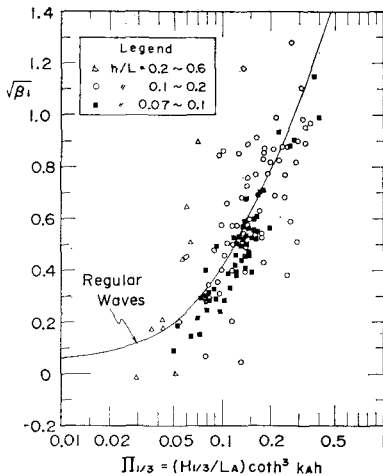


図-6 現地波浪データにおける波形のひずみ度 $\sqrt{\beta_1}$

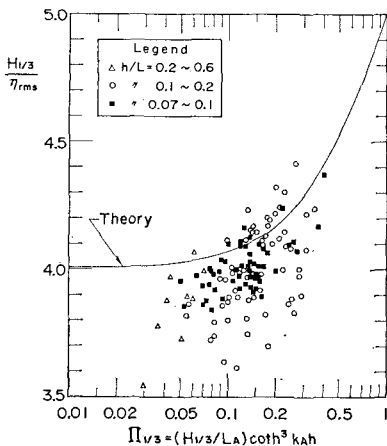


図-7 現地波浪データにおける相対波高 $H_{1/3}/\eta_{\text{rms}}$

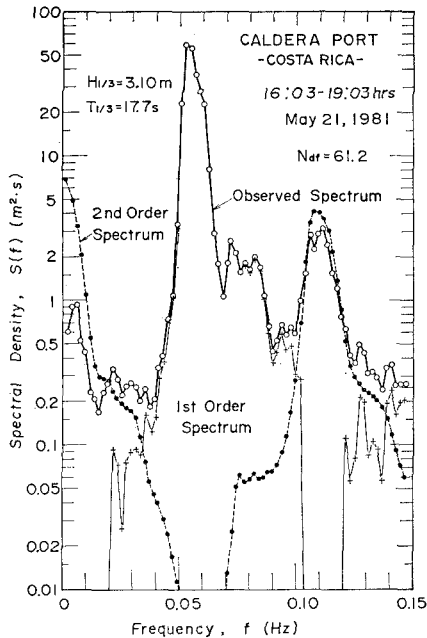


図-8 うねりのスペクトルとその非線型成分の分離例

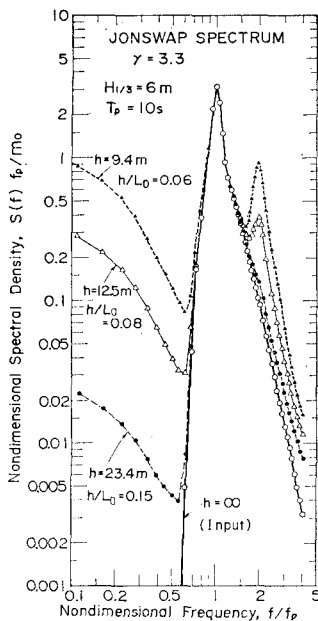


図-9 浅水域における非線型スペクトルの変化

(2) スペクトル形状パラメーターの変化

上述のようにスペクトルが見掛け上変化すると、その形状パラメーターにも影響が現われる。たとえば、高周波数側の勾配の指標として f_p と $2f_p$ の所のスペクトル値を結ぶ線を取ると、その勾配は図-10 のようになる。1次スペクトルには次の Wallops 型¹⁸⁾を設定している。

$$S(f) = \frac{(m/4)^{(m-1)/4}}{4\Gamma[(m-1)/4]} H_{1/3}^3 T_p (T_p f)^{-m}$$

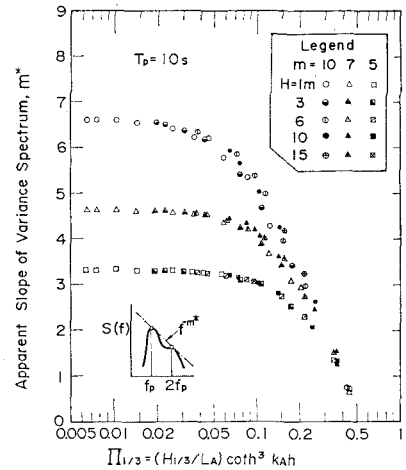


図-10 非線型干渉によるスペクトルの見掛けの勾配の変化

$$\times \exp \left[-\frac{m}{4} (T_p f)^4 \right] \dots \dots \dots (9)$$

図から明らかのように、1次スペクトルの勾配 m が大きいときは見掛けの勾配 m^* が $\Pi_{1/3}$ の増加につれて急速に減少し、 $\Pi_{1/3} \geq 0.3$ では1次スペクトルの形状にほとんど無関係になる。

図-11 は、コスタリカのうねりのスペクトルについて見掛けの勾配を求めた結果であり、 $m=10$ の理論曲線によく乗っている。また、日本沿岸の波浪については $m=5 \sim 7$ の場合の理論曲線にほぼ合うことが確かめられている。従来から、浅海域の波浪の周波数スペクトルは高周波数側の勾配が -4 乗前後であって、深海波の -5 乗則よりも緩勾配であることが指摘¹²⁾されていたが、これは図-9, 10 に示すようなスペクトル成分間の干渉による非線型効果と考えられる。

なお、ここには提示していないが、スペクトルの尖鋭度パラメーター Q_p も $\Pi_{1/3}$ の増加につれて減少し、 Q_p

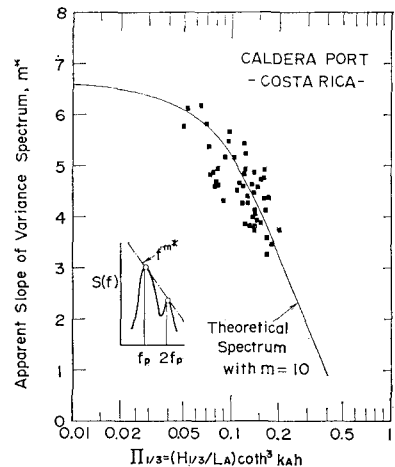


図-11 スペクトルの見掛けの勾配の観測例

の大きなものほど減少が著しい¹⁹⁾。

(3) 平均周期の変化

周波数スペクトルからは、その0次および2次モーメントの比の平方根として平均周期 $T_{0,2}$ が求められる。しかし、非線型干渉による2次ピークが出現すると、見掛け上2次モーメントの値が増大し、平均周期が短くなる。図-12は、これを現地波浪データについて調べた結果である。図中の曲線は JONSWAP 型の1次スペクトルに対する $T_{0,2}/T_p$ の変化の平均値である。図中の黒四角の記号のうち、周期比の値が 0.65 以上のものは典型的なうねりであって、スペクトルのピークが非常に鋭いデータである。

また、図-13はスペクトルから推定した平均周期と波形からゼロアップクロス法で求めた平均周期との $T_{0,2}/\bar{T}_z$ 比を示す。図-11, 12とも、実測データは2次干渉理論によるものよりも $T_{0,2}$ の減少率が大きい傾向にあるこれは3次以上の高次干渉のためと考えられる。

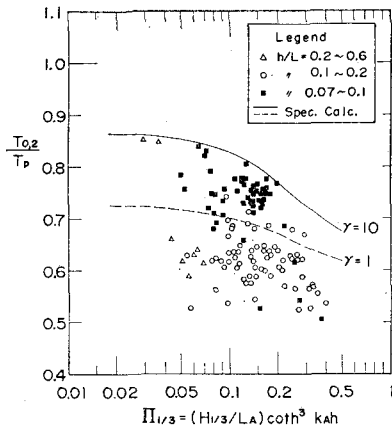


図-12 スペクトルによる平均周期 $T_{0,2}$ の変化

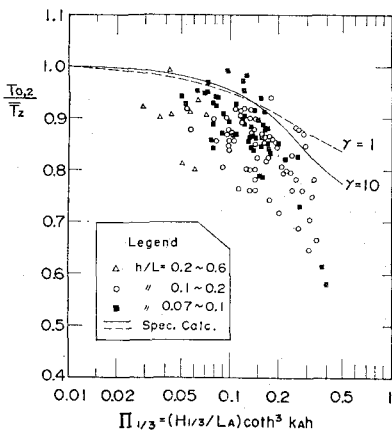


図-13 平均周期の計算値と測定値の比 $T_{0,2}/\bar{T}_z$ の変化

(4) サーフビートについて

図-8, 9に見られる低周波数領域におけるスペクトル密度の山は、サーフビートの発生を示唆する。数値計算の結果では、こうした低周波数領域のエネルギーは非線型パラメーター $\Pi_{1/3}$ とともに増大する。しかし、現地波浪データではこうした相関は必ずしも明瞭でない¹⁹⁾。したがって、サーフビートの成因としてはスペクトル成分の非線型干渉だけでなく、他の要因も考える必要がある。

5. 結 び

以上に示したように、新しく提案した非線型性パラメーター Π は、表面波形および周波数スペクトルに係わる非線型な諸現象を統一にかなり良く記述することができる。もちろん、半経験的なパラメーターであるので厳密な理論説明には不向きであろうが、波浪の非線型性の大要を把握する目的では適切な指標と思われる。今後の波浪に係わる調査・研究に役立てば幸いである。

参 考 文 献

- 1) Benjamine, B. T. and J. E. Feir: Fluid Mech., 27, pp. 417~430, 1967.
- 2) Su, M. Y.: Phys. Fluid, 25-12, pp. 2167~2174, 1982.
- 3) Lake, B. M. and H. C. Yuen: J. Fluid. Mech., 88, pp. 33~62, 1978.
- 4) Mollo-Christensen, E. and A. Ramamonjisoa: J. Geophys. Res., 83-C8, pp. 4117~4155, 1978.
- 5) Sobey, R. J. and E. J. Colman: Proc. ASCE, 108-WW3, pp. 272~290, 1982.
- 6) Ursell, F.: Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 49, pp. 685~694, 1953.
- 7) Goda, Y. and Y. Abe: 港湾技研報告, 7-3, pp. 3~58, 1968.
- 8) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson: Proc. 7th CCE, pp. 184~196, 1960.
- 9) Laitone, E. V.: J. Fluid Mech., 9, pp. 430~444, 1960.
- 10) 岩垣雄一: 京大防災研年報, 7, pp. 373~386, 1966.
- 11) Goda, Y.: Rept. Port & Harbour Res. Inst., No. 8, 74p., 1964.
- 12) 合田良実・永井康平: 港湾技研報告, 13-1, pp. 3~37, 1974.
- 13) Goda, Y.: 港湾技研報告, 22-1, pp. 3~41, 1983.
- 14) Huang, N. E. and S. R. Long: J. Fluid Mech., 101, pp. 179~120, 1980.
- 15) Longuet-Higgins, M. S.: J. Geophys. Res., 85-C3, pp. 1519~1523, 1980.
- 16) Tick, L. J.: Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., pp. 163~169, 1963.
- 17) Hamada, T.: Rept. Port & Harbour Res. Inst., No. 10, 28p., 1965.
- 18) Huang, N. E. et al.: J. Fluid Mech., 112, pp. 203~224, 1981.
- 19) Goda, Y.: 港湾技研報告, 22-3, pp. 3~30, 1983.