

碎波帯における波のエネルギー方程式のモデリング

泉 宮 尊 司*・堀 川 清 司**

1. 緒 論

現地海浜における海浜流場を定量的に精度よく計算するためには、碎波後の波のエネルギー変化を正確に予測する必要がある。しかしながら従来の研究では、多くの場合碎波帯内でエネルギー方程式を解くことなしに、例えば、Miche タイプの碎波条件式を課すことによりエネルギー変化を算定¹⁾していたために、海底地形が step 型や bar 型地形の場合には不合理な結果を生じていた。そこで本研究では、これらの地形にも適用し得る新たなエネルギー方程式を導き、その数値計算を行った。そして本モデルの妥当性を検討するために、エネルギー、平均水位および沿岸流速の実測値と計算値とを比較し議論した。

2. 碎波帯における波のエネルギー方程式のモーデリング

2.1 波のエネルギー方程式

Reynolds 方程式に水平位相平均流速 u_α ($\alpha=1, 2$) を乗じ、鉛直方向の Reynolds 方程式に w を乗じてそれぞれ加え合わせると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \rho(u_\alpha^2 + w^2) + \rho g z \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ u_\beta \left[\frac{1}{2} \rho(u_\alpha^2 + w^2) + \rho g z + p \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ w \left[\frac{1}{2} \rho(u_\alpha^2 + w^2) + \rho g z + p \right] \right\} \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\alpha'' u_\beta') u_\alpha - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_\alpha'' w'') u_\alpha \\ & - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\beta'' w'') w - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w''^2) w \quad \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ここに、 u_α および w は定常流成分も含んだ位相平均流速の水平および鉛直成分、 u_α'' および w'' は乱れ成分、 p は圧力、 g は重力加速度、 ρ は水の密度である。式(1)を、位相平均流速成分 u_α 、 w および位相平均波形 ζ に対して、水粒子が飛び出さない条件式が成立するものとして、底面から水面まで鉛直方向に積分し、波の周期の時間スケールで時間平均を施すと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \left\{ \frac{1}{2} (\rho u_\alpha^2 + w^2) + \rho g z \right\} dz \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_{-h}^{\zeta} u_\beta \left[\frac{1}{2} \rho(u_\alpha^2 + w^2) + \rho g z + p \right] dz \\ & = - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\alpha'' u_\beta') u_\alpha dz - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_\alpha'' w'') u_\alpha dz \\ & - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\beta'' w'') w dz - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w''^2) w dz \\ & + \int_{-h+\delta}^{-h} \frac{\partial}{\partial z} (\tau_\alpha) u_\alpha dz \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

式(2)の右辺第5項は、底面摩擦応力によるエネルギー逸散項で、 δ は境界層厚さを表わす。

ここで、位相平均流速 u_α を定常流成分 U_α と波動流成分 u'_α とに分離し、定常流成分が鉛直方向に一様であるという仮定のもとに、式(2)の左辺の積分を実行すると、次式のようになる (Phillips, 1977)²⁾.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{U}_\alpha \tilde{M}_\alpha + \frac{1}{2} \rho g (\zeta^2 - h^2) - \frac{M_\alpha^2}{2\rho d} + E \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \tilde{M}_\alpha \left(\frac{1}{2} \tilde{U}_\alpha^2 + g \zeta \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{U}_\beta \frac{M_\alpha^2}{\rho d} + U_\beta E + F_\beta + U_\alpha S_{\alpha\beta} \right\} \\ & = - \tilde{\Phi}_d^{(t)} - \tilde{\Phi}_d^{(b)} \quad \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 $\tilde{\Phi}_d^{(t)}$ は Reynolds 応力の存在によるエネルギーの逸散率を表わし、 $\tilde{\Phi}_d^{(b)}$ は同じく底面摩擦応力によるものでそれぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_d^{(t)} &= \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\alpha'' u_\beta') u_\alpha dz \\ & + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_\alpha'' w'') u_\alpha dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho u_\beta'' w'') w dz \\ & + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\rho w''^2) w dz \quad \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

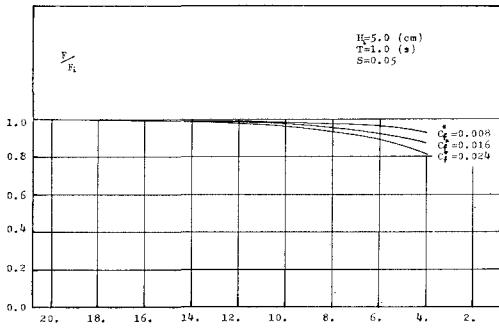
$$\tilde{\Phi}_d^{(b)} = - \int_{-h}^{-h+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (\tau_\alpha) u_\alpha dz \quad \dots \dots \dots (5)$$

式(3)は、全エネルギーに関する方程式であるが、波動エネルギーのみの方程式を得るために、定常流に関わるエネルギーを差し引くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ E - \frac{M_\alpha^2}{2\rho d} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ U_\beta E + F_\beta - \frac{\tilde{U}_\beta M_\alpha^2}{2\rho d} \right\}$$

* 正会員 工修 横浜国立大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

図-2 底面摩擦応力によるエネルギー流束 F の減衰

$$\begin{aligned} \Phi_d^{(t)} = & - \int_{-h}^{\zeta} \rho u'' u' \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} dz \\ & - \int_{-h}^{\zeta} \rho u'' w'' \frac{\partial u'_\alpha}{\partial z} dz - \int_{-h}^{\zeta} \rho u'' w'' \frac{\partial w'}{\partial x_\beta} dz \\ & - \int_{-h}^{\zeta} \rho w''' \frac{\partial w'}{\partial z} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} [(\rho u'' u'') u'_\alpha] dz \\ & + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} [(\rho u'' w'') w'] dz \quad \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

式(23)の右辺第1項から第4項までは、一般に乱れの発生項と称されるのであるが、一般的には正の値となるので、波のエネルギーに対しても逸散項である。

ここで、二次元波動場について考えることにする。移流項の影響は小さいものとして無視し、連続式を考慮して書き換えると、

$$\begin{aligned} \Phi_d^{(t)} = & - \int_{-h}^{\zeta} \rho (u''^2 - w''^2) \frac{\partial u'}{\partial x} dz \\ & - \int_{-h}^{\zeta} \rho u'' w'' \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) dz \quad \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

となる。式(24)の各項を評価するために、波動流速 u' および Reynolds 応力を次に示すような相似分布を仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} u' = \bar{u}' f(z/h, \varphi), \quad \varphi = kx - \sigma t \\ \bar{u}''^2 = \bar{q}_m^2 f_{11}(z/h, \varphi + \delta_{11}) \\ \bar{w}''^2 = \bar{q}_m^2 f_{33}(z/h, \varphi + \delta_{33}) \\ -\bar{u}'' \bar{w}'' = \bar{q}_m^2 f_{13}(z/h, \varphi + \delta_{13}) \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

また、乱れエネルギーの水深方向の平均値 \bar{q}_m^2 を、波動エネルギーと平均水深 d を用いて、

$$\bar{q}_m^2 = \beta E / \rho d \quad \dots \dots \dots (26)$$

のように表わす。ここに、 β は波動エネルギーに対する乱れエネルギーの占める割合を表わす係数である。式(25)および式(26)を式(24)に代入すると、

$$\Phi_d^{(t)} = \gamma_* \beta \frac{E^{3/2}}{\rho^{1/2} d^{3/2}} \left(\frac{2C_g}{C} - 1 \right)^{1/2} \quad \dots \dots \dots (27)$$

を得る。ここに、

$$\gamma_* = \sqrt{2} \{ I_{13}^v + (kh)^2 I_{13}^v + (I_{33}^v - I_{13}^v) kh \} \quad \dots \dots \dots (28)$$

$$I_{ij}^v = \int_{-1}^{\xi_s} \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi, \varphi) f_{ij}(\xi, \varphi + \delta_{ij}) d\xi, \quad (\xi = z/h) \quad (\xi_s = 3/h) \quad \dots \dots \dots (29)$$

である。

以上のように、碎波の乱れによるエネルギー逸散率は式(27)のような簡単でしかも底面摩擦応力によるエネルギー逸散率の表現とかなり似ていることがわかる。

比較的緩やかな一様勾配地形で、波高が平均水深にほぼ比例して減少する場合について考える。このような時には、Reynolds 応力の相似分布や流速波形の相似的な変形が期待されるものと考えられる。

今、エネルギー方程式(30)に、長波近似の仮定のもとに、 $E = (1/8)\rho g r^2 d^2$ および $C = C_g = \sqrt{gd}$ を代入すると、式(31)の関係を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (EC_g) = & -\sqrt{2} C_f^* \frac{E^{3/2}}{\rho^{1/2} d^{3/2}} \left(\frac{2C_g}{C} - 1 \right)^{3/2} \\ & - \gamma_* \beta \frac{E^{3/2}}{\rho^{1/2} d^{3/2}} \left(\frac{2C_g}{C} - 1 \right)^{1/2} \quad \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} C_f^* + \gamma_* \beta = 5\sqrt{2} S^*/r \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 S^* は wave set-up を考慮に入れた修正海底勾配である。底面摩擦係数 C_f^* が一定値であると考え、碎波によるエネルギー逸散の全エネルギー逸散に対する割合を調べたのが図-3である。この図より、修正海底勾配が 1/20 では、底面摩擦係数 C_f^* を 0.01 から 0.03 に変化させても、碎波によるエネルギー逸散が 9 割以上を占めていることがわかる。一方、海底勾配が 1/50 以下では底面摩擦応力によるエネルギー逸散が比較的大きいことがわかる。

step 型や bar 型地形の場合には、図-4 に見られるように波の再生域が存在する²⁾。このような場合にも適用できるモデルとするために、 $\gamma_* \beta$ を次のように仮定する。

$$\gamma_* \beta = \beta_0 (M_*^2 - M_{*s}^2)^{1/2}, \quad (\beta_0 = 1.80) \quad \dots \dots \dots (32)$$

$$M_*^2 = \left[\frac{1}{d} \int_{-h}^{\zeta} u^2 dz \right] / gd = \frac{C_g}{C} \frac{E}{\rho g d^2} \quad \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 M_*^2 は Bahkmeteff による kinetic flow factor⁶⁾ を拡張したもので、定常流に対する Froude 数の 2 乗に相当するものである。また、 M_{*s}^2 は波の再成時の値で、図-4 を参考に 0.009 とした。

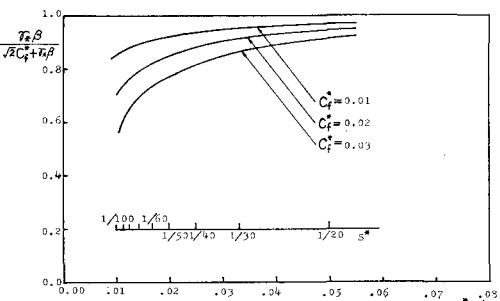


図-3 碎波によるエネルギー逸散の全エネルギー逸散に対する割合

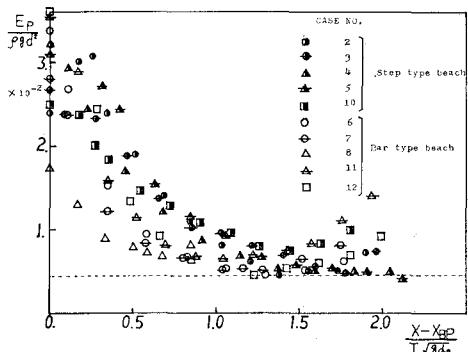


図-4 碎波後の位置エネルギーの変化 (step型およびbar型地形)

2.4 碎波条件

本モデルでは、エネルギー方程式をエネルギーのまま解く方法をとっているので、碎波位置を知るためにあらかじめ碎波時のエネルギーを知る必要がある。一般に、碎波点近傍の波はかなり非線形性が強く微小振幅波理論によってエネルギーを評価すると大きな誤差を生じることがある。図-5は、無次元位置エネルギー $E_p/\rho g H^2$ とアーセル数 U_r および波高水深比 H/d との関係をプロットしたものである。図中の一点鎖線および実曲線はクノイド波の第1次および第3次近似解を示したものである。このような特性を考慮して、碎波限界エネルギー E_c を次式で算定することとし、それを越えた場合に式(30)の第2項を付加する。

$$\frac{E_c}{\rho g H^2} = \frac{1.0}{1+a(H/d)} U_r^{-1/2} \times \left(1 - \frac{2.0}{1+a(H/d)} U_r^{-1/2} \right) \quad \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 $a=0.33$ とし、 H/d および $U_r^{-1/2}$ は合田の碎波指標より得た。

3. エネルギー方程式モデルによる計算結果と実測値との比較

3.1 エネルギー流束およびエネルギー

図-6は、式(32)による $\gamma_* \beta$ を用いて、エネルギー

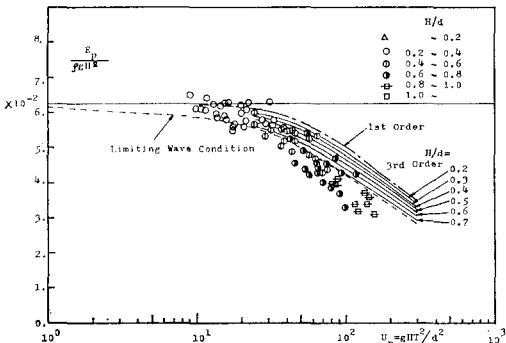


図-5 波の位置エネルギー E_p に対する有限振幅性の効果

方程式(30)を一様勾配地形に対して計算したものである。図中の■印が計算したもので、著者らが以前に測定した結果と同様に平均水深の $5/2$ 乗にほぼ比例していることが認められる。

表-1に、実験に用いた波および地形の条件を示す。

表-1 実験条件

CASE NO.	PERIOD T (s)	WAVE HEIGHT H_1 (cm)	WAVE STEEPNESS H_1 / L_0	TOPOGRAPHY	BREAKER TYPE
1	1.19	5.44	0.027	plane	pl.-sp.
2	1.18	6.41	0.032	step	pl.
3	1.19	5.07	0.025	step	pl.-sp.
4	0.94	6.55	0.052	step	pl.
5	0.96	7.19	0.055	step	pl.
6	0.94	6.48	0.051	bar	pl.
7	0.95	5.85	0.045	bar	pl.-sp.
8	1.19	5.00	0.025	bar	pl.-sp.
9	1.10	7.27	0.042	step	sp.
10	1.10	6.80	0.039	step	pl.-sp.
11	1.10	8.88	0.051	bar	pl.
12	1.10	7.30	0.042	bar	pl.-sp.

図-7は、CASE 12のエネルギー流束の実測値と計算値とを比較したものである。計算結果のほうは波の再成が早く生じているが、それ以前ではbar型地形であるにもかかわらず比較的良く一致している。

図-8は、碎波後の波のエネルギーの実測値と計算値とを比較したものである。ただし、実測値のほうは無次元化した位置エネルギーをプロットしている。step型地形の(a)および(b)の再び shoaling が始まる地点で若干の差異があるが、全般的には比較的良く一致している。

3.2 平均水位

図-9は、step型およびbar型地形における平均水位の実測値と計算値とを比較

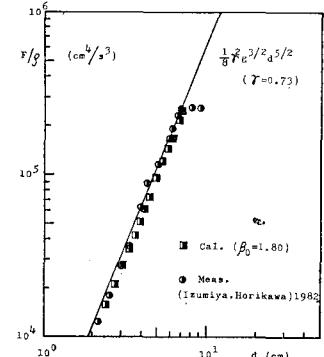


図-6 一様勾配地形 ($s=1/20$) におけるエネルギー流束の変化

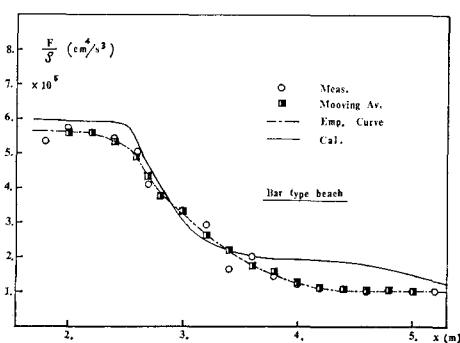


図-7 波のエネルギー流束の実測値と計算値との比較

較したものである。計算値（実曲線）は式(30)より計算されたエネルギーを $(2C_g/C - 1/2)$ 倍して得られた radiation stress より得た。碎波点近傍において、計算値のほうが平均水位の上昇が若干大きいが、その他の領域ではかなりよく一致している。

また、bar 型地形の方が step 型地形に比べ set-up の上昇量が小さく、第2次碎波による set-down が比較的明確に現れる傾向にあると言える。

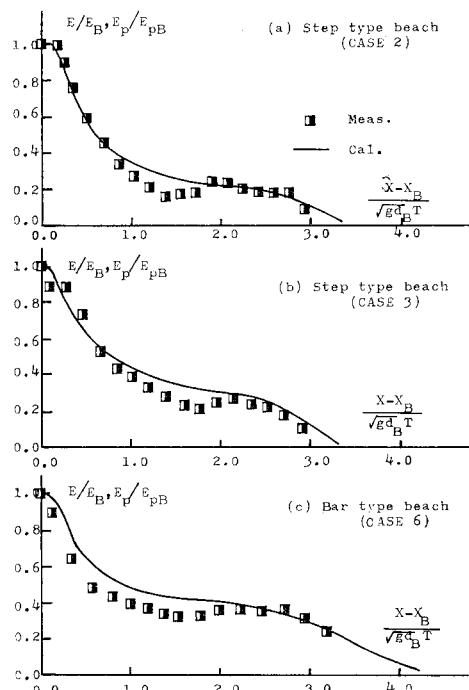


図-8 碎波後の波のエネルギーの実測値と計算値との比較

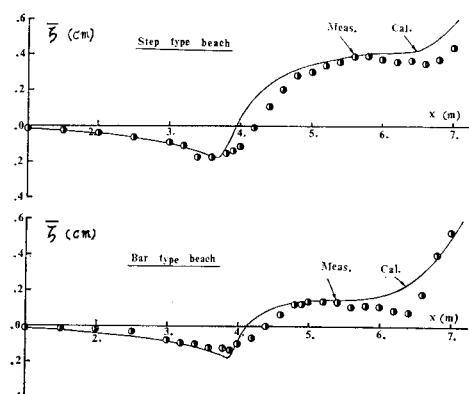


図-9 平均水位の計算値と実測値との比較

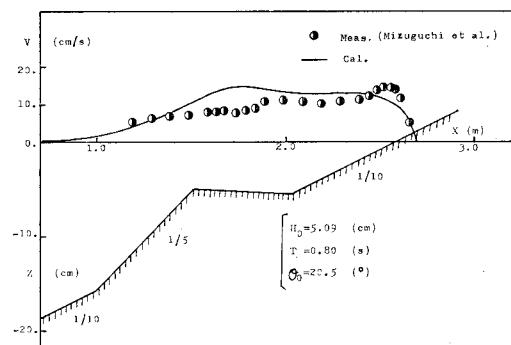


図-10 step 型地形における沿岸流速分布

3.3 沿岸流速

図-10 は、step 型地形における沿岸流速を本モデルを応用して計算し実験結果⁸⁾と比較したものである。この計算に用いた拡散係数は比較的小さく、Longuet-Higgins による p の値が 0.07 に相当する。計算結果は、碎波点近傍で若干大きな値を示すが、全体的に偏平な分布形状をよく再現している。

4. 結 論

step 型や bar 型地形にも適用し得るエネルギー方程式を導びき、得られた計算結果と実測値とを比較することにより、本モデルの有効性が確かめられた。最後に、本研究に助言いただいた横浜国立大学工学部磯部雅彦助教授ならびに、実験に協力していただいた永山聰君（現飛島建設（株））および梅沢朋之君（現大学院生）に感謝いたします。

参 考 文 献

- Noda, E. K.: Wave-induced nearshore circulation, J. Geophys. Res., Vol. 79, pp. 4097~4106, 1974.
- 水口 優・辻岡和男・堀川清司: 碎波後の波高変化についての一考察, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 155~159, 1978.
- Phillips, O. M.: The Dynamics of the Upper Ocean, 2nd ed., Camb. Univ. Press, p. 336, 1977.
- Kajura, K.: A model of bottom boundary layer in water waves, Bull. Earthquake Res. Inst., Vol. 46, pp. 75~123, 1968.
- Longuet-Higgins, M. S.: Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, Proc. R. Soc. Lond., A, 342, pp. 157~174, 1975.
- 西村仁嗣: 海浜循環流の数値シミュレーション, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 333~337, 1982.
- Tubaki, T.: Theory of hydraulic jump, Abstract of "Theory of hydraulic jump," Rep. Res. Inst. Fluid Eng., Kyushu Univ., Vol. 5, No. 2, pp. 16~29, 1949.
- 水口 優・大嶋義隆・堀川清司: 沿岸流速の断面分布について, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 425~429, 1978.