

わき出し分布法を用いた2次元物体まわりの 波変形と流体力の解析法

中村孝幸*・高橋和男**・中山和典***

1. まえがき

現在までに2次元物体を対象として水面や水底に設置された構造物に作用するポテンシャル的な流体力を求める解析方法は、矩形断面などの簡単な形状物体については数多く発表されてきている。しかしながら任意形状の物体を対象にできる解析法は少なく、グリーンの公式に基づく井島らの方法¹⁾などがあるにすぎない。そして井島らの方法は水底形状が変化する場合にも対応できる利点はあるが、流体境界面の設定が不確定となることや物体表面以外の水底・水面境界等におけるポテンシャルをも未知数とすることから解くべき方程式の次元数が高く、要素分割数も必要以上に多い手法となっている。このような観点より、本研究では任意形状の物体を対象にでき、しかも物体表面上におけるわき出し強さのみを未知数とすることから解くべき方程式の次元数並びに要素分割数が少なくすむわき出し分布法による回折波問題の解析法について究明する。このためまず解析の要となるわき出しすなわち2次元波動場におけるグリーン関数並びにその法線微分値の特異性について検討を加え、これら関数の合理的な算定法について明らかにする。そして本解析法に基づき、各種の形状物体について作用流体力や物体まわりの波高分布の算定を行ない、従来の結果や本研究の実験結果との比較の上でその妥当性を検証したものである。

2. 回折波ポテンシャルの表示

図-1に示すように水深一定の2次元流体場に x 軸の正方向に向かって微小振幅波が入射してくるとき、固定された任意断面物体よりの回折波の速度ポテンシャル ϕ_D はわき出し分布法を用いて式(1)のように表示できる。

$$\phi_D(x, z) = \int_S f(X, Z) G(x, z; X, Z) dS(X, Z) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに f はわき出し分布関数で境界条件により決定

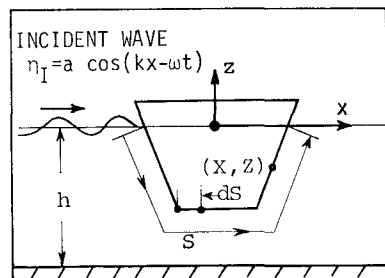


図-1 座 標 系

されるべき未知関数である。また G はわき出し関数、すなわち2次元波動場におけるグリーン関数である。そして S は物体の断面曲線を、 (x, z) は ϕ_D を求めようとする流体中の任意点を、 (X, Z) はわき出しを分布せしめる物体の断面曲線上の点を示す。

なお本解析では角振動数 ω の調和振動問題を取扱うことから、式(1)においても、以下の式の展開においても時間変動項 $e^{-i\omega t}$ は省略した表示を用いている。

さて式(1)中の G は、既にJohn²⁾により求められており、それを示すのが式(2)である。

$$\begin{aligned} G(x, z; X, Z) &= -\frac{iC_0}{k} \cosh \{k(h+z)\} \cosh \{k(h+Z)\} \\ &\quad \cdot e^{ik|x-X|} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{k_n} \cos \{k_n(h+z)\} \\ &\quad \cdot \cos \{k_n(h+Z)\} e^{-k_n|x-X|} \\ &= G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに G_0 は進行波型の成分を、 G_n は定常波型のそれを示し、 C_0 と C_n は以下の式によるものである。

$$C_0 = (k^2 - k_0^2) / \{(k^2 - k_0^2)h + k_0\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$C_n = (k_n^2 + k_0^2) / \{(k_n^2 + k_0^2)h - k_0\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

そして k_0 は進行波型の沖波の波数で角振動数 ω と重力加速度 g を用いて ω^2/g で与えられる。また k と k_n は水深 h における進行波型の波数並びに定常波型の波数を表わし、各々式(5)、(6)を解いて与えられる。

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\omega^2 = -gk_n \tan(k_n h) \quad \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 工博 愛媛大学講師 工学部海洋工学科

** 日造船情報システム(株)

*** ユニック(株)

3. わき出し分布関数の決定法

3.1 物体表面上の境界条件: 式(2)の G は水表面・水底の境界条件並びに物体より十分遠方における発散条件を満足しており、 ϕ_D に課すべき残された境界条件としては物体表面における法線方向の流速が0という条件, すなわち式(7)である。

$$\partial\phi_I(x, z)/\partial n(x, z) + \partial\phi_D(x, z)/\partial n(x, z) = 0 \quad (S \text{ 上で}) \cdots \cdots (7)$$

ここに ϕ_I は入射波の速度ポテンシャルを示し、 n は断面曲線 S 上の単位法線で流体中に向うものを正としてある。そして $\partial/\partial n$ が微小線素分 dS を用いて式(8)のように表わせることに注意すると、

$$\partial/\partial n = \partial/\partial x \cdot z_s - \partial/\partial z \cdot x_s \quad (z_s = dz/dS, \quad x_s = dx/dS) \cdots \cdots (8)$$

式(1)の ϕ_D を用いて式(7)から f の決定方程式が式(9)のように導ける。

$$\partial\phi_I/\partial n = - \int_S f(X, Z) \{G_{xz_s} - G_{zx_s}\} dS(X, Z) \cdots \cdots (9)$$

3.2 グリーン関数の法線微分値の算定: 本研究では任意な2次元物体を対象とするため、式(9)の右辺の積分を行なうに当り、断面曲線 S を有限個の線素分 dS_j に分割し、各線素分の中央点 (X_j, Z_j) に線素分にあたるわき出しを集合せしめるという中央点近似法を採用している。そしてこれによると式(9)は、式(10)のように書きなおせる。

$$\partial\phi_I/\partial n = - \sum_{j=1}^J f(X_j, Z_j) \int_{dS_j} (G_{xz_s} - G_{zx_s}) dS \cdots \cdots (10)$$

式(10)中の $\int dS$ の項は、後述するように $(x=X, z=Z)$ の条件で特異性を示すグリーン関数の法線微分値を含み、単に $\int dS \approx dS$ と近似させて処理することができない。このためグリーン関数の法線微分値に含まれる特異関数について検討してみる。

G の法線微分値は、式(2)の G の表示式を参照すると式(11)のように導ける。

$$\begin{aligned} G_{xz_s} - G_{zx_s} &= (G_{0xz_s} - G_{0zx_s}) + \sum_{n=1}^{\infty} (G_{nxx_s} - G_{nzz_s}) \\ &\cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

ここに G_{0x} , G_{0z} , G_{nx} , G_{nz} は各量の第2添字による微分量を表わす。

ここで定常波の波数 k_n の n が十分大きいとき、式(12)で近似できることに注意し、

$$k_n = n\pi/h - k_0/n\pi + O(n^{-2}) \cdots \cdots (12)$$

$k_0/n\pi$ が微小補正量と考えられる時の n を N と定義すると、 $n > N$ の条件下における G_{nx} と G_{nz} の一般

項 B_{nx} と B_{nz} は、式(12)を G_{nx} , G_{nz} に代入し、 $O(n^{-2})$ の項を無視して式(13), 式(14)のように導ける。

$$\begin{aligned} B_{nx} \approx & \frac{(\pm)}{h} \left\{ \left(1 + \frac{k_0|x-X|}{n\pi} \right) CS(z)CS(Z) \right. \\ & + \frac{k_0(h+z)}{n\pi} SN(z)SN(Z) \\ & + \frac{k_0(h+Z)}{n\pi} SN(Z)SN(z) \left. \right\} \\ & \cdot \exp \left(-\frac{n\pi|x-X|}{h} \right) \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{nz} \approx & \frac{1}{h} \left\{ \left(1 + \frac{k_0|x-X|}{n\pi} \right) SN(z)CS(Z) \right. \\ & + \frac{k_0(h+Z)}{n\pi} SN(z)SN(Z) \\ & - \frac{k_0(h+z)}{n\pi} CS(z)CS(Z) \left. \right\} \\ & \cdot \exp \left(-\frac{n\pi|x-X|}{h} \right) \cdots \cdots (14) \end{aligned}$$

ここに $(\pm)$ は $x \geq X$ に対応し、 $SN(y)$, $CS(y)$ は下記の関数を表わす。

$$\begin{aligned} SN(y) &= \sin \{n\pi(h+y)/h\}, \\ CS(y) &= \cos \{n\pi(h+y)/h\} \end{aligned}$$

そして B_{nx} 並びに B_{nz} の無限級数和は解析的に算定でき、式(11)の右辺第2項と対応する表示式で示すと式(15)のように書き下せる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (B_{nxx_s} - B_{nzz_s}) \\ &= - \frac{k_0 \{ (x-X)z_s + (z+Z+2h)x_s \}}{4\pi h} \\ & \quad \cdot \log(1-2E \cos \Sigma + E^2) \\ & \quad - \frac{k_0 \{ (x-X)z_s + (z-Z)x_s \}}{4\pi h} \\ & \quad \cdot \log(1-2E \cos \Delta + E^2) \\ & \quad + \frac{(\pm)z_s E (\cos \Sigma - E) - x_s E \sin \Sigma}{2h(1-2E \cos \Sigma + E^2)} \\ & \quad + \frac{(\pm)z_s E (\cos \Delta - E) - x_s E \sin \Delta}{2h(1-2E \cos \Delta + E^2)} \\ & \quad + \frac{k_0 \{ (\pm)(z+Z+2h)z_s - [x-X]x_s \}}{2\pi h} \\ & \quad \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{E \sin \Sigma}{1-E \cos \Sigma} \right\} \\ & \quad + \frac{k_0 \{ (\pm)(z-Z)z_s - [x-X]x_s \}}{2\pi h} \\ & \quad \cdot \tan^{-1} \left\{ \frac{E \sin \Delta}{1-E \cos \Delta} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^6 \delta_i \cdots \cdots (15) \end{aligned}$$

ここに δ_i は、上式中の対応する各関数を、 Δ , Σ , E は以下の表示式により与えられるものである。

$$\Delta = \pi(z-Z)/h, \quad \Sigma = \pi(z+Z+2h)/h,$$

$$E=\exp [-\pi |x-X|/h]$$

式 (15) の各関数 δ_i の特異性を検討してみると特異点は $(x=X, z=Z)$ で表-1 に示すような結果になる。そして特異関数は逆数型と対数型の 2 種類であることがわかる。

表-1 グリーン関数の法線微分値に含まれる特異性

条 件	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
① $x=X$ $z=Z \neq 0, -h$	有限値 ($\neq 0$)	0	有限値 ($\neq 0$)	∞	0	0
② $x=X$ $z=Z=0$	∞	0	∞	∞	0	0
③ $x=X$ $z=Z=-h$	0	0	∞	∞	0	0

そして特異点を除く一般点において式 (10) の右辺の積分は $\int dS \rightarrow \Delta S$ と近似でき、上記までの結果を参照して、この数値表示式は式 (16) のように書き表わすことができる。

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \int_{\Delta S_j} (G_{xz} z_{si} - G_{0z} x_{si}) dS \\ &= \left[(G_{0x} z_{si} - G_{0z} x_{si}) + \sum_{n=1}^N (G_{nx} z_{si} - G_{nz} x_{si}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N (B_{nx} z_{si} - B_{nz} x_{si}) \right] \Delta S_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^6 \delta_i \Delta S_j \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここに (x_i, z_i) は (x, z) に対応するもので線素分の中央点を示す。

一方特異点においては、特異性を示す関数のみについて ΔS_j にわたる厳密な積分を実行する必要がある、表-1 を参照して結果のみと示すと式 (17) のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \left[(G_{0x} z_{si} - G_{0z} x_{si}) + \sum_{n=1}^N (G_{nx} z_{si} - G_{nz} x_{si}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N (B_{nx} z_{si} - B_{nz} x_{si}) \right] \Delta S_j + \lambda_s \dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに λ_s は表-1 に示す各条件により異なった表示をとり式 (18) で与えられる。

$$\lambda_s = \begin{cases} (\delta_1 + \delta_3) \Delta S_j + 1/2 & (z_i = Z_j \neq 0, -h \text{ のとき}) \\ 1/2 + k_{0x} \Delta S_j \{1 - \log(\pi \Delta S_j / 2h)\} \Delta S_j / \pi & \\ \pm (X_{sj}^2 - Z_{sj}^2) / 2 & (z_i = Z_j = 0 \text{ のとき}) \\ 1/2 \pm (Z_{sj}^2 - X_{sj}^2) / 2 & \\ & (z_i = Z_j = -h \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $\pm$ は、 $X_{sj} \geq 0$ に対応する。
そしてこれら α_{ij} を用いると式 (10) は、式 (19) のようにマトリックス方程式に書き下せ、

$$\begin{aligned} (\partial \phi_i / \partial n)_i &= - \sum_{j=1}^J f(X_j, Z_j) \alpha_{ij} \\ (i=1, 2, 3, \dots, J) \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

これを解くことにより、わき出し分布関数 f が決定できることになる。

4. 回析波および作用流体力の算定法

4.1 回析波ポテンシャルの算定: 3. で述べた方法によりわき出し分布関数 f が決定できると、これを式 (1) に代入して ϕ_D が求まることになる。そして式 (1) を式 (10) と同様に中央点近似法で数値方程式に書きなおすと式 (20) となる。

$$\begin{aligned} \phi_D(x_i, z_i) &= \sum_{j=1}^J f(X_j, Z_j) \\ &\quad \cdot \int_{\Delta S_j} \left(G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \right) dS \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

しかしながら右辺の積分を取扱うにあたり、3. と同様に被積分関数であるグリーン関数の特異性を検討する必要がある。そして 3.2 において B_{nx}, B_{nz} を求めたのと類似した方法により G_n の $n > N$ における一般項 D_n を求めると式 (21) のように導ける。

$$\begin{aligned} D_n &\approx -CS(z)CS(Z) \exp \left(-\frac{n\pi |x-X|}{h} \right) / n\pi \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

さらに D_n の無限級数とは解析的に求めることができ、式 (22) のように表わせる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} D_n &= \{ \log(1 - 2E \cos \Sigma + E^2) \\ &\quad + \log(1 - 2E \cos \Delta + E^2) \} / 4\pi \\ &= \xi_1 + \xi_2 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

表-2 グリーン関数に含まれる特異性

条 件	ξ_1	ξ_2
① $x=X$ $z=Z \neq 0, -h$	有限値 ($\neq 0$)	∞
② $x=X$ $z=Z=0$	∞	∞
③ $x=X$ $z=Z=-h$	∞	∞

ここで、 ξ_1, ξ_2 の特異性を検討してみると特異点は $(x=X, z=Z)$ で表-2 に示す結果となる。

したがって特異点を除く一般点において式 (20) の右辺の積分値 β_{ij} の数値表示式は式 (23) のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \int_{\Delta S_j} \left(G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \right) dS \\ &= \left(G_0 + \sum_{n=1}^N G_n - \sum_{n=1}^N D_n \right) \Delta S_j + (\xi_1 + \xi_2) \Delta S_j \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

一方特異点における β_{ij} は、表-2 を参照して特異性を示す関数のみについて厳密な積分を行ない、式 (24) のように導ける。

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \left(G_0 + \sum_{n=1}^N G_n - \sum_{n=1}^N D_n \right) \Delta S_j \\ &\quad + \left[\xi_1 \Delta S_j + \Delta S_j \{ \log(\pi \Delta S_j / 2h) - 1 \} / 2\pi \right. \\ &\quad \left. + \Delta S_j \{ \log(\pi \Delta S_j / 2h) - 1 \} / \pi \right] \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに【】の上側は表-2の①の条件のときに、下側は②および③の条件のときにとるものとする。

4.2 物体まわりの波高分布: 物体まわりの水面変動 η は、 ϕ_I と式 (20) により求められる ϕ_D を用いて式 (25) により算定できる。

$$\eta(x,t) = \text{Real} \left[\frac{i\omega}{g} (\phi_I + \phi_D) e^{-i\omega t} \right] \Big|_{z=x}^{z=0} \quad \dots\dots (25)$$

また反射率 C_R 、透過率 C_T は、式 (25) を考慮して式 (26)、式 (27) により与えられる。

$$C_R = [\phi_D / \phi_I]_{x \rightarrow -\infty}^{x=0} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$C_T = (\phi_D + \phi_I) / \phi_I \Big|_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで $x \rightarrow \pm\infty$ としてあるのは、 C_R 、 C_T が物体より十分離れると減少する定常波の影響を含まない形で定義されていることによるもので、実際計算のときには式 (25) において定常波の成分 ΣG_n を除いた形で ϕ_D を求めればよい。

4.3 作用流体力: 物体表面に作用する圧力は、線形化された圧力方程式を用いて算定でき、変動圧力の複素振幅 $\bar{P}$ は式 (28) で求められる。

$$\bar{P} = i\rho\omega(\phi_I + \phi_D) \quad (S \text{ 上}) \quad \dots\dots\dots (28)$$

また作用波力の複素振幅 $\bar{F}_m$ ($m=1\sim 3$) は、 $\bar{P}$ を用いて式 (29) で与えられる。

$$\bar{F}_m = - \int_S \bar{P} r_m dS \quad (m=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに $\bar{F}_1$ は x 軸方向への作用波力を、 $\bar{F}_2$ は z 軸方向へのそれを、 $\bar{F}_3$ は z 軸上の点 $(0, z_G)$ まわりの波力によるモーメントを示す。そして r_m は式 (30) で定義されるものである。

$$r_m = \begin{cases} z_s & m=1 \\ -x_s & m=2 \\ x_s + (z - z_G)z_s & m=3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (30)$$

5. 算定結果

4. までに述べた方法を用いて回析波問題の解法を行なうに先立ち、矩形物体を用いて断面曲線の線素分への分割数が波力の算定精度に及ぼす影響について検討してみた。その結果、算定誤差が1%以下となるのは、線素分の長さ ΔS と波長 L の比で示すと、 $\Delta S/L > 0.03$ 程度であることが確認された。したがって本研究では以後 $\Delta S/L < 0.03$ となるようにして計算を行なっている。なお、 α_{ij} 、 β_{ij} の算定に必要となる N については、式 (12) を参照して

$$|k_n h - n\pi| < 0.01\pi$$

を満足する n を N としてある。

図-2 は水平円柱による透過率 C_T の本解析法による算定結果と井島らによる算定結果並びに実験結果との比較を示す。本解析法による結果は井島らのそれによく

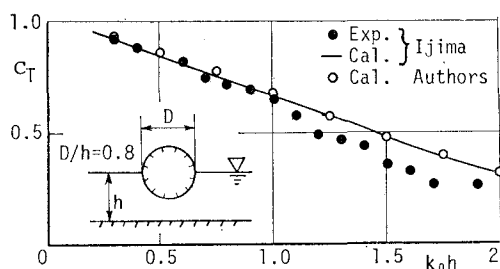


図-2 水平円柱の透過率

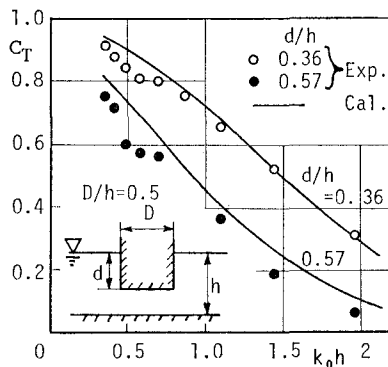


図-3 矩形物体の透過率

一致していることがわかる。

図-3 は矩形断面物体による C_T の算定値と実験値の比較を示す。なお実験は水深 $h=70$ cm と一定にした2次元造波水槽で入射波高 $H=16$ cm に保ち、きつ水 $d=25$ cm、40 cm の2種類について周期 T を1.2 sec~2.8 sec と変化させて行なったものである。

図-3 より、 C_T の算定値は $k_0 h$ の小さな領域で若干実験値を上まわるものの全体的な変動傾向はよく一致していることが認められる。そして実験値と算定値の差異は堤体近傍に形成される渦形成によるものと考えられるが定かでない。また図-4 は、きつ水 $d=20$ cm の場合の上記矩形物体に作用する水平波力の算定値と実験値の比較を示すもので、算定値は実験値の変動傾向をよくあらわしていることがわかる。なお上記の水平円柱並びに矩形物体を対象にした計算において本解析法は、グリー

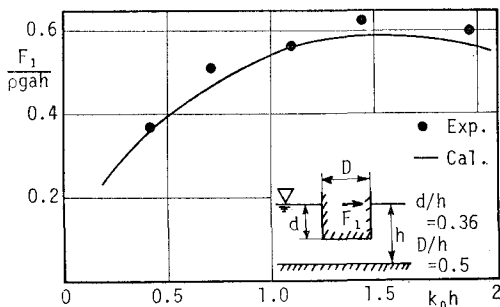


図-4 矩形物体に作用する水平波力

ンの公式に基づく解析法に比較すると約 1/8 程度の計算能力で処理できたことを付記しておく。

6. 結 語

以上わき出し分布法を用いた任意断面物体まわりの回析波問題の解析法について明らかにすると共に実験結果との比較の上でその妥当性を検討してきた。とりまとめれば以下のように結論される。

i) グリーン関数 G 並びにその法線微分値 $\partial G/\partial n$ は、逆数型及び対数型の特異関数を含み、わき出しの位置により 3 つの異なった特異性を示す。そして特異点を

含む任意点についてこれら関数の線素分にわたる積分値を簡潔に計算できる陽な表示式を明らかにした。

ii) 本解析法を用いて任意な次元形状物体による波変形並びに作用波力の算定が精度よくしかも効率よく行なえる。

参 考 文 献

- 1) Ijima, T. et al.: A method of analysis of two dimensional water wave problem, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., pp. 2717~2736, 1976.
- 2) John, F.: On the motion of floating bodies, II, Comm. on Pure and Applied Math., Vol. 3, No. 1, pp. 45~101, 1950.