

二層流の安定性解析

西 田 修 三*・吉 田 静 男**

1. 結 言

淡塩水密度二層流の界面には、伝播特性の異なる幾つかの種類の波動が存在し、それらの砕波が混合に関与していることが知られている^{1)~8)}。その典型的な界面波と流れの様子は図-1に示すとおりである。なお図中SVA、

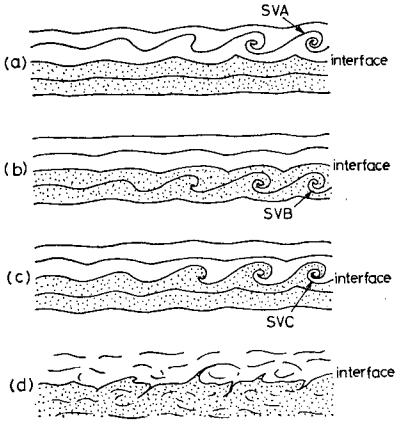


図-1 観測される典型的な4つの波動形態

SVB, SVC は以下の吉田ら⁹⁾の分類に従っている。

- SVA : Spiral vortex above interface
(界面より上に生じるスパイラル渦)
- SVB : Spiral vortex beneath interface
(界面より下に生じるスパイラル渦)
- SVC : Spiral vortex the center of which coincides with interface
(界面に中心をもつスパイラル渦)

従来、これらの波動に関する数多くの実験的研究がなされてきたが、その発生あるいは砕波条件等を説明し得る十分な理論的研究は未だなされていないと言ってよい。本論文では、このような問題を解決する際、界面の直上または直下に流れの不安定の結果生じる集中性の強い渦 (SVA, SVB) の発生を論じる必要があると考え、二層流の安定性問題を、粘性をも考慮した線形安定性理

論を基に解析した。

従来の密度流の安定性に関する研究としては、非粘性流を扱った Holmboe⁵⁾, Hazel⁶⁾ の研究、粘性を考慮した漸変密度流を扱った Maslowe ら⁷⁾の研究等があるが、いずれも、ここで問題としている二層流の流れ場のモデルとしては不十分である。最近では、粘性及び拡散を考慮した日野ら⁸⁾の研究があるが、安定な場合の固有値しか求められておらず、中立曲線を得るには至っていない。

そこで本論文では、流れ場を密度二成層、tanh 型流速分布でモデル化し、安定性解析を行い、流れの安定限界と、不安定波の位相速度及び増幅率に与える密度差と粘性の効果について調べることにした。また、実際に明らかにされている界面波の諸特性と、本研究の理論解析による結果との比較及び検討を行い、理論解析の妥当性を確かめる。

2. 固有値方程式

流れ場を図-2のように、上下層無限厚で密度がそれ

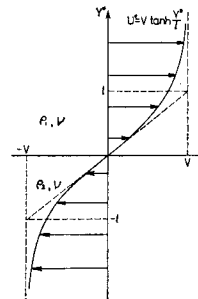


図-2 流れ場のモデル

ぞれ ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$)、動粘性係数は ν で一定の密度二成層、流速分布が $U^* = V \tanh y^*/l$ で表わされる非圧縮二次元平行流とする。さらに代表長さ l 、代表流速 V をもって流れ場の諸量を無次元化し、無次元流速分布を

$$U = \tanh y \dots\dots\dots (1)$$

とする。通常、実験室等で見られる流速分布は、 U に一樣流速 U_0 を重ね合わせた

$$U = \tanh y + U_0 \dots\dots\dots (2)$$

で近似できる。しかしながら、このような流れ場の安定

* 学生会員 北海道大学大学院応用物理学専攻
** 正 会 員 工博 北海道大学助教授 工学部数物系共通講座

性は、図-2 の流れ場の安定性解析より得られた複素位相速度の実部に U_0 が加わるだけであり、安定限界並びに増幅率には何ら影響を与えない。また、各層厚が $3l$ 以上の場合、その安定性は、ごく低波数領域で若干の差異はあるものの、無限厚とした場合の結果とほとんど変わらないため、上述のようなモデルを採用した。以下、断わりのない限り諸量はすべて無次元量とし、添字 1, 2 はそれぞれ上層内、下層内の量を表わすこととする。

流れ関数等を以下のように平均量と摂動量に分け、摂動量については周期解を考える。

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi', \quad \Phi' = \phi(y) \exp \{i\alpha(x - Ct)\} \dots\dots (3)$$

ここに、 α は波数、 $C = C_r + iC_i$ は複素位相速度である。摂動量の二次以上の項を無視すれば、運動方程式、連続方程式より、よく知られた流れの安定性に関する Orr-Sommerfeld の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (U-C)(\phi_1' - \alpha^2 \phi_1) - U'' \phi_1 \\ &= \frac{1}{i\alpha R_e} (\phi_1^{IV} - 2\alpha^2 \phi_1'' + \alpha^4 \phi_1) \\ & (U-C)(\phi_2' - \alpha^2 \phi_2) - U'' \phi_2 \\ &= \frac{1}{i\alpha R_e} (\phi_2^{IV} - 2\alpha^2 \phi_2'' + \alpha^4 \phi_2) \dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $R_e = lV/\nu$ は Reynolds 数、ダッシュは y に関する微分を表わす。

境界条件は、上下境界において、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1' = 0 & (y = +\infty) \\ \phi_2 &= \phi_2' = 0 & (y = -\infty) \dots\dots (5) \end{aligned}$$

及び、界面において、界面張力を無視すれば、流速と応力の連続より

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \phi_1' - \frac{U'}{(U-C)} \phi_1 &= \phi_2' - \frac{U'}{(U-C)} \phi_2 \\ \gamma \phi_1'' - \gamma \left\{ \frac{U''}{(U-C)} - \alpha^2 \right\} \phi_1 &= \phi_2'' - \left\{ \frac{U''}{(U-C)} - \alpha^2 \right\} \phi_2 \\ i\gamma \phi_1''' + \gamma \alpha \{ R_e(U-C) - 3i\alpha \} \phi_1' - \gamma \alpha R_e U' \phi_1 \\ &= i\phi_2''' + \alpha \{ R_e(U-C) - 3i\alpha \} \phi_2' - \alpha R_e U' \phi_2 \\ &\quad - \frac{R_i}{(U-C)} \phi_2 \quad (y=0) \dots\dots (6) \end{aligned}$$

が得られる。ここに、 $\gamma = \rho_1/\rho_2$ は相対密度、 $R_i = (1 - \gamma)gl/V^2$ は Richardson 数、 g は重力加速度である。

(5) 式より

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A_1 \phi_{11} + B_1 \phi_{12} \\ \phi_2 &= A_2 \phi_{21} + B_2 \phi_{22} \dots\dots (7) \end{aligned}$$

として (6) 式に代入すれば、各係数 A_1, B_1, A_2, B_2 に関する行列

$$A \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ \dots\dots & & a_{44} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = [0] \dots\dots (8)$$

が得られ、固有値方程式は以下ようになる。

$$|A| = 0 \dots\dots (9)$$

流れ場を非粘性とした場合は、Rayleigh の方程式

$$\begin{aligned} \phi_1'' - \left\{ \frac{U''}{(U-C)} + \alpha^2 \right\} \phi_1 &= 0 \\ \phi_2'' - \left\{ \frac{U''}{(U-C)} + \alpha^2 \right\} \phi_2 &= 0 \dots\dots (10) \end{aligned}$$

が得られ、境界条件は、上下境界において、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 & (y = +\infty) \\ \phi_2 &= 0 & (y = -\infty) \dots\dots (11) \end{aligned}$$

界面において、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \gamma(U-C)\phi_1' - \gamma U' \phi_1 &= (U-C)\phi_2' - U' \phi_2 - \frac{R_i}{(U-C)} \phi_2 \\ & \quad (y=0) \dots\dots (12) \end{aligned}$$

となり、これらの境界条件より (9) 式と同様の固有値方程式が得られる。

3. 計算方法

淡塩水密度二層流においては通常 $\gamma = 0.95 \sim 1.0$ であり、 g (重力加速度) のかかる項以外はほとんど安定性に影響を及ぼさないため、 $\gamma = 0.99$ とした。ゆえに、流れ場の安定性は、 R_e 数及び R_i 数によって決定されることになる。

界面における $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}$ 及びその微係数は、(4) 式を Runge-Kutta-Gill 法を用い、きざみ幅 $dy = 0.005 \sim 0.025$ で数値積分を行うことにより求めた。その際、初期値として (4) 式の漸近解

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \exp(-py) \\ \phi_{12} &= \exp(-qy) \\ \phi_{21} &= \exp(py) \\ \phi_{22} &= \exp(qy) \\ p &= \{\alpha^2 + U''/(U-C)\}^{1/2} & \text{Real}(p) > 0 \\ q &= \{\alpha^2 + i\alpha R_e(U-C)\}^{1/2} & \text{Real}(q) > 0 \end{aligned} \dots\dots (13)$$

の、 $y = \pm 3$ (C_r が大きい場合は $y \pm 5$) における値を採用した。また、 R_e 数及び波数が大きくなるにつれて数値計算の誤差が増大し、得られる解の独立性が損なわれるため、Betchov ら⁹⁾の方法に従って適宜数ステップ (5~10 ステップ) 毎に解の修正を行いつつ、 $y=0$ においても独立な解が得られるようにした。このようにして得られた値を用い、行列式の各要素を計算し、(9) 式を満足するような固有値 C を反復試行することによって見出した。

非粘性の場合については、(10) 式の解をべき級数の形で解析的に求め、その後は数値計算により、上述と同様の方法で固有値を見出した。

4. 計算結果及び考察

(1) 中立曲線

非粘性及び Re 数が 50, 100, 200, 500, 1000 の場合について計算すると 図-3 に示す中立曲線を得る。図

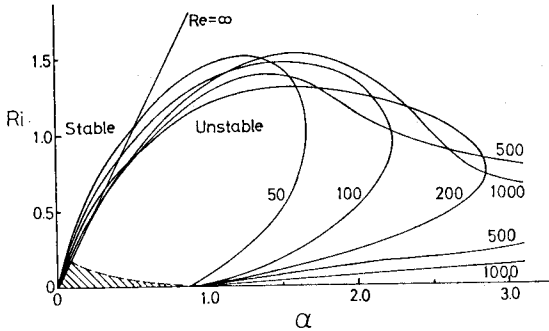


図-3 各 Re 数における中立曲線

中, 直線 $Ri=2\alpha$ と α 軸に囲まれた領域が非粘性流れ場において不安定となる。この結果は, 流れが不安定となる波数に下限の存在することを示している。Hazel¹⁰⁾ が扱った密度と流速の遷移層厚の比が約 1/5 の場合には, 不安定となる波数に上限も存在したが, 二層流モデルでは, そのような上限は見い出せず, 不安定領域が高波数側に半ば開いた形となっている。

一方, 粘性をわずかでも考慮すると, 高波数側にも安定領域が現われ, 不安定領域は図のように閉じたものとなる。その領域は Re が低下するほど小さくなることから, 概ね粘性には安定化作用があると言える。しかし, ここで注意すべき点は, 各 Re 数における中立曲線が交わる点が存在することであり, Re 数の低下に伴い不安定領域に取り込まれる波数域が存在し, そこでは粘性が逆に不安定化作用を及ぼす結果となっている点である。また, Re 数の増加に伴い不安定領域は急激に高波数側に拡大されていくのに対し, 高 Ri 数側にはあまり変化しない点も重要である。このことは, 二層流の安定限界を Richardson 数と Reynolds 数で表現した場合, 安定限界に与える Re 数の影響は小さいということを意味している。

(2) 位相速度及び増幅率

非粘性及び Re 数が 100, 500 の場合の増幅率 (αCi) と位相速度 (Cr) を 図-4, 図-5 に示す。図-4 は Ri 数が 1.0, 図-5 は 0.2 のものである。図からわかるように, 不安定領域において Cr の符号が正負逆で, その絶対値及び Ci の値がほぼ等しい 2 つの固有値が得られている。図には示されていないが, 図-3 の斜線を施した領域 ($Cr \approx 0$) では, Ci の値の異なる 2 つの固有値も得られている。すなわち, 2 つの固有値を

$$C_1 = C_{r1} + iC_{i1}$$

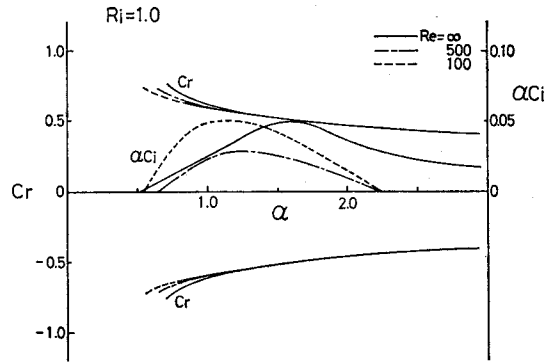


図-4 位相速度及び増幅率

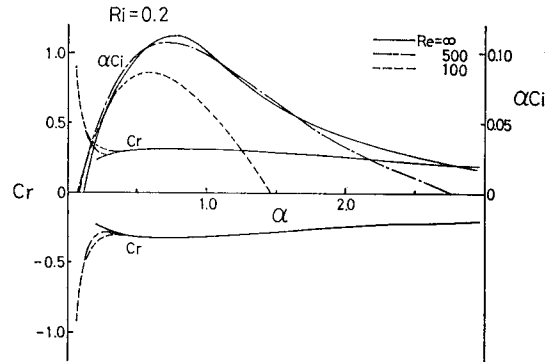


図-5 位相速度及び増幅率

$$C_2 = C_{r2} + iC_{i2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

とすれば, 斜線部では

$$C_{r1} \approx -C_{r2} (\approx 0), \quad C_{i1} \approx C_{i2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

それ以外では

$$C_{r1} \approx -C_{r2}, \quad C_{i1} \approx C_{i2} \quad \dots\dots\dots(16)$$

となっている。従って斜線部以外では, 図-4, 図-5 に示されるようにほぼ正負逆の 2 つの位相速度曲線及び, 1 つに重なり合った増幅率曲線が得られることになる。

図-4, 図-5 で増幅率は Re 数の影響を顕著に受けているのに対し, 位相速度は低波数域を除いてほとんど変わっていないことから, 粘性は固有値として得られる複素位相速度の虚部 C_i には大きく影響を与えるものの, 実部 C_r にはあまり影響を及ぼさないことがわかる。一方, Ri 数の違いによる効果は, それが小さい方が増幅率が大きく, 位相速度が小さくなっている。なお, 詳細に計算すると, ある Re 数のもとでは, Ri 数の低下に伴い増幅率が増大し, $Ri \approx 0.4$ 付近で極大となり, さらに Ri 数が低下すると一度減少し, 再び増大して $Ri=0$ で最大増幅率になることも分っている。また, 位相速度については Ri 数が低下するに従い, 徐々に減少していき, 図-3 の斜線部で急激に 0 に近づくこともわかっている。

(3) 固有関数

計算の結果, 粘性流, 非粘性流を問わず, 2 種類の不安定波モードが存在することがわかった。以下, そのモ

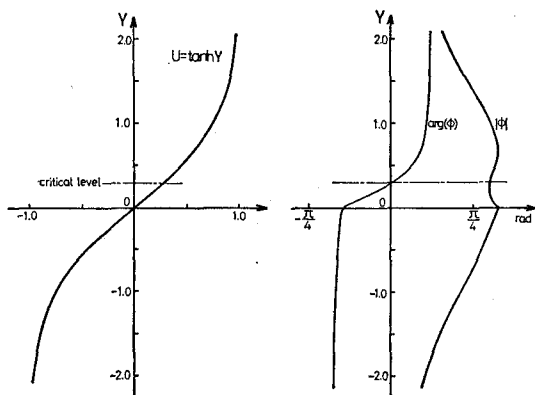


図-6 流速分布と固有関数

ードの特性について記述する。まず、非粘性で $R_i=0.2$, $\alpha=0.8$ の場合の固有値 $C=0.30+0.14i$ より固有関数を求めてみると図-6 のようになる。これに対して、粘性を考慮した場合は、界面において振幅、位相分布ともになめらかになる程度で、ほぼ同様の結果を得る。図-6 より固有関数は、その critical level ($U=C_r$ なる位置) 付近において、振幅 $|\phi|$ が極小値、その上下で極大値を有し、位相 $\arg(\phi)$ が大きく変化している。さらに実際の流れ場の様子を知るために、不安定波の成長初期段階における界面及び各面の変位 η を求めたのが図-7 である。注目すべき点は、振幅、位相共に critical level に対してほぼ対称な形となり、最大変位は界面ではなく、上層内 critical level に存在することである。静止二成層系等では、界面波モードの波動は界面において最大振幅を有するが、本モデルのような流れが作用すると、その振幅は critical level で最大となるものと思われる。また、Maslowe らの研究¹¹⁾等、密度の遷移層厚が流速のそれと同程度、もしくはそれ以上の漸変密度流においては、常に $C_r=0$ となり critical level は流速分布の変曲点(本研究の界面に相当)に一致し、その点で最大変位を示すことになる。従って、密度の遷移層厚が極めて小さい二層流の場合とは大きく異っている。

図-7 に示された波動は不安定であるため、各面の変位は時間と共に増大し、いずれは非線形効果により、振

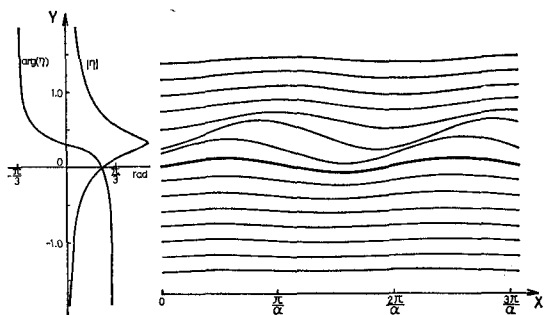
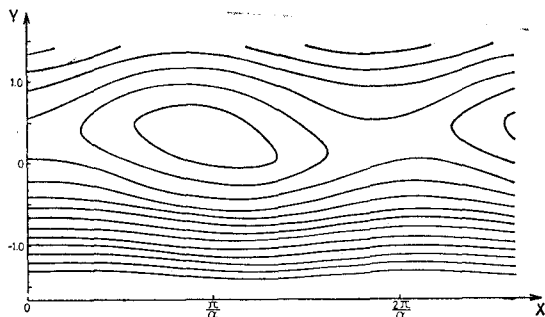


図-7 流れ場各面の変位(太線は界面変位)

図-8 C_r の移動座標系から見た流線

幅が最大の critical level 付近で渦を形成するに至ると考えられ、これが、実験で観測される上層渦 SVA であろうと思われる。

図-8 は、この不安定波の位相速度 C_r で動く座標系で見た流線であり、critical level 付近で軸の傾いた閉じた領域(cat's eye)を形成している。この閉じた領域は時間とともに拡大し、渦度も大きくなっていくことから、やはり SVA 発生の可能性は強いと思われる。

以上は位相速度が正の不安定波についての結果であるが、これとほぼ等しい増幅率を有し、位相速度が負の不安定波については、図-6, 7, 8 を界面について 180° 回転させた反対称な形となる。この場合もやはり下層内 critical level 付近に渦を形成することが予想され、下層渦 SVB がこれに相当するものと思われる。

(4) 界面破壊機構の考察

以上、SVA, SVB は上層及び下層に critical level を有する2種類の不安定波の成長の結果と考え得ることを示したが、流れの不安定によって界面もまた critical level 程ではないにしろ変形を強いられる(図-7の太線)。そのときの界面変位の波数及び位相速度は、もちろん不安定波のものと同一である。

critical level が界面からある程度離れている場合には、まず不安定波が成長し、その critical level 付近で渦を形成するに至っても、界面はそれ程の変形を示さないが(図-1(a), (b)), critical level が界面に近い場合には界面変形が激しくなり、遂には cusp 状の界面破壊を生じるまでに変形し得るであろう。また、さらに critical level が界面に非常に近い場合、もしくは界面に一致する場合には、渦の内部に界面が取り込まれる形となり、界面に渦の中心をもつ SVC の形態をとると思われる(図-1(c))。実際、巻波発生は critical level が界面にごく近い $R_i < 0.4$ の領域において観測されている。なお、理論解析より2つのモードの不安定波の発生が可能であることがわかったが、いずれの不安定波が発生するかは、その流れ場の擾乱の形によって決定されるであろう。また、2つの不安定波が両方発生すること考えられ、その場合には、それらが互いに相互作用を及ぼし合い複雑

な界面変形を起こし、さらには界面破壊に至ることも予想される(図-1(d)). また、それぞれの critical level が近い場合には、その相互作用がより強くなり、不安定波は成長の段階で合体し、SVC の形態をとり得ることも考えられる。

河口二層流においては、河口沖合の一時加速域で巻波による混合現象が見られるが、河道部では cusped-breaking 型の界面破壊は見られるものの、巻波による界面破壊は観測されていない。上述したように、巻波が発生するためには critical level が界面に十分近くなければならない。 R_i 数で言えば、 R_i が低い流れ場である必要がある。微小流量の場合を除き、河口二層流においては河口で内部フルード数 $F_i \approx 1$ 、河道部では $F_i \leq 1$ なることが知られている。この F_i は大域的な量で表現された無次元量であるため、本研究で用いた R_i と正確に関係づけることはできないが、実験より得られた河口二層流の流速分布形より定性的に、 $R_i \sim F_i^{-2}$ と考えられる。ゆえに、 $F_i \approx 1$ の河口条件より、河道部では R_i 数がある値より低い流れ場は実現されず、 R_i 数に下限値が存在することになる。このことは、critical level がある程度以上、界面に近づけないことを意味し、河道部における巻波発生の可能性の低下をまねいている。

5. 結 語

密度二成層 tanh 型剪断流の安定性解析によって、2 種類の不安定波モードが得られ、界面の直上、直下の集中性の強い渦は、これらの成長の結果と考え得ることを示した。また、実験より知られている界面波の諸特性も、これらの不安定波の発生に伴う界面変形として、よく説明し得た。そして、さらに界面波の波動形態の相違は、発生した不安定波の critical level と深い関わりをもってあることもわかった。本研究では、流れ場を密度二成層

tanh 型流速分布でモデル化したが、上層厚もしくは下層厚が極端に薄い場合や、流速分布が tanh 型からずれた場合等は、2 種類の不安定波の増幅率や位相速度に違いが生じどちらかの不安定波が強調されたり、安定化されたりして、多少異った波動特性を示すものと思われる。しかしいずれにせよ、密度二成層剪断流においては、一流体や漸変密度流の場合とは異なり、上下層内に critical level を有する位相速度の異なる 2 種類の不安定波モードが存在し、密度二層流の混合現象において、これらの不安定波が関与していることは確かであろう。

参 考 文 献

- 1) 吉田静男: 密度界面における混合機構の研究, 土木学会論文報告集, No. 273, pp. 59~68, 1978.
- 2) 室田 明・平田健正: 成層密度流における内部波特性と混合機構について, 第22回水理講演会論文集, pp. 107~112, 1978.
- 3) 日野幹雄・灘岡和夫・萩原 克: 塩淡水界面における渦列の形成と混合機構, 第10回乱流シンポジウム論文集, pp. 149~153, 1978.
- 4) 吉田静男・西田修三・田城鑑雄: 定常二層流の三次元混合過程, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 525~529, 1981.
- 5) Drazin, P. G. and L. N. Howard: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, Academic Press, New York, pp. 1~89, 1966.
- 6) Hazel, P.: Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 51, pp. 39~61, 1972.
- 7) Maslowe, S. A. and J. M. Thompson: Stability of a stratified free shear layer, *Physics of Fluids*, Vol. 14, pp. 453~458, 1971.
- 8) 日野幹雄・Nguyen Son Hung: 粘性および拡散の効果を考慮した成層二層密度流の安定性と界面波について, 第26回水理講演会論文集, pp. 513~518, 1982.
- 9) Betchov, R. and W. O. Criminale, Jr.: *Stability of Parallel Flows*, Academic Press, New York, 330 p., 1967.
- 10) 前出 6).
- 11) 前出 7).