

有限要素法による斜面上の波の碎波変形と内部機構の解析

滝川 清*・岩垣雄一**・中川政博***

1. まえがき

沖から沿岸へ来襲する波浪は、その碎波変形とともに海岸構造物や海浜過程などに重大な影響を与える。しかしながら、水深が漸減する浅海域での碎波に至る変形過程は、強い非線形性が出現する遷移過程であり、理論解析上の困難さの問題に加えて、内部流速の測定など実験計測上の困難さの問題もあって碎波の内部機構に関しては、まだ不明な点が多い。傾斜面上での、このような波の変形過程に伴う水粒子速度などの変化特性についての研究も非常に少なく、Adeyemo¹⁾の実験的研究、岩垣・酒井²⁾の Stream function theory を用いた研究、安田ら³⁾の斜面上の $K-dV$ 方程式の数値計算による研究などがあるに過ぎない。

本研究は、このような碎波変形の内部機構を解明するために、有限要素法⁴⁾の適用を試みたもので、一様勾配の斜面上を進行する有限振幅波を取りあげ、レーザー Doppler 流速計 (L.D.V.) による水粒子速度の測定を行って有限要素法による数値計算の妥当性を検証するとともに、水粒子速度場など波動場の時間的・空間的な変化を碎波型と関連して考察したものである。

2. 有限要素法による有限振幅波動の解析方法

図-1 に示す任意の海底形状の 2 次元領域内で、速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ を有する波動の基礎式および境界条件は次のように表現される。

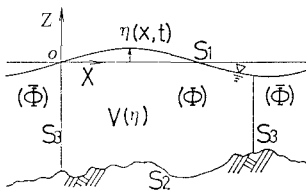


図-1 解析領域

解析領域 $V(\eta)$ 内で;

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

自由表面 S_1 上で;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (2)$$

および

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_z \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

不透過な境界 S_2 上で;

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

解析境界 S_3 で;

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \quad (5)$$

ここに、 n は境界外向法線方向、 n_z は n の z 軸方向余弦、また、 $\bar{\phi}$ は解析領域外部での速度ポテンシャルを意味する。この境界値問題に対して、極値化すべき汎関数 $\chi(t)$ は次式で示される。

$$\begin{aligned} \chi(t) = & \frac{1}{2} \int_{V(\eta)} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV \\ & + \frac{g}{2} \int_{S_1} \eta^2 dS_1 + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \eta dS_1 \\ & - \int_{S_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \phi dS_1 - \int_{S_3} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right) \phi dS_3 \end{aligned} \quad (6)$$

これを、独立変量 ϕ, η について Euler の第 1 変分を取ると、その停留条件より式 (1) から式 (5) の支配方程式がすべて同時に得られる。

この汎関数を用いた有限要素法による定式化は、文献 4) に示しており、ここでは多少の修正を加えながら解析手順に従って概略を述べる。まず、解析領域 $V(\eta)$ を三角形の要素群に分割して式 (6) の汎関数を各要素の節点値 $\{\phi\}, \{\eta\}$ で表現し、これの離散化を行なう。離散化された χ に変分原理を適用すると、結局、次の 2 組の連立方程式群が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_V (BB^T + CC^T) \{\phi\} \Delta \\ - \sum_{S_1} L \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} - \sum_{S_3} S \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_V \{\phi\}^T (BB^T + CC^T) \{\phi\} \frac{\partial (\Delta)}{\partial \eta} \\ + g \sum_{S_1} L \{\eta\} + \sum_{S_1} L \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 Δ は三角形要素面積、 ϕ は三角形要素の節点値を用いて $\phi = [N] \{\phi\}$ と表現し、 $B^T = [\partial N / \partial x]$ 、 $C^T = [\partial N /$

* 正会員 工修 熊本大学助手 工学部環境建設工学科

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

*** 学生会員 京都大学大学院工学研究科

$\partial z]$ である。また、 η は S_1 上の 2 節点で表現し、 $\eta=[L] \cdot \{\eta\}$, $L=\int_{\Omega} [L]^T [L] dS_1$ である。

ところで、自由表面 S_1 は、水面変動量 η の関数であるため、これに関係する要素の形状係数は非線形項が含まれる。そこで、増分法を導入して、この線形化を図る。すなわち、時刻 t_0 での ϕ_0, η_0 は Δt 時間後 $t=t_0+\Delta t$ で $d\phi, d\eta$ だけ増分するとき、 $\phi=\phi_0+d\phi$, $\eta=\eta_0+d\eta$ の関係を導入する。これを用いると式 (7), 式 (8) の非線形な係数マトリックス B, C は次のように書き改められる。

$$B=B_0+B_1\{d\eta\}, \quad C=C_0+C_1\{d\eta\} \quad \cdots \cdots (9)$$

また、時間項 $\partial\phi/\partial t, \partial\eta/\partial t$ に関しては簡単のため次の差分を適用する。時間間隔 Δt での増分 $d\phi, d\eta$ に対して、Heaviside 関数を内挿関数として

$$\left. \begin{aligned} d\phi &= \phi - \phi_0 = \left[\theta \frac{\partial\phi}{\partial t} + (1-\theta) \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_0 + E_a \right\} \right] \Delta t \\ d\eta &= \eta - \eta_0 = \left[\theta \frac{\partial\eta}{\partial t} + (1-\theta) \left\{ \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} \right)_0 + E_k \right\} \right] \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (10)$$

を用いる。添字 0 は時刻 t_0 での値であることを意味する。また、 E_a, E_k は非線形な水表面条件式 (2), (3) に対する解の精度向上のための誤差補正項であり、境界 S_1 上に関して次式により計算する。

$$\begin{aligned} -E_a &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta \\ -E_k &= \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{1}{n_z} \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

ここに、 $u=\partial\phi/\partial x$, $w=\partial\phi/\partial z$ である。

さらに、解析上の仮想境界 S_3 では、流体運動の連続性として、mass-flux, energy-flux の連続が満足されねばならないが、これを以下のように考える。

境界 S_3 での速度ポテンシャル $\bar{\phi}$ を無数の成分波の和として表現すると左右の S_3 境界で、

入射位置:

$$\bar{\phi}_{\text{inp}} = \sum \bar{\phi}_u + \sum \bar{\phi}_{rm}$$

通過位置:

$$\bar{\phi}_{\text{out}} = \sum \bar{\phi}_{tn} \quad (l, m, n=1, 2, \cdots) \quad \cdots \cdots (12)$$

ここに、 $\bar{\phi}_u, \bar{\phi}_{rm}, \bar{\phi}_{tn}$ は任意時刻での入射波、反射波および通過波の第 l, m, n 成分を意味する。 $\bar{\phi}_u$ は既知量であるが、反射および通過波に関しては無限個の未知量となり、このままでは解析できない。そこで、これに対して、各進行方向ごとに代表波 $\bar{\phi}_r, \bar{\phi}_t$ を選び、上式を近似して次式のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{\phi}_{rm} &= \bar{\phi}_r \sum \left(\frac{\bar{\phi}_{rm}}{\bar{\phi}_r} \right) \equiv \bar{\phi}_r R_r \\ &= \frac{\sigma_r}{k_r} \frac{\cosh k_r(h_i+z)}{\sinh k_r h_i} A_r \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{\phi}_{tn} &= \bar{\phi}_t \sum \left(\frac{\bar{\phi}_{tn}}{\bar{\phi}_t} \right) \equiv \bar{\phi}_t R_t \\ &= \frac{\sigma_t}{k_t} \frac{\cosh k_t(h_i+z)}{\sinh k_t h_i} A_t \end{aligned} \right\}$$

すなわち、任意時刻で、各進行方向ごとに成分波の“総和された波”とし、これを、未知定数をもつ 1 つの波で代表させて、近似的に取り扱うものである。さて、境界 S_3 での連続条件はすでに汎関数に導入され、最終的には、式 (7) の $(\partial\bar{\phi}/\partial n)$ を対応する節点ごとに、次式で与えればよい。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} \right)_{\text{inp}} &= l_{xi} \left(\sum_i \sigma_{ii} \frac{\cosh k_{ii}(h_i+z)}{\sinh k_{ii} h_i} \eta'_{ii} \right. \\ &\quad \left. - \sigma_r \frac{\cosh k_r(h_i+z)}{\sinh k_r h_i} A'_r \right) \\ \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} \right)_{\text{out}} &= l_{xi} \sigma_i \frac{\cosh k_i(h_i+z)}{\sinh k_i h_i} A'_i \quad \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

ここに、境界 S_3 は z 軸に平行に取るものとし、 l_{xi}, l_{xt} は各位置での外向法線の x 軸方向余弦、 h_i, h_t は各位置の水深であり、各波の k, σ は、それぞれ分散関係式を満たす。また、 $\eta'_{ii} = a_{ii} \cos(k_{ii}x - \sigma_{ii}t + \varepsilon_{ii})$, $A'_r = \eta'_r R_r = [a_r \cos(k_r x + \sigma_r t + \varepsilon_r)] R_r$, $A'_i = \eta'_i R_i = [a_i \cos(k_i x - \sigma_i t + \varepsilon_i)] R_i$, (ε は位相差) で表現される。

一方、energy-flux; $-\rho(\partial\phi/\partial t)(\partial\bar{\phi}/\partial n)$ は、これを近似的に $\int (\partial\phi/\partial t) dS_3 = \int (\partial\bar{\phi}/\partial t) dS_3$ として、各位置では次式で示される。

$$\begin{aligned} \sum_{S_3-\text{inp}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\} &= - \sum_i \frac{\sigma_{ii}^2}{k_{ii}} \frac{\sinh k_{ii}(h_i+\eta_0)}{\sinh k_{ii} h_i} \eta'_{ii} \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{k_r} \frac{\sinh k_r(h_i+\eta_0)}{\sinh k_r h_i} A'_r \\ \sum_{S_3-\text{out}} \bar{S} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\} &= - \sum_i \frac{\sigma_i^2}{k_i} \frac{\sinh k_i(h_i+\eta_0)}{\sinh k_i h_i} A'_i \end{aligned} \quad \cdots \cdots (15)$$

以上、境界 S_3 での流体運動の連続条件式 (14), 式 (15) を考慮し、先の式 (7), 式 (8) と連立させると、 $d\phi, d\eta, A'_r, A'_i$ を未知量とした多元方程式が得られる。これに、適当な初期条件を与えると、考える入射波に対応した任意形状および任意境界領域での有限振幅波の非定常な運動を計算することができる。なお、仮想境界 S_3 での上述の方法は、規則波のみならず不規則波の場合に対しても適用可能である。また、境界 S_3 で造波板などの運動による波の入射を考える場合は、対応する位置で流速 $\partial\bar{\phi}/\partial n$ を式 (14) に従って与えれば同様に計算できる。

3. 実験装置および実験方法

実験は、京都大学工学部土木工学教室地下実験室の波浪実験水槽 (長さ 30m, 幅 50m, 高さ 70cm) を用いた。この水槽中に、一様勾配の傾斜面を設置し、斜面最

表-1 実験ケース

Case	i	h _i (cm)	T(sec)	2ξ(cm)	H ₀ /L ₀	h _b (cm)	H ₀ (cm)	Type
1			1.0	6.5	0.0617	14.6	10.2	S
2	1/30	40.0	1.5	9.6	0.0293	14.3	11.7	S+P
3			2.5	16.4	0.0079	14.5	12.5	P
4			1.0	6.7	0.0735	16.1	10.8	S
5	1/20	35.0	1.5	11.7	0.0272	13.7	12.5	P
6			2.5	17.4	0.0083	13.4	11.3	P

S ; Spilling breaker , P ; Plunging breaker

上端から岸側は一定水深として、斜面上で砕波し遡上した波の引き波による逆流を防ぐようにした。実験は表-1に示すように、斜面勾配 $i=1/20, 1/30$ の2種について波の周期を変化させて行った。各ケースについて、造波板の振幅 ξ を調節して、斜面上で砕波するようにした。流速の測定には、前方散乱型の往復流2成分測定可能なL.D.V.を用い、砕波点より沖側約1mから砕波点を含み10cmあるいは20cm間隔の断面で、鉛直方向に7, 8点、1ケースにつき約50~60点づつ測定した。水面波形の測定には、容量式波高計を用い、図-2に示す位置で測定した。これらの波形データは、L.D.V.のデータとともにデータ・レコーダに同時記録した後、0.01sのサンプリング間隔でAD変換し計算機で処理し

た。なお、砕波点は目視により決定したが、その位置は、spilling型砕波では波頂部に気泡が発生する点、plunging型砕波では波峰の前面が鉛直になる地点とした。

4. 斜面上の波の砕波変形と内部特性の考察

数値計算を行うに際しては、図-2の実験状況と一致

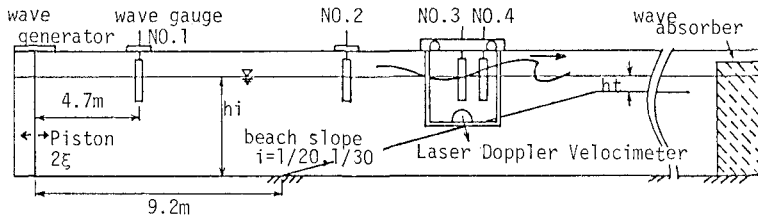


図-2 実験装置

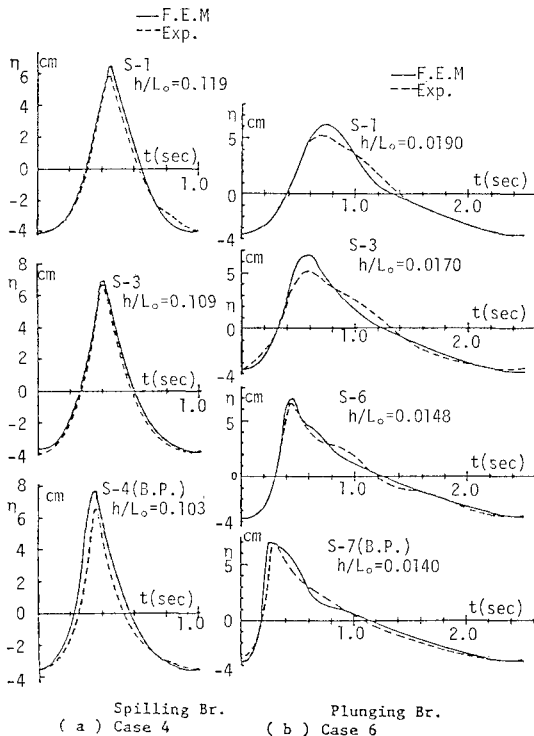


図-3 砕波近傍表面の時間波形

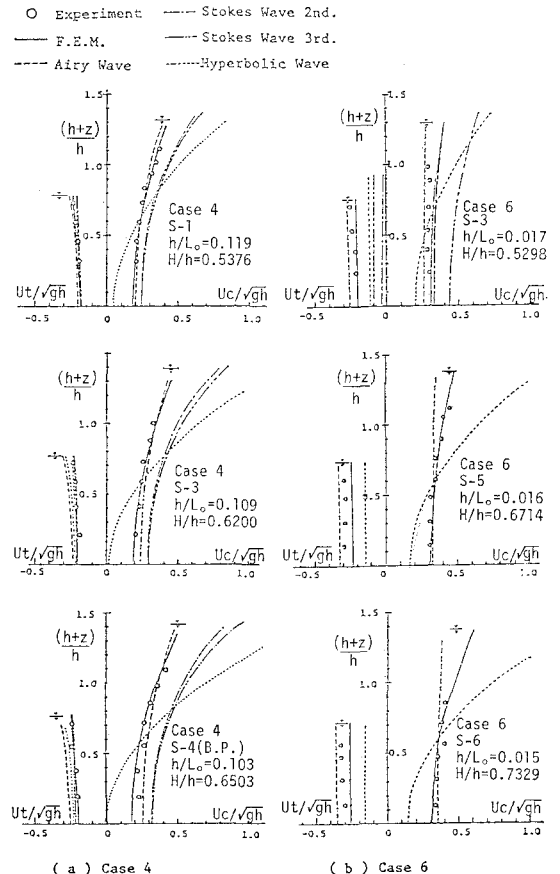


図-4 水平方向水粒子速度の鉛直分布

するよう計算領域を定め、ピストン型造波に対する計算の入力方法を採用した。要素分割は、水深方向に 8~5 分割、水平方向には、短波長から長波長の波に対して、きざみ $\Delta x/L_i$ (L_i : 入射波波長) を 1/20, 1/40, 1/60 とし、斜面上と斜面前後の一様水深部の $2L_i$ 区間を解析領域とした。また、時間きざみ $\Delta t/T$ は、C.F.L. 条件 $(\Delta t/T)/(\Delta x/L_i) \leq 1$ となるようにした。式 (10) の時間差分は 1 階微分方程式に対する Newmark- β 法に相当するが、 θ の効果は、 $\theta=0.5$ が最も安定な解を与え、 $\theta < 0.5$ のとき解を過大にし、 $\theta > 0.5$ のとき減衰させる効果 (人工粘性効果) があることを確かめている。

図-3、図-4 は、本解析法の計算精度を検証するため実験結果と比較した一例である。図-3 は、砕波点近傍での水面の時間波形であり、(a) は Case 4 の崩れ波 (b) 図は Case 6 の巻き波型の砕波である。砕波型に対

応して砕波過程の水面波形が良く計算できている。また 図-4 は、同様の実験ケースの砕波近傍での水平方向水粒子速度 $u/\sqrt{gh}$ の鉛直分布を波の峰と谷の位相で示したものである。図中の○印が L.D.V. による測定結果、実線が本計算結果であり、他は各測定点での実測波高 H を用いて計算された各種の定形波理論による結果である。本計算結果は実験結果と最も良く一致しており、水粒子速度に対しても砕波近傍まで精度よく計算できることが実証される。また、砕波点での峰と谷の位相での $u/\sqrt{gh}$ の鉛直分布は、全ケースとも岩垣・酒井²⁾ による砕波型の分類に合致した結果が得られているが、砕波型によるこれらの相違は顕著ではなく、これら両位相のみでの検討では不十分で、後述するように空間的な砕波波形との対比において差異がより明確になる。

図-5 は水深減少にともなう水面波形の前後の非対称

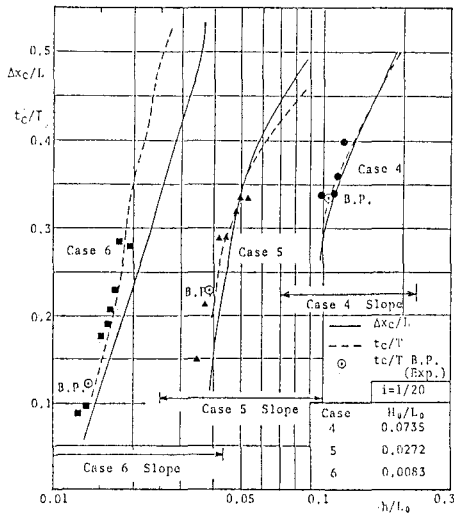


図-5 斜面上での波形変化

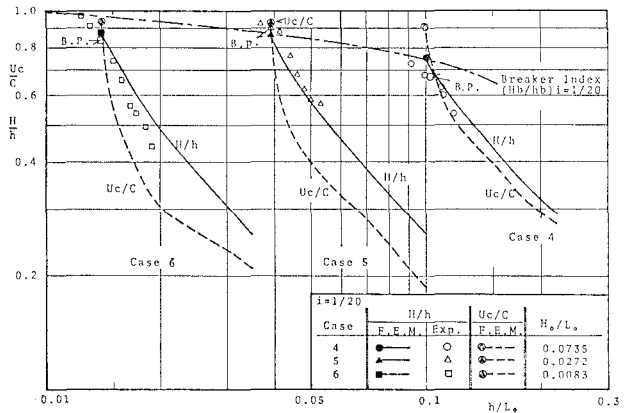
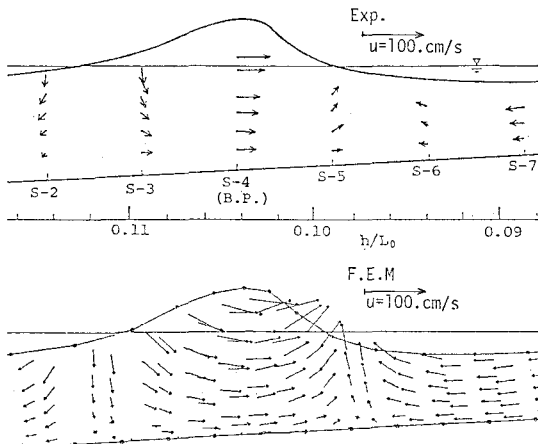
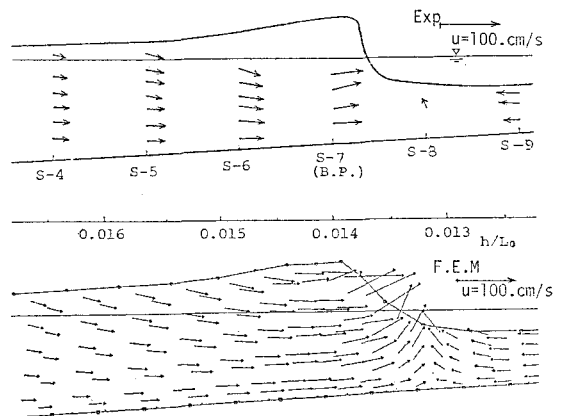


図-6 斜面上での H/h , u_c/C の変化



(a) Case 4, spilling breaker



(b) Case 6, plunging breaker

図-7 砕波近傍の水粒子速度分布

性(前傾度)を t_0/T あるいは $\Delta x_c/L$ で表わし, $i=1/20$ に対し図示している. 図中の黒印(●, ▲, ■)は t_0/T の実験結果で○は砕波点での値を示す. ここに, Δx_c : 空間波形の谷から峰までの水平距離, t_c : 時間波形の谷から峰までの時間である. Case 4 の崩れ波から Case 6 の巻き波の砕波形態に対して, 沖波波形勾配が小さいほど水面波形の前傾度が大きくなって砕波する状況が実験と良く一致して示される. なお, 図中の t_0/T と $\Delta x_c/L$ とは完全には一致せず, この傾向は H_0/L_0 が小さいほどその相違が著しい. これは, 傾斜面上の波の変形においては, 波形勾配が小さくなると時間波形と空間波形とは同じでなく, 空間的な水面波形の変化のほうが大きくなることを意味している.

図-6 は, 水深減少にともなう波高水深比 H/h および波の峰の水平水粒子速度 u_0 と波速 C との比 u_0/C の変化を $i=1/20$ について示したものである. 図中の実線は H/h の計算結果であり, これと対応して実験結果をプロットしている. H/h の変化についても計算と実験結果とは良く一致し, 砕波点での値も合田⁶⁾の砕波指標(図中一点鎖線)にほぼ合っていることがわかる. また, 図中の破線は, このときの u_0/C の計算結果である. 水深の減少にともない u_0/C の値が砕波点近傍で急増し, 砕波型式に関係なく, いずれの場合も $u_0/C \approx 0.9 \sim 0.95$ の値で計算上の限界となるが, 砕波限界では, $u_0=C$ となるという従来の知見と一致すると考えてよいであろう.

図-7 は, 砕波時点での速度場を図示したものである. 空間的な波形および水粒子速度とも実験結果とよく一致して計算されており, 砕波近傍で空間的にも充分な精度で波動場を表現し得ることが確かめられた. これらから, 砕波近傍での速度場は空間的な水面波形の形態と対応していることがわかる. すなわち, 水面波形が前後対称な崩れ波型砕波では速度場も峰を中心に比較対称であり, この型の砕波では, 先の図-4 でも示しているように, 微小振幅波理論の良い一致が認められる. また, 巻き波型では波形の前傾度が大きで, これに対応して水粒子速度も峰の前面での変化が急で, 水深方向には一様な分布となることがわかる.

図-8 は, 砕波点近傍での水粒子単位重量当りのエネルギー比 $-\rho(\partial\phi/\partial t)/a_0$ (a_0 は沖波振幅)を計算結果より図示したものである. これから, 砕波形態の相違と対応して, その集中度, 集中場所に特徴ある分布を示すことがわかる. また, $\partial\phi/\partial t$ が加速度のポテンシャルと考え得ることから, $-\rho(\partial\phi/\partial t)/a_0$ の値の変化が大きい峰の前面で大きな加速度が作用し, この傾向は, 崩れ波から巻き波になるほど, その範囲が水底にまで達し, 特に峰付近の前面には g よりも大きな加速度が作用することが Peregrine⁷⁾ の結果と同様に示される.

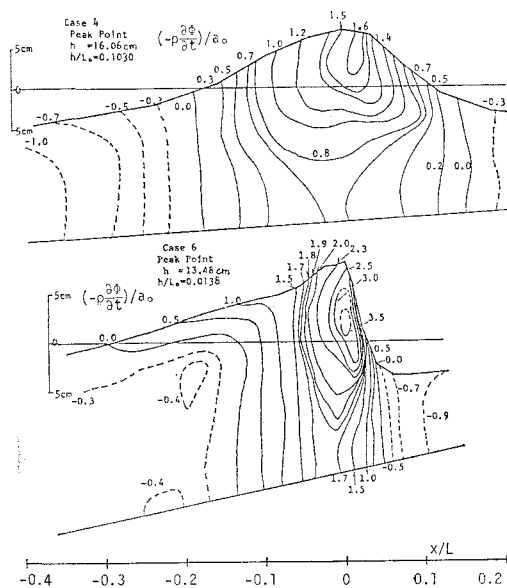


図-8 砕波近傍の水粒子エネルギー分布

5. あとがき

本計算結果は, 水面波形および水粒子速度とも砕波点近傍まで実験結果とよく一致し, 従来明確でなかった砕波変形時の時間的・空間的な波動場を精度よく計算できることが検証された. 本報告では, 主に砕波型による波動場の定性的な傾向を明らかにしたが, 他の詳細な検討は紙面の都合上, 別の機会に発表の予定である.

最後に, 本研究は, 滝川が日本学術振興会 57 年度流動研究員として, 京都大学工学部に滞在中に, 岩垣雄一教授のご指導の下に行った研究成果の一部であって, 研究の実施にあたり, 終始, 貴重なご助言と励ましの言葉を賜った京都大学工学部酒井哲郎助教授ならびに, 浅野敏之助手, 間瀬 肇助手に心より感謝の意を表する.

参考文献

- 1) Adeyemo, M. D.: Velocity in the wave broken zone, Proc. 12th Conf. Coastal Eng., pp. 435~460, 1970.
- 2) 岩垣雄一・酒井哲郎: Stream Function Theory による斜面上の砕波の水粒子速度の表現について, 第 21 回海岸工学講演会論文集, pp. 27~32, 1974.
- 3) 安田孝志・後藤真太郎・土屋義人: $K-dV$ 方程式による斜面上の波の水粒子速度, 第 27 回海岸工学講演会論文集, pp. 11~15, 1980.
- 4) 滝川 清・田淵幹修: 有限要素法による波動解析について, 第 25 回海岸工学講演会論文集, pp. 28~32, 1978.
- 5) 岩垣雄一・酒井哲郎・月岡康一・沢井信樹: 斜面上の砕波の水粒子速度の鉛直分布と砕波型について, 第 20 回海岸工学講演会論文集, pp. 553~557, 1973.
- 6) 合田良美: 砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, 第 180 号, pp. 39~49, 1970.
- 7) Peregrine, D. H., E. D. Cokelet and P. McIver: The fluid mechanics of waves approaching breaking, Proc. 17th Conf. Coastal Eng., pp. 512~528, 1980.