

斜面上の砕波の一理論とその応用

石 田 啓*・山 口 登**

1. 緒 言

浅海域における砕波現象を考究することは、海岸侵食の軽減防止のためにきわめて重要である。特に、岸沖方向漂砂と密接に関係すると思われる底面流速や、沿岸漂砂を支配する沿岸流は、砕波形態および砕波時の水粒子速度に強く依存すると考えられる。従来より、斜面上の波の波高変化については言うまでもなく、エネルギーフラックス法が有効であるが、波形変化を計算するためには例えば K-dv 方程式を近似的に解くとか、Biesel¹⁾ のようにラプラスの方程式の近似解を見い出すとかいったことが必要となる。いずれの方法から重要な結果が得られているが、いまだに砕波時の波形変化やその時の内部機構などを理論的に簡潔に表現できるまでには至っていないと思われる。

本研究では、一様勾配斜面上で砕波する波の理論解を得ることを目的とし、ラプラスの方程式を境界値問題として近似的に解くことを試みるが、条件式をデカルト座標系から楕円筒座標系に変換すると、一様水深場の理論と同様の形になり、取り扱いがきわめて容易になる。この近似解の妥当性を議論するため、斜面上の波の変形および水粒子速度に関する実験を行い、実験値と計算値との比較検討を行う。

2. 理 論

(1) 基礎方程式

水平座標 x 、鉛直座標 y 、時間 t および速度ポテンシャル ϕ を、沖波波数 k_0 および角周波数 σ を用いて、

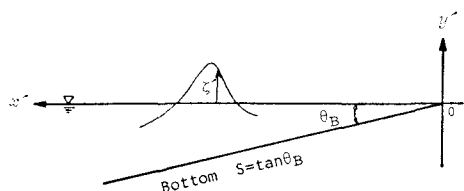


図-1 座 標 系

$x' = k_0 x$, $y' = k_0 y$, $t' = \sigma t$, $\phi' = (k_0^2/\sigma)\phi$ と無次元化する。

図-1 に示すデカルト座標 (x', y') と、楕円筒座標 (ξ, η) との関係は、 $x' = \cosh \xi \cos \eta$, $y' = \sinh \xi \sin \eta$ で与えられる。 (ξ, η) 座標によるラプラスの方程式は、 (x', y') 座標の場合と全く同じ形になり、

$$\phi'_{\xi\xi} + \phi'_{\eta\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。底勾配は、 $\tan \theta_B = -y'/x' = -\tanh \xi \tan \eta$ であるが、 $\tanh \xi \approx 1$ となるような ξ の領域においては、 $\eta \approx -\theta_B$ と見なすことができる。従って、底面条件は

$$\phi'_{\eta} = 0; \quad \eta \approx -\theta_B \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。また水面における力学および運動学的条件式は、水面を $y' = \zeta'(x', t')$ と表わすと、

$$\phi'_{t'} + (\phi'^2_{\xi} + \phi'^2_{\eta})/2R + \zeta' = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} &\zeta'_{t'} + \{\sinh^2 \xi \cos^2 \eta \phi'_{\xi} \zeta'_{\xi} + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta \phi'_{\eta} \zeta'_{\eta} \\ &\quad - \cosh \xi \sinh \xi \cos \eta \sin \eta \\ &\quad \times (\phi'_{\xi} \zeta'_{\eta} + \phi'_{\eta} \zeta'_{\xi})\}/R^2 \\ &\quad - (\cosh \xi \sin \eta \phi'_{\xi} + \sinh \xi \cos \eta \phi'_{\eta})/R = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに、 $R = \sinh^2 \xi + \sin^2 \eta$ であるが、水面における η の値を $\eta \approx 0$ と近似すると、 $R = \sinh^2 \xi$ となり、従って、式 (4) は、

$$\zeta'_{t'} + \phi'_{\xi} \zeta'_{\xi} / \sinh^2 \xi - \phi'_{\eta} / \sinh \xi = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

(2) 接動法による近似解

適当な微小量 ε により、 ϕ' および ζ' を

$$\begin{aligned} \phi' &= \varepsilon \phi'_1 + \varepsilon^2 \phi'_2 + \dots, & \zeta' &= \varepsilon \zeta'_1 + \varepsilon^2 \zeta'_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

のようにべき級数展開する。式 (1) から式 (4) に、式 (6) を代入し、 ε のオーダー および ε^2 のオーダーの項に関する条件式を求めると、

$$\left. \begin{aligned} &\phi'_{1\xi\xi} + \phi'_{1\eta\eta} = 0 \\ &\phi'_{1\eta} = 0; \quad \eta = -\theta_B \\ &\zeta'_1 + \phi'_{1t'} = 0; \quad y' = \varepsilon \zeta'_1 \\ &\zeta'_{1t'} - \phi'_{1\xi} / \sinh \xi = 0; \quad \eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 福島県

$$\left. \begin{aligned} \phi'_{2\xi} + \phi'_{2\eta} &= 0 \\ \phi'_{2\eta} &= 0; \quad \eta \approx -\theta_B \\ \zeta'_2 + (\phi'^2_{1\xi} + \phi'^2_{1\eta})/2R + \phi'_{2t} &= 0; \\ y' &= \varepsilon \zeta'_1 + \varepsilon^2 \zeta'_2 \\ \zeta'_{1t} + \phi'_1 \zeta'_{1\xi} / \sinh^2 \xi - \phi'_{2\eta} / \sinh \xi &= 0; \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

$\eta \approx 0$

となる。式 (7) の解は、 $\phi'_1 = A_1 \cosh m(\eta + \theta_B) \sin(m\xi + t')$ および $\zeta'_1 = -A_1 \cosh m(\eta^* + \theta_B) \cos(m\xi + t')$ となるが、ここに、 η^* は水面を表わす η 座標であり、 $\xi \rightarrow \infty$ では、 $\eta^* \rightarrow 0$ となる。定数 A_1 は、深海波と接続することにより定めるが、沖波の振幅 a_0 に k_0 を乗じた無次元振幅 a'_0 を ε に選べば、 $A_1 = -1/\cosh m\theta_B$ となる。従って、第 1 近似解は、

$$\phi'_{1st} = -a'_0 \{ \cosh m(\eta + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \times \sin(m\xi + t') \dots \dots \dots (9)$$

$$\zeta'_{1st} = a'_0 \{ \cosh m(\eta^* + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \times \cos(m\xi + t') \dots \dots \dots (10)$$

となる。ここに m は、式 (7) の水面における条件式より得られる次式、

$$\phi'_{1t'} + \phi'_{1\xi} / \sinh \xi = 0; \quad \eta = \eta^* = 0 \dots \dots \dots (11)$$

から決定されるパラメーターである。

ε^2 のオーダーの解は、 $\phi'_2 = A_2 \cosh 2m(\eta + \theta_B) \sin 2(m\xi + t')$ と仮定し、 $\xi \rightarrow \infty$ でストークス波²⁾と接続することにより、 $A_2 = -1/(4 \cosh 2m\theta_B)$ が得られる。従って、第 2 近似解は、

$$\phi'_{2nd} = -a'_0 \{ \cosh m(\eta + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \times \sin(m\xi + t') - (a'_0/2)^2 \times \{ \cosh 2m(\eta + \theta_B) / \cosh 2m\theta_B \} \times \sin 2(m\xi + t') \dots \dots \dots (12)$$

$$\zeta'_{2nd} = a'_0 \{ \cosh m(\eta^* + \theta_B) / \cosh m\theta_B \} \times \cos(m\xi + t') + (a'_0/2)^2 \times \{ 2 \cosh 2m(\eta^* + \theta_B) / \cosh 2m\theta_B - (m/\cosh m\theta_B)^2 / R \} \cos 2(m\xi + t') \dots (13)$$

となる。ここに、 $a'_0 = \pi(H_0/L_0) \{ 1 - (3\pi^2/8)(H_0/L_0)^2 \}$ である。

3. 実験装置および方法

実験は、金沢大学工学部土木工学科河海工学実験室に設置された長さ 14m、幅 50cm、深さ 64cm の両面ガラス張りの造波水槽を用いた。水槽の一端にはプランジャー型造波機が設置されており、他端に 1/10 勾配の斜面を設置した。時間波形は、一様水深部と斜面上の 2 か所に設置した容量式波高計により測定したが、砕波形態、砕波水深 h_b 、および砕波波高 H_b の測定には、8mm 撮影機を用いた。斜面上底面の水粒子速度の測定には、比重が 1.05 で直径が 1.5mm のポリマースチレン粒子を用い、8mm 撮影機により写真撮影した。一様水深部の水深は $h=40$ cm とし、波は、周期が $T=0.68 \sim 1.50$ sec で沖波波高が $H_0=2.7 \sim 7.8$ cm の範囲内のものを用いた。

4. 結果および考察

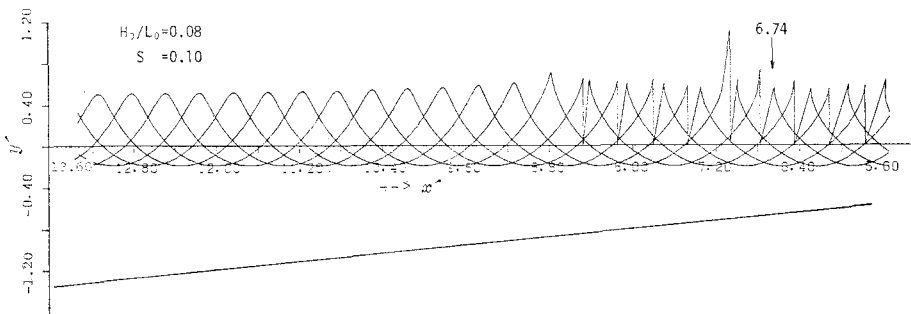
(1) オイラー的方法による砕波波形の計算³⁾

水面 y' は、 $y' = \zeta'(x', t') = \zeta'(\xi, \eta, t') = \zeta'(\xi, \eta^*(\xi), t') = \sinh \xi \sin \eta^*$ で与えられるため、 η^* は $\eta^* = \sin^{-1}(\zeta' / \sinh \xi)$ と表わされる。この η^* を式 (13) に代入すると、水面形 ζ' が右辺に ζ' を含んだ形で得られる。従って、実際に ζ' を求めるためには、逐次近似法などにより、収束計算を行う必要がある。

図—2 は、底勾配が $S = \tan \theta_B = 0.1$ で沖波波形勾配が $H_0/L_0 = 0.08$ の場合の波の変形を X - Y プロッターにより描いたものであるが、水面の値が発散する時には、プロッターペンは $y'=0$ に戻るように指示されている。図中の矢印は合田⁴⁾による砕波点を示すが、計算波形は合田の砕波点近くで波峰が発散し、砕波の発生を示唆している。砕波形態は、波頭が崩れながら進行する崩れ波型砕波である。

(2) ラグランジュ的方法による砕波波形

平均水面 $(x', 0)$ における水粒子の水平移動量 X' および鉛直移動量 Y' は、式 (12) の ϕ' を用いると、



図—2 オイラー的方法による砕波波形

$$X' = \int \phi'_{x'}|_{\eta=0} dt' = \{-a'_0 m \sin(m\xi + t') - (a'_0/2)^2 m \sin 2(m\xi + t') / \sinh \xi \dots\dots (14)$$

$$Y' = \int \phi'_{y'}|_{\eta=0} dt' = \{a'_0 m \tanh m\theta_B \cos(m\xi + t') + (a'_0/2)^2 m \tanh 2m\theta_B \cos 2(m\xi + t') / \sinh \xi \dots\dots (15)$$

となる。従って、水面形の座標 (x^*, y^*) は、 (x^*, y^*)

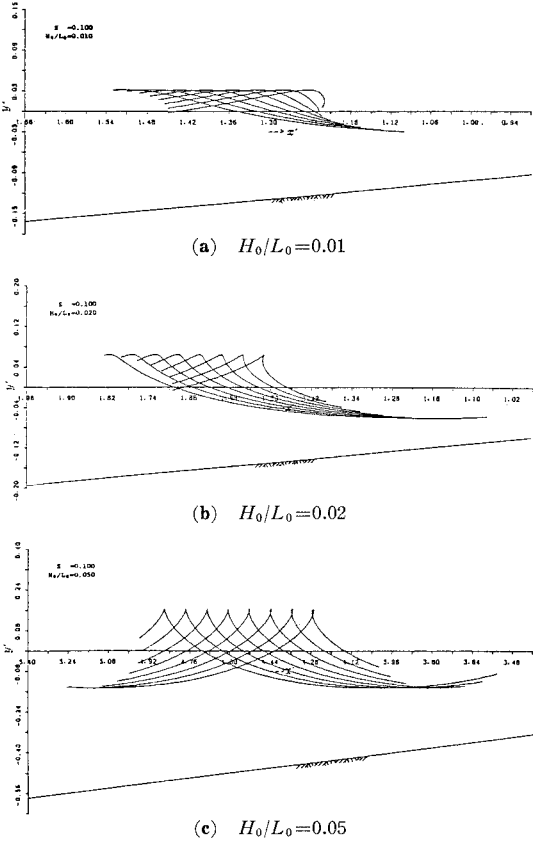


図-3 沖波波形勾配による砕波波形の変化

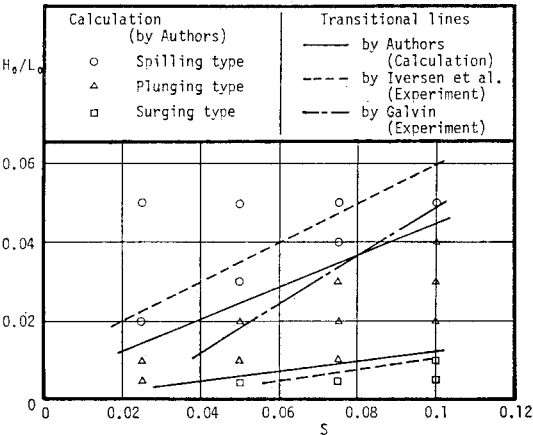


図-4 砕波形態区分

$=(x', 0) + (X', Y')$ で与えられる。

図-3 に、底勾配を $S=0.1$ とし、沖波波形勾配 H_0/L_0 を順次変えた場合の砕波時の波形変化を示す。(a) の $H_0/L_0=0.01$ の場合には、波は進行に伴い前傾化するが、波峰の先鋭化は見られず、砕け寄せ波型砕波となる。(b) の $H_0/L_0=0.02$ の場合には、波は進行に伴い前傾化し、砕波点付近で波峰が飛び出す巻き波型砕波となる。(c) の $H_0/L_0=0.05$ の場合には、波形の前傾化は見られず、波峰が先鋭化して崩れる崩れ波型砕波となる。

図-4 に、従来の砕波形態区分と本計算結果との比較を示す。図中、○印、△印および□印は、本計算による崩れ波型、巻き波型および砕け寄せ波型砕波であり、実線はそれらの限界を示す。点線および一点鎖線は、Iversen⁵⁾ および Galvin⁶⁾ による分類の限界を示す。本計算結果では、砕け寄せ波型から巻き波型に移る H_0/L_0 の限界値は Iversen の結果より若干大きく、また、巻き波型から砕け寄せ波型に移る限界値は Iversen の結果よりかなり小さいが、Galvin の結果とはほぼ一致している。

図-5 には、 $H_0/L_0=0.0076$ の波が $S=0.1$ の斜面上で砕波する状況を示すが、実線は本実験結果であり、点線は本計算結果である。図より、計算値の波高は実験値

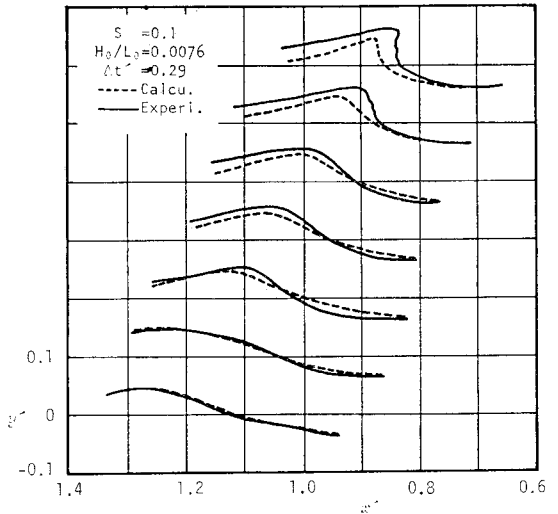
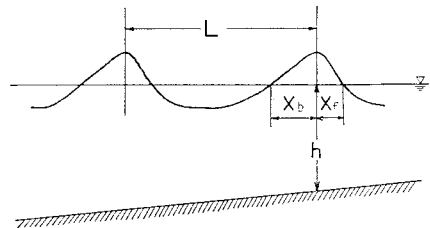


図-5 砕波波形の実験値と計算値の比較



$$K_g = X_r / X_b \quad K_s = (X_b + X_r) / L$$

図-6 波形の前傾度および尖鋭度

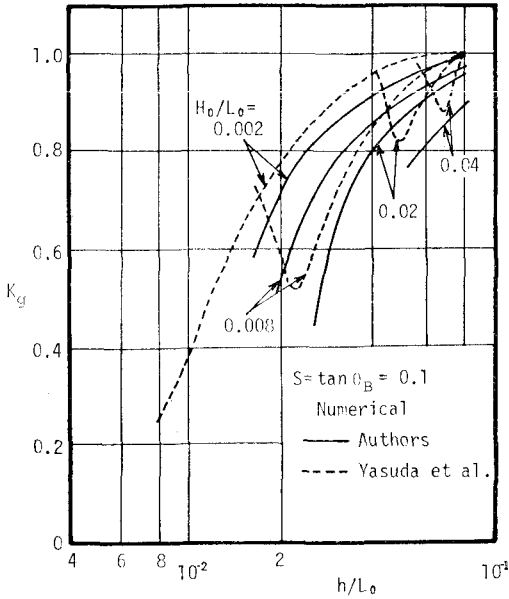


図-7 水深減少に伴う前傾度の変化

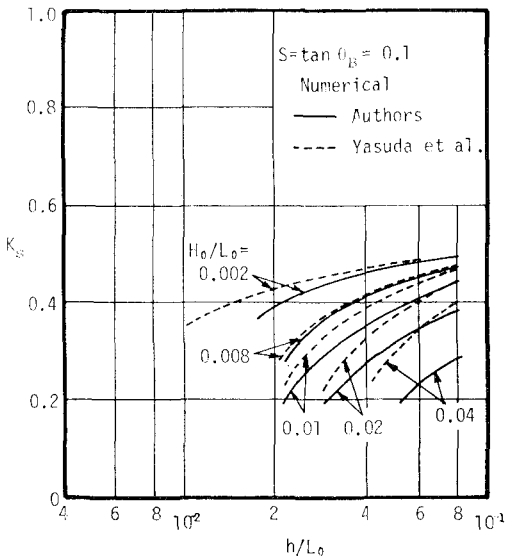


図-8 水深減少に伴う尖鋭度の変化

より若干小さくなるが、全般的な形状については、両者はほぼ良く対応していると言える。

次に、本計算法による斜面上の波の前傾化および尖鋭化の程度を、図-6 に示す K_θ および K_s を用いて評価する。図-7 および 図-8 は、 $S=0.1$ の場合の水深減少に伴う K_θ および K_s の変化を、 H_0/L_0 をパラメータとして示したものである。図より、水深波長比 h/L_0 の減少

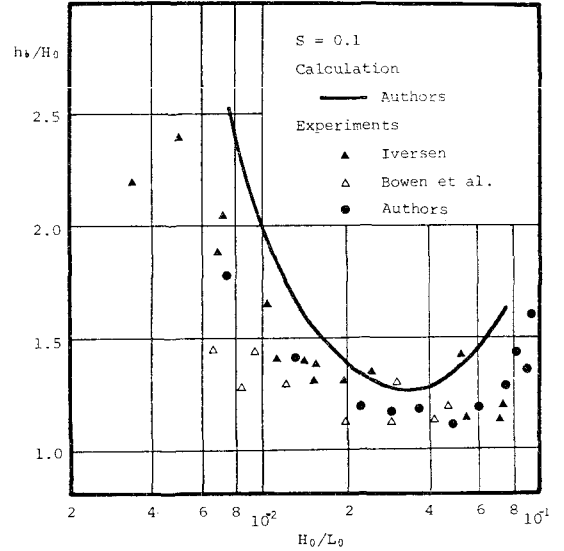


図-9 碎波水深の実験値と計算値の比較

に伴い、 K_θ および K_s が減少し、波の前傾化および尖鋭化が認められるが、この傾向は、同じ h/L_0 の値に対し、 H_0/L_0 が大きいほど著しく、また $K-dv$ 方程式を用いた安田ら⁷⁾の計算結果と良く対応している。

図-9 は、 $S=0.1$ の場合の、 H_0/L_0 と h_b との関係を示したものである。図中●印、▲印および△印は、著者ら、Iversen⁸⁾ および Bowen ら⁹⁾の実験結果であり、実線は本計算結果である。計算値は、全般的に実験値より若干大きい、全体の傾向は良く一致していると言える。

(3) 斜面上の波の水平方向水粒子速度

水平方向水粒子速度 u に k_0/σ を乗じて無次元化したものを u' と書くと、これは、

$$u' = \phi'_{x'} = (\sinh \xi \cos \eta \phi'_\xi - \cosh \xi \sin \eta \phi'_\xi) / R \quad \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる。

図-10 および 図-11 は、水深減少に伴う底面での u の変化を調べた結果であるが、縦軸は、それぞれ岸向きおよび沖向きの水粒子速度の最大値 u_c および u_t を $\sqrt{gh}$ で割って無次元化したものであり、横軸は h/L_0 である。実験に用いた波の諸元を表-1 に示すが、図中の折線が実験結果であり、実線は式 (16) より算出した計

表-1 底面水粒子速度の実験ケース

CASE	周 期 T (sec)	沖波波高 H_0 (cm)	沖波波長 L_0 (cm)	沖波波形勾配 H_0/L_0	碎 波 点 X_b (cm)	碎波波高 H_b (cm)	碎波形態
I-1	1.50	2.66	350.9	0.0076	47	5.80	Surging~Plunging
I-2	1.20	4.90	224.6	0.022	60	7.10	Plunging
I-3	1.00	5.71	156.0	0.037	69	7.40	Plunging
I-4	0.85	6.74	112.9	0.060	81	7.30	Spilling
I-5	0.76	7.58	90.0	0.084	109	7.50	Spilling
I-6	0.68	6.88	72.1	0.095	108	7.25	Spilling

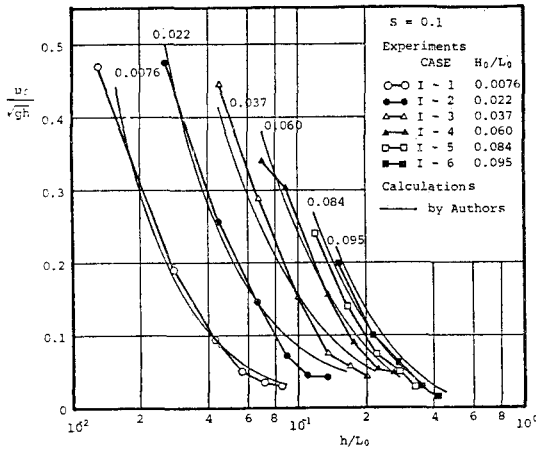


図-10 底面流速 u_c の実験値と計算値との比較

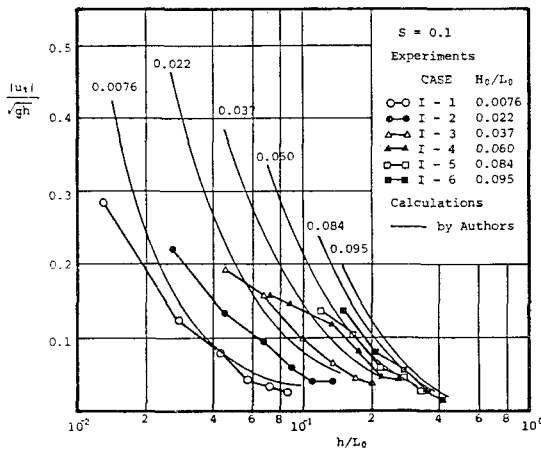


図-11 底面流速 n_c の実験値と計算値との比較

算結果である。図-10より、計算値と実験値はきわめて良く一致しており、水深減少に伴い $u_c/\sqrt{gh}$ が急激に増大することがわかる。図-11では、 H_0/L_0 が大きい場合には、計算値は実験値より大きくなり、両者の相違が著しいが、この原因については、現在必ずしも明白ではない。

最後に、水深減少に伴う波高変化については、エネルギーフラックス法により、 A_1 を順次変えることが考えられるが、これについては今後さらに検討する予定である。

5. 結 語

本研究では、まず砕波に至る斜面上の波の近似解を提示し、次に 1/10 勾配斜面を用いた実験結果および従来得られている結果と、この解を用いた計算結果との比較検討を行った。その結果、砕波形態の区分境界、砕波水深、波形の前傾度および尖鋭度ならびに水粒子速度は本近似解により、充分正しく算定されることがわかった。ただし、水深減少に伴う波高変化については、今後さらに検討を加える予定である。最後に、本研究を行うに際し、助力を惜しまなかった大学院生の細田宏之君および坂本仁司君に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Biesel, F.: Study of wave propagation in water of gradually varying depth, Gravity Waves, Nat. Bur. of Stand., Gaithersburg, Md., Circu. 521, pp. 243~253, 1952.
- 2) 土木学会編：水理公式集, 76p., 1971.
- 3) 石田 啓・山口 登：斜面上の Stokes 波の一理論, 自然災害科学, Vol. 1, No. 1, pp. 20~28, 1982.
- 4) 合田良実：砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第180号, pp. 39~49, 1970.
- 5) Iversen, H. W.: Waves and breakers in shoaling water, Proc. 3rd Conference on Coastal Engineering, pp. 1~12, 1951.
- 6) Galvin, C. J.: Breaker type classification on three laboratory breakers, Jour. Geophysical Research, Vol. 73, No. 12, pp. 3651~3659, 1968.
- 7) 安田孝志・山下隆男・後藤真太郎・土屋義人：K-dv 方程式による斜面上の波の変形, 第26回海岸工学講演会論文集, pp. 21~25, 1979.
- 8) Iversen, H. W.: Laboratory study of breakers, Proc. Symposium on Gravity Waves, U.S. Nat. Bur. of Stand. Circu. 521, pp. 9~32, 1951.
- 9) Bowen, A. J., P. L. Inman and V. P. Simmons: Wave 'set-down' and set-up, Jour. Geophysical Res., Vol. 73, pp. 2569~2576, 1968.