

斜め入射波に対する潜堤の反射効果に関する数値解析

井島 武士*・吉田 明德**・北山 斉***

1. ま え が き

従来、種々の海岸構造物、例えば透過性消波護岸、潜堤、浮防波堤等の研究は、多くは2次元問題、すなわち構造物に対して波は垂直に入射するものとして取り扱われている。しかし現実には波は構造物に対しある角度をもって入射する場合が考えられ、このような斜め入射波の場合における波の作用および波の変形等は垂直入射の場合とは異なる特性をもつことが考えられる。

斜め入射波に関する理論解析の試みとして、例えば Garrison²⁾ による無限水深中の小吃水浮体の diffraction および radiation 問題の特異点法による解析や、また Bai³⁾ による短形浮体の diffraction 問題の有限要素法による解析があるものの、斜め入射波に対する海岸構造物の特性は、十分解明されているとはいえない。

本文は、斜め入射波に対する海岸構造物の特性を理論的に解析するための方法として、著者らが示した2次元グリーン公式による水面波境界値問題の解析法⁴⁾を、斜め入射波に対して拡張する方法を示し、解析法の検証と、その具体的な適用例として斜め入射波に対する不透過潜堤の反射効果について解析を行ったものである。

2. 理 論 解 析

図-1に示すように、水深 h の海域に任意の断面形状の不透過潜堤があって、潜堤の長さは十分長いものとする。座標系を、潜堤上の静水面に原点 O 、静水面上でかつ潜堤に対し垂直方向に x 軸、潜堤の長さ方向に y 軸、鉛直上方に z 軸をとり、 x 軸と θ の角度をなして、周波数 σ ($\sigma = 2\pi/T$; T は周期)、振幅 ζ_0 の規則波が入射するものとする。

(1) 流体運動の速度ポテンシャル

流体運動は非圧縮性完全流体の微小振幅波運動と仮定し流体運動の速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z; t)$ を、 g を重力の加速度、 $\phi(x, y, z)$ を無次元ポテンシャル関数として次式で表わす。

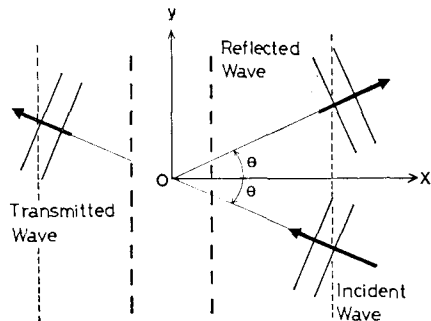


図-1 潜堤モデルと座標系

$$\Phi(x, y, z; t) = (g\zeta_0/\sigma)\phi(x, y, z)\exp(i\sigma t) \cdots \cdots (1)$$

このときポテンシャル関数 ϕ は次のラプラスの方程式を満足せねばならない。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \cdots \cdots (2)$$

いま図-1に示すように、潜堤より離れた所に仮想の境界面 AB ($x=l$)、 $A'B'$ ($x=l'$) をもうけ、流体域を ($x \geq l$) の領域 (1)、($l' \leq x \leq l$) の領域 (0)、($x \leq l'$) の領域 (2) に分けることにする。仮想境界面 AB 、 $A'B'$ を、潜堤近傍の散乱定常波が進行波に較べて無視できる程度に減衰する位置まで離して設けることにすると、領域 (1) においては、入射波と反射波のみが存在し、領域 (2) は通過波のみが存在する。よって領域 (1) における入射波のポテンシャル関数を ϕ_I 、反射波のポテンシャル関数を ϕ_R とすると、 ϕ_I 、 ϕ_R は次式で与えられる。

$$\phi_I(x, y, z) = \exp\{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)\} \cdot C(z) \cdots \cdots (3)$$

$$\phi_R(x, y, z) = K_r \exp\{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\} \cdot C(z) \cdots \cdots (4)$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科

*** 学生会員 九州大学大学院 水工土木学科

ただし、上式で k は入射波の波数で、 $C(z)=\cosh k(z+h)/\cosh kh$, K_r は $|K_r| \exp(i\epsilon)$ とおくとき $|K_r|$ が反射波の反射率、 ϵ が反射波の位相を表わすところの複素反射率である。(3), (4) 式より領域 (1) における流体運動のポテンシャル関数 $\phi_1(x, y, z)$ は、 ϕ_I と ϕ_R の和として次式で与えられる。

$$\phi_1(x, y, z) = \exp(-iky \sin \theta) \cdot [\exp(ikx \cos \theta) + K_r \exp(-ikx \cos \theta)] \cdot C(z) \cdots (5)$$

領域 (2) における通過波のポテンシャル関数を ϕ_T とすると、複素通過率を K_t とし ϕ_T は次式で与えられる。

$$\phi_T(x, y, z) = K_t \exp\{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)\} \cdot C(z) \cdots (6)$$

一方、仮想境界面で囲まれた領域 (0) において、 y 軸方向の速度ポテンシャルの変動は、領域 (1), (2) と同様に $\exp(-iky \sin \theta)$ で表わされるから、 x - z 平面における速度ポテンシャルの変動を表わす未知関数を $f(x, z)$ で表わすこととすると、領域 (0) の流体運動に関するポテンシャル関数 $\phi(x, y, z)$ は次式で表わされる。

$$\phi(x, y, z) = \exp(-iky \sin \theta) \cdot f(x, z) \cdots (7)$$

この $\phi(x, y, z)$ は (2) 式のラプラスの方程式を満足せねばならないから、(7) 式を (2) 式に代入して未知関数 $f(x, z)$ に関する次の Helmholtz の方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 f(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, z)}{\partial z^2} + (ik \sin \theta)^2 f(x, z) = 0 \cdots (8)$$

(2) 未知関数 $f(x, z)$ に関するグリーン公式

いま図-2に示すような x - z 平面上の閉曲線 ∂D で囲まれる閉領域 D を考え、境界線上の点を (ξ, η) で表わすこととする。閉領域 D において、 $f(x, z)$ に関し、(8) 式が成り立つならば、このとき D 内の任意点 $P(x, z)$ における $f(x, z)$ の値は、(8) 式の特解である変形 Bessel 関数 $K_0(kr \sin \theta)$ をグリーン関数として、次式で与えられる¹⁾。

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[K_0(kr \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \nu} f(\xi, \eta) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} K_0(kr \sin \theta) \right\} f(\xi, \eta) \right] ds \cdots (9)$$

上式で ν は境界線 ∂D に対する外向き法線で、 $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-z)^2}$ 積分方向 S は境界線 ∂D に沿って反時計回りに取るものとする。

(9) 式において、領域内の任意点 P が境界線上の点

(ξ, η) に近づく極限 $r \rightarrow 0$ では、 $K_0(kr \sin \theta)$ が対数的特異点をもつことから次式が導かれる。

$$f(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \left[K_0(kr \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \nu} f(\xi, \eta) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} K_0(kr \sin \theta) \right\} f(\xi, \eta) \right] ds \cdots (10)$$

ただし、 (ξ', η') は境界線上の任意の一点で、 $r = \sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2}$ である。

(10) 式は境界線上における $f(\xi, \eta)$ に関する積分方程式であって、これを解いて境界線上における $f(\xi, \eta)$, $\partial f(\xi, \eta)/\partial \nu$ が求まれば、(9) 式より領域内の任意点 (x, y) における $f(x, y)$ が決まることになる。そこで (10) 式で与えられる未知関数 $f(x, y)$ に関する積分方程式 (グリーン公式と呼ぶ) を、図-1に示す流体域 (0) の x - z 平面上の閉曲線 AA'B'BA で囲まれる閉領域に適用し、各境界面上における境界条件のもとで (10) 式を解く事により問題の解が得られる事になる。

(3) 境界条件

各境界面上における境界条件は次式のようにになる。

$$a) \text{ 水面では微小振幅波の水面条件より } \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \nu} = (\sigma^2/g) f(\xi, \eta) \cdots (11)$$

$$b) \text{ 水底面および潜堤上の不透過面では } \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \nu} = 0 \cdots (12)$$

$$c) \text{ 仮想境界面 } AB(x=l), A'B'(x=l') \text{ では、圧力と流速の連続より}$$

$$\phi = \phi_I, \quad \partial \phi / \partial \nu = \partial \phi_I / \partial x \quad (x=l)$$

$$\phi = \phi_T, \quad \partial \phi / \partial \nu = -\partial \phi_T / \partial x \quad (x=l')$$

が成立すべきことより、(5), (6), (7) 式を用いて次式を得る。

($x=l$ では)

$$f(l, \eta) = \{\exp(ikl \cos \theta) + K_r \exp(-ikl \cos \theta)\} \cdot C(\eta) \cdots (13)$$

$$\frac{\partial f(l, \eta)}{\partial \nu} = ik \cos \theta \{\exp(ikl \cos \theta) - K_r \exp(-ikl \cos \theta)\} \cdot C(\eta) \cdots (14)$$

($x=l'$ では)

$$f(l', \eta) = K_t C(\eta) \exp(ikl' \cos \theta) \cdots (15)$$

$$\frac{\partial f(l', \eta)}{\partial \nu} = -i(k \cos \theta) K_t C(\eta) \exp(ikl' \cos \theta) \cdots (16)$$

(4) 数値計算法

ここで水深 h を用いて次のような無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} x &= x/h, \quad y = y/h, \quad z = z/h, \quad \lambda_0 = kh \\ \Gamma &= \sigma^2 h/g, \quad r = r/h, \quad s = s/h, \quad \nu = \nu/h \\ \xi &= \xi/h, \quad \eta = \eta/h, \quad l = l/h, \quad l' = l'/h \\ \lambda &= kh \sin \theta, \quad \bar{f}(\xi, \eta) = h \partial f(\xi, \eta) / \partial \nu \end{aligned} \right\} \cdots (17)$$

(10) 式を数値的に解くため、図-3に示すように、流体域 (0) の x - z 平面上の閉領域の各境界面、すなわち

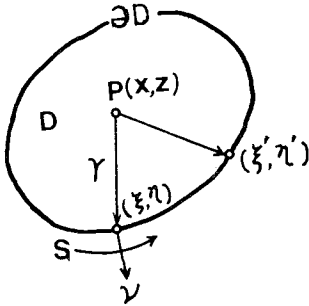


図-2

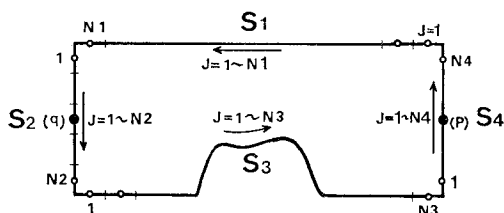


図-3 境界上の要素分割

静水面 S_1 , 仮想境界面 S_2 ($x=l'$), 水底および潜堤上の不透過面 S_3 , 仮想境界面 S_4 ($x=l$) を, それぞれ, N_1 , N_2 , N_3 , N_4 個の微小な要素 ΔS_j ($j=1\sim N_1$, $1\sim N_2$, $1\sim N_3$, $1\sim N_4$) に分割し, 各要素 ΔS_j の中点を (j) ($=(\xi_j, \eta_j)$) として表わすこととし, また各要素 ΔS_j での関数値 $f(\xi, \eta)$, $\bar{f}(\xi, \eta)$ は一定で中点での値に等しいものとするとき (10) は次式で表わされる。

$$f(i) = \sum_{j=1}^N [E(i, j) \bar{f}(i) - \bar{E}(i, j) f(j)] \quad \dots\dots\dots (18)$$

上式で $N=N_1+N_2+N_3+N_4$, $f(i)$ は, 任意点 (ξ', η') がある要素 ΔS_i 上の値を意味し, $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ は (i) 点から要素 ΔS_j 上までの距離を $r_{ij} = \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}$ としたときに, 次式で与えられる要素 ΔS_j に関する積分値である。

$$E(i, j) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} K_0(\lambda r_{ij}) ds \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\bar{E}(i, j) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \nu} K_0(\lambda r_{ij}) ds \quad \dots\dots\dots (20)$$

そこで (18) 式に (11)~(16) 式で与えられる各境界面での境界条件を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} f(i) = & \sum_{j=1}^{N_1} \{ \Gamma E(i, j) - \bar{E}(i, j) \} \cdot f(j) \\ & - K_t \exp(i\alpha') \sum_{j=1}^{N_2} \{ \bar{E}(i, j) + i\beta E(i, j) \} \cdot C(j) \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \bar{E}(i, j) f(j) - K_r \exp(i\alpha) \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}(i, j) \\ & + i\beta E(i, j) \} \cdot C(j) - \exp(i\alpha) \sum_{j=1}^{N_4} \{ \bar{E}(i, j) \\ & - i\beta E(i, j) \} \cdot C(j) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

上式で, $\alpha = \lambda_0 l \cos \theta$, $\alpha' = \lambda_0 l' \cos \theta$, $\beta = \lambda_0 \cos \theta$, $C(j) = C(\xi_j)$ である。

(21) 式は (i) に関し, 境界面 S_1 , S_3 の要素中点 (i) ($i=1\sim N_1$, $1\sim N_3$) と, 仮想境界面上の任意点 (p) ($x=l$), (q) ($x=l'$) に関して成り立ち, S_1 および S_3 の各要素上の $f(j)$ と複素反射率 K_r および複素通過率 K_t に関する同数の一次関係式を与えるから, これを解くことによって境界面 S_1 , S_3 上の $f(j)$ および K_r , K_t が決まり, (11)~(16) 式の境界条件よりすべての境界面上における $f(j)$, $\bar{f}(j)$ が決まることになる。したがって, 領域内の任意点 (x, z) における $f(x, z)$ は (9) 式から求められ, 流体運動が決まることになる。

(5) $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ の算定

一般に, 図-4 に示すような閉領域の (i) 点と要素 ΔS_j

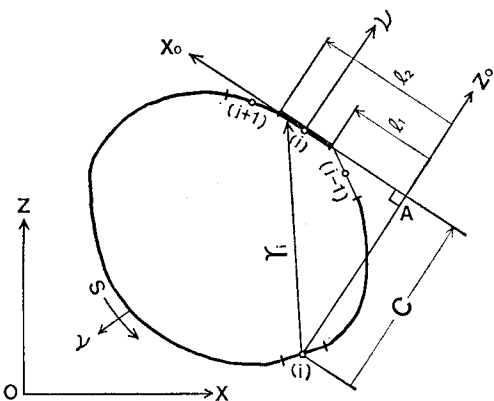


図-4

に関し (19), (20) 式で与えられる係数 $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ は, ΔS_j が十分小さく, かつ r_{ij} が大きいときには次式で近似的に算定される。

$$E(i, j) = \frac{1}{\pi} K_0(\lambda r_{ij}) \Delta S_j \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\bar{E}(i, j) = -\frac{\lambda}{\pi} K_1(\lambda r_{ij}) r_{ij} \Delta \theta_{ij} \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式で r_{ij} は (i) 点と (j) 点間の距離で $\Delta \theta_{ij}$ は ΔS_j が (i) 点に対して張る角度がある。

しかし, (i) と (j) が近接した 2 点, 特に境界隅角部近傍の 2 点である場合には, (22), (23) 式による $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ の算定は誤差が大きくなる。本解析では次の様にして $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ の算定を行った。

図-4 に示すように, ΔS_j 上でかつ積分方向に x_0 軸を取り, (i) 点の x_0 軸上の投影点 A を原点とし, ΔS_j 上の外向き法線 ν の方向に x_0 軸をもつような座標系を導入する。 (i) 点と A 点の距離を c , 要素 ΔS_j に関する積分の始点の x_0 座標を l_1 , 終点の座標を l_2 とすると $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ は次式で与えられる。

$$E(i, j) = \frac{1}{\pi} \int_{l_1}^{l_2} K_0(\lambda \sqrt{x_0^2 + c^2}) dx_0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\bar{E}(i, j) = \frac{\lambda c}{\pi} \int_{l_1}^{l_2} K_1(\lambda \sqrt{x_0^2 + c^2}) \cdot (x_0^2 + c^2)^{-1/2} dx_0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式で K_1 は 1 次の第 2 種変形 Bessel 関数である。 $K_0(X)$, $K_1(X)$ は $X < 2$ において次式のように漸近展開される。

$$K_0(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(X/2)^{2n}}{(n!)^2} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \left(\gamma + \log \frac{X}{2} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} K_1(X) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(X/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \cdot \left\{ \left(\gamma + \log \frac{X}{2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

上式で γ は Euler の定数で $\gamma=0.5772156\cdots$ である。

よって, (26), (27) 式で n を n^* 項まで取り, $X=\lambda\sqrt{x_0^2+c^2}$ とおいて (24), (25) 式に代入し定積分を行えば $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ が算定される. 本解析では, $n^*=3$ にとり $\lambda r_{ij} \leq 0.8$ については (25), (26) 式で, $\lambda r_{ij} > 0.8$ については (22), (23) 式によって $E(i, j)$, $\bar{E}(i, j)$ を算定した.

3. 数値計算および結果

解析法の検証を行うため, 厳密解の得られる不透過直立壁に対し斜め入射をする場合について本解析法を適用して解析した結果を示すと図-5 のようである. この場合は 2. の理論解析において, 不透過潜堤がなくかつ仮想境界面 $A'B'$ が不透過壁からなる場合であって, (21) 式において K_t に関する項の $K_t \exp(i\alpha')$ を 1 とおき, その項の β を 0 とおいて (21) 式を解けばよい. 仮想境界面 AB は, 直立壁から水深の 2 倍離れた所に設け, 境界面の要素分割数は $N1=20, N2=10, N3=20, N4=10$ にとり ($\Delta S_j=0.1h$), 静水面上の各計算点

での波高 $\zeta(j)$ ($j=1 \sim N1$) の入射波高 ζ_0 に対する比 ζ/ζ_0 ($=|f(j)|$) を, $\theta=30^\circ$, 60° , 80° についてそれぞれ (●), (▲), (■) で示し, 各 θ に対応する厳密解をそれぞれ一点鎖線, 破線, 実線で示している. この結果, $\theta=80^\circ$ のときに本解析法による解は厳密解に較べて若干大きく現われているもののその差は小さく, $\theta=30^\circ$, 60° においては計算値と厳密解の一致は良好で本解析法が妥当であることを示している. ただし, 入射角 $\theta=90^\circ$, すなわち

沿い波の状態は理論解析の基本假定外であって計算は意味をもたない.

次に, 本解析法を不透過潜堤に適用してその反射率

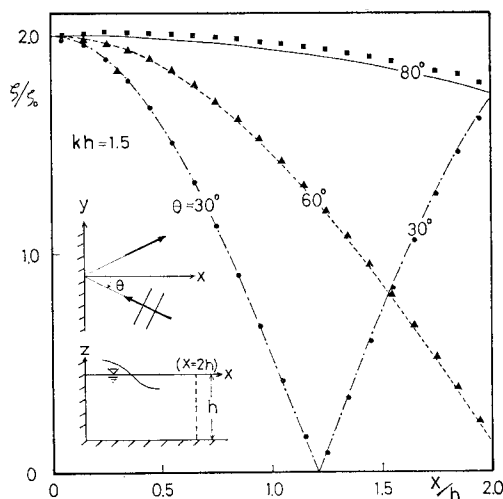


図-5 厳密解と本解析法による解の比較

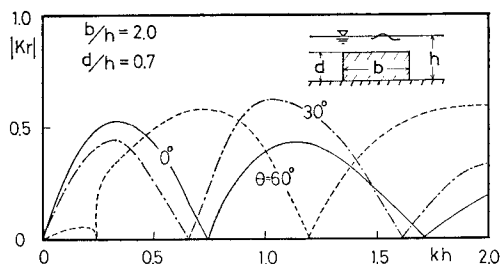


図-6 斜め入射波に対する潜堤の反射率

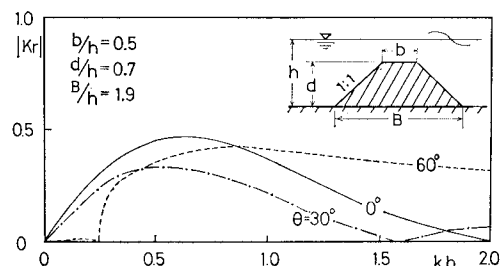


図-7 斜め入射波に対する潜堤の反射率

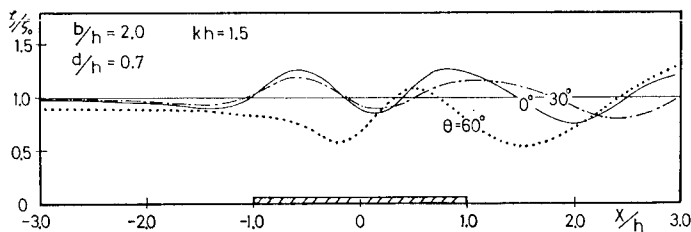


図-8 矩形潜堤近傍の波高分布

$|K_r|$ を求めた結果を図-6, 図-7 に, また $kh=1.5$ における矩形潜堤近傍の水面波高の計算値を図-8 に示す. 不透過潜堤の断面形状は図中に示すような諸元をもつ矩形と, 前後面に 1:1 の傾斜をもつ台形の潜堤で, 天端中心上の静水面を座標原点として, 仮想境界面 AB , $A'B'$ を原点よりそれぞれ水深の 3 倍の所に取り, 境界面の要素分割数は $N1=60, N2=N4=10$ ($\Delta S=0.1h$), 水底および潜堤上の要素は矩形潜堤の場合は $\Delta S=0.1h$ として $N3=74$, 台形潜堤の場合は潜堤天端上を 5 個, 傾斜面上を 2×10 個, 水底面上を 2×20 個の計 $N3=65$ 個 ($\Delta S=0.1h$) に取って計算を行った. ただし, 入射角 $\theta=0^\circ$ の場合については著者らが示した水面波の 2 次元境界値問題の解析法⁴⁾によって計算した.

著者らの一人が行った研究⁵⁾の結果, 一般に不透過潜堤の反射率は入射波の周波数が増大するにつれ, 反射率がピーク値と 0 値を交互にくり返す, 山を連ねた形の反射特性を示すことになる. 図-6 を見るとこの傾向は $\theta=30^\circ$, $\theta=60^\circ$ の場合にも同様に現われているが, θ が増大するにつれ, $\theta=0^\circ$ の場合に較べて反射率の山と 0 点の周波数位置が周波数の低い方へ移るとともに第 1 の山のピーク値が $\theta=0^\circ$ に較べ小さくなり, 第 2 の山が大き

くなる傾向が見られ、特に $\theta=0^\circ$ と $\theta=60^\circ$ では、 $kh=0.7$, $kh=1.2$ 近傍で反射率のピークと 0 点が逆転しており、例えば $kh=1.2$ 近傍の入射波に対し、 $\theta=0^\circ$ の場合は潜堤は $[K_r]=0.5$ 近い反射率をもつが $\theta=60^\circ$ の波に対してはほとんど防波効果が期待出来ないことになる。以上の傾向は 図-7 の台形潜堤についても同様であるが、この場合は $\theta=0, 30^\circ$ に比べ $\theta=60^\circ$ の波に対しては特に広い範囲の周波数に対して反射効果があるといえる。

4. あとがき

変形 Bessel 関数をグリーン関数とする。2 次元グリーン公式を用いて、斜め入射波に対する潜堤の防波効果をポテンシャル運動の境界値問題として解析する方法を示した。

本論においては潜堤を対象として解析を行った結果、潜堤の防波効果の周波数特性は、波の入射角によって著しく異なることが明らかとなった。本解析法は、例えば斜め入射波に対する透過性護岸の消波効果、あるいは、

リーフ等による波の反射、通過等の解析に容易に適用出来るもので、特異点法や有限要素法に比べ解析が簡便でかつ十分な精度の解が得られるものと考ええる。

最後に図面の作製には九州大学水工土木学科技官牛房幸光氏の助力を得た、ここに記して感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 宇野利雄・洪妊植: ポテンシャル, 培風館, pp. 21~51, 1961.
- 2) Garrison, C. J.: On the interaction of an infinite shallow draft cylinder oscillating at the free surface with a train of oblique waves, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, Part 2, pp. 227~255, 1969.
- 3) Bai, K. J.: Diffraction of oblique waves by an infinite cylinder, Jour. Fluid Mech., Vol. 68, Part 3, pp. 513~535, 1975.
- 4) 井島武士・周 宗仁・吉田明徳: グリーンの公式による有限水深の波の 2 次元境界値問題の解法 (I. 透過および不透過斜面の場合), 九州大学工学集報, 第 48 巻, pp. 767~774, 1975.
- 5) 井島武士・佐々木富雄: 潜堤の効果に関する理論的研 (1. 究不透過潜堤), 第 18 回海岸工学講演会論文集, pp. 141~147, 1971.