

波による球状粒子の移動機構

土 屋 義 人*・清 水 潔**

1. 緒 言

波による底質の移動機構を1粒の球状粒子を対象として取り扱った研究は、海岸工学の分野に限らず、たとえば Martin ら¹⁾はじめ多くの研究者によって行われてきた。しかし、彼らは球状粒子の運動を回転運動とし、その振幅に注目して流体力との関係をとらえようとしてきたため、これを漂砂量則の定式化に応用していくためには、この他の運動形態をも究明しなければならない。そこで、本研究では水平床上の単一球状粒子の回転または滑動運動に対する運動方程式に基づいて、波による粒子の運動を数値シミュレーションする。そして、実験結果と数値シミュレーションの結果とを比較して、単一球状粒子の移動機構を考察する。

2. 球状粒子の移動モデル

球状粒子が水平床面を滑動運動だけをする場合と、床面に接触した状態で転動運動だけをする場合に分けて、それらの運動をモデル化する。その際、粒子に作用する流体抗力に関しては、相対速度の1乗に比例する場合と2乗に比例する場合の両者について、それぞれ解析的および数値的解法を試みる。また、外力としての水粒子速度の表示のための波動論は、Stokes 波の第3次近似解を用い、a) Euler 座標においても質量輸送速度が存在する著者ら²⁾の波速の定義によらない解、b) Lagrange 座標において全質量輸送の存在する Skjelbreia らの波速の第1定義による解、および c) Lagrange 座標においても全質量輸送の存在しない波速の第2定義による解を用いる。

2.1 基礎方程式

非定常流体中で鉛直方向に運動する球状粒子の運動方程式は、いわゆる Basset 項を含めて表わされる。Altaweel³⁾らの最近の研究によれば、Basset 項は $R_e(=Ud/\nu) \geq 62$ あるいは $\omega d/\nu \ll 40$ であれば省略することができる。ただし、 U ；球状粒子の移動速度、 d ；粒子の直径、 ω 振動流の角周波数、および ν ；動粘性係数である。

また、抗力の表示に対して、相対速度の1乗に比例する抵抗則を用いる場合には、抗力係数 C_D は次式で表わす。

$$C_D = K/R_e', \quad R_e' = (U-u)d/\nu \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 K は比例定数であって、Stokes の法則では24となる。

2.2 滑動運動モデル

(1) 相対速度の1乗に比例する抗力の場合(1次元モデル)

まず、波の周期 T 、波速 c および波長 L を基準量として、

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 2\pi t/T, \quad \xi = 2\pi x/L \\ \bar{u} &= u/c, \quad \bar{U} = U/c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を定義すれば、運動方程式は次式となる。

$$d\bar{U}/d\tau = S_T(\bar{u} - \bar{U}) + \bar{C}_M d\bar{u}/d\tau \mp \bar{\mu}_f \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} S_T &= (3/8\pi)K(T\sqrt{g/h})(h/d)\{\nu/\sqrt{gh}d(\sigma/\rho + C_M)\} \\ \bar{C}_M &= (1 + C_M)/(\sigma/\rho + C_M) \\ \bar{\mu}_f &= \mu_{fD}(h/L)(T\sqrt{g/h})^2\{(\sigma/\rho - 1)/2\pi(\sigma/\rho + C_M)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

であり、 u ；波による水粒子速度、 t ；時間、 σ/ρ ；粒子の比重、 C_M ；慣性係数、および μ_{fD} ；粒子の動摩擦係数で、複号は $U \geq 0$ による。さて、Stokes 波理論による水平方向の無次元水粒子速度 $\bar{u}(\tau, \xi, \eta)$ は、一般に次の式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{u}(\tau, \xi, \eta) &= B_0 + B_1 \cos(\xi - \tau) + B_2 \cos 2(\xi - \tau) \\ &\quad + B_3 \cos 3(\xi - \tau) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、前述した波理論 a) の場合には、

$$\begin{aligned} B_0 &= (1/4)F_1^2, \quad B_1 = F_1 \cosh \eta', \quad B_2 = F_2 \cosh 2\eta', \\ B_3 &= F_3 \cosh 3\eta', \quad F_1 = (2\pi a/L)/\sinh(2\pi h/L), \\ F_2 &= (3/4)(2\pi a/L)/\sinh^4(2\pi h/L), \\ F_3 &= (3/64)(2\pi a/L)^3 \{13 - 4 \cosh^2(2\pi h/L)\} \\ &\quad / \sinh^7(2\pi h/L) \end{aligned}$$

となり、b) の場合には、

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, \\ F_3 &= (3/64)(2\pi a/L)^3 \{11 - 2 \cosh(4\pi h/L)\} \\ &\quad / \sinh^7(2\pi h/L) \end{aligned}$$

となるが、さらに c) の場合には、

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 久保田鉄工神崎工場 FAW バイブ技術課

$$B_0 = -(2\pi a/L)^2/4 \tanh(2\pi h/L)$$

となり、質量輸送速度に対応する。ここに、 $\eta' = 2\pi h/L + \eta$, $\eta = 2\pi z/L$ であり、 $\bar{u}$ は τ , ξ および η の関数であるが、粒子に作用する抗力などは粒子の中心位置における水粒子速度で代表させ、またその移動距離は波長に比べて十分小さく床面付近に限定されるので、 $\eta = 0$ とする。さて、式(3)に式(5)を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} d\bar{U}/d\tau + S_T \bar{U} = & S_T \{ B_1 \cos(\xi - \tau) \\ & + B_2 \cos 2(\xi - \tau) + B_3 \cos 3(\xi - \tau) \} \\ & + \bar{C}_M \{ B_1 \sin(\xi - \tau) + 2B_2 \sin 2(\xi - \tau) \\ & + 3B_3 \sin 3(\xi - \tau) \} + S_T B_0 \mp \bar{\mu}_f \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

この解は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{U}(\tau, \xi) = & P_1 \sin(\xi - \tau) + P_2 \sin 2(\xi - \tau) \\ & + P_3 \sin 3(\xi - \tau) + P_4 \cos(\xi - \tau) \\ & + P_5 \cos 2(\xi - \tau) + P_6 \cos 3(\xi - \tau) \\ & B_0 \mp \bar{\mu}_f / S_T + C' e^{-S_T \tau} \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= B_1 S_T (\bar{C}_M - 1) / (S_T^2 + 1) \\ P_2 &= 2B_2 S_T (\bar{C}_M - 1) / (S_T^2 + 4) \\ P_3 &= 3B_3 S_T (\bar{C}_M - 1) / (S_T^2 + 9) \\ P_4 &= B_1 (S_T^2 + \bar{C}_M) / (S_T^2 + 1) \\ P_5 &= B_2 (S_T^2 + 4\bar{C}_M) / (S_T^2 + 4) \\ P_6 &= B_3 (S_T^2 + 9\bar{C}_M) / (S_T^2 + 9) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

であり、また C' は初期条件で定められる。すなわち、粒子が時刻 τ_1 で前進開始し、 τ_2 で前進終了、 τ_3 で後退開始し、 τ_4 で後退終了するとすれば、波の一周期間に粒子が移動する正味の移動距離 ξ_n は、次式となる。

$$\xi_n = \int_{\tau_1}^{\tau_2} U(\tau, \xi) d\tau + \int_{\tau_3}^{\tau_4} \bar{U}(\tau, \xi) d\tau \dots\dots\dots(9)$$

ゆえに、無次元平均移動速度 $\bar{U}_t = \xi_n / 2\pi$ で表される。ただし、 $\bar{\mu}_{fD}$ は式(3)中 $\bar{\mu}_f$ に動摩擦係数を用いたものであり、式(6)を式(9)に代入する場合、積分定数 C' は $\bar{U}(\tau_1) = \bar{U}(\tau_3) = 0$ において、それぞれ決定される。

(2) 相対速度の2乗に比例する抗力の場合(2次モデル)

同様に、次式の無次元運動方程式を得る。

$$d\bar{U}/d\tau = S_s(\bar{u} - \bar{U})|\bar{u} - \bar{U}| + \bar{C}_M d\bar{u}/d\tau \mp \bar{\mu}_f \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $S_s = (L/h)S_0$, $S_0 = 3C_D h / \{8\pi d(\sigma/\rho + C_M)\}$, $\bar{C}_M = (1 + C_M)/(\sigma/\rho + C_M)$, $\bar{\mu}_f = (T\sqrt{g/h})^2 \varphi$, および $\varphi = (\sigma/\rho - 1)/\{2\pi(\sigma/\rho + C_M)\}$ である。これは一般に解けないので、直接数値積分することとし、次の方法による。すなわち、 $\bar{U}(\tau_1) = 0$ を式(10)の初期条件として代入し、Runge-Kutta-Gill法により $\tau = \tau_1$ より順次 $\Delta\tau$ だけ経過するときの $\bar{U}$ を求め、初めて $\bar{U} < 0$ となるとき τ を前進運動の終了時刻 τ_2 とする。次に $\bar{U}(\tau_3) = 0$ を初期条件として計算し、初めて $\bar{U} > 0$ となるとき τ を後退運動の終了時刻 τ_4 とする。そして、 $\tau_1 \sim \tau_2$ および $\tau_3 \sim \tau_4$ の間で求まる $\bar{U}$ を各区間 Simpson 1/3 則によって

数値積分した値の代数和として計算され、波の一周期で割れば球状粒子の無次元平均移動速度 $\bar{U}_t$ が求まる。

2.3 回転運動モデル

(1) 相対速度の一乗に比例する抗力の場合(1次モデル)

このモデルが滑動モデルと異なる点は、球状粒子が接触点で滑らないという仮定より摩擦項が除去できること、床面の凹凸を考えない場合には、球状粒子の移動限界は存在しないことである。Martin ら¹⁾に従って、運動方程式を作り、さらに床面で粒子が滑らないとして角運動量式を用いて、摩擦項を除去すれば、次の無次元運動方程式が得られる。

$$d\bar{U}/d\tau = S_R(\bar{u} - \bar{U}) + \bar{C}_R d\bar{u}/d\tau \dots\dots\dots(11)$$

ここに、

$$\begin{aligned} S_R &= (3/8\bar{u})K(T\sqrt{g/h})(h/d)\{\nu/\sqrt{gh}d(7\sigma/5\rho + C_M)\} \\ \bar{C}_R &= (C_M + 1)/\{7\sigma/5\rho + C_M\} \end{aligned}$$

である。これを滑動モデルと同様にして解くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{U}(\tau, \xi) = & R_1 \sin(\xi - \tau) + R_2 \sin 2(\xi - \tau) \\ & + R_3 \sin 3(\xi - \tau) + R_4 \cos(\xi - \tau) \\ & + R_5 \cos 2(\xi - \tau) + R_6 \cos 3(\xi - \tau) \\ & + B_0 + C'' e^{-S_R \tau} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ここに、 C'' は初期条件より決まる積分定数であり、また

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= B_1 S_R (\bar{C}_R - 1) / (S_R^2 + 1) \\ R_2 &= 2B_2 S_R (\bar{C}_R - 1) / (S_R^2 + 4) \\ R_3 &= 3B_3 S_R (\bar{C}_R - 1) / (S_R^2 + 9) \\ R_4 &= B_1 (S_R^2 + \bar{C}_R) / (S_R^2 + 1) \\ R_5 &= B_2 (S_R^2 + 4\bar{C}_R) / (S_R^2 + 4) \\ R_6 &= B_3 (S_R^2 + 9\bar{C}_R) / (S_R^2 + 9) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

である。ただし、球状粒子が静止する状態を考えないこのモデルでは、定常状態のみを考えればよいので、式(12)の定常解を取扱えばよく、第8項は省略される。したがって、無次元平均移動速度は $\bar{U}_t = B_0$ となる。すなわち、これは波の水粒子速度の非周期成分に一致し、質量輸送速度にのみ依存する。

(2) 相対速度の二乗に比例する抗力の場合(2次モデル)

無次元運動方程式は、次式で与えられる。

$$d\bar{U}/d\tau = S_R(\bar{u} - \bar{U})|\bar{u} - \bar{U}| + \bar{C}_R d\bar{u}/d\tau \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 $S_R = S_0/(h/L)$, $S_0 = 3C_D h / \{8\pi d(7/5 \sigma/\rho + C_M)\}$ および $\bar{C}_R = (1 + C_M)/(7/5 \sigma/\rho + C_M)$ である。この式による移動モデルの数値計算は、同様に Runge-Kutta-Gill法により行い、初期条件として $\bar{U}(0) = (1/2)\bar{u}(0)$ を与えた。そして、11波目の計算値を採用したので、 ξ_n および $\bar{U}_t$ には初期値の影響はほとんど問題にならなかった。

2.4 移動限界の考え方

粒子の移動限界が存在する滑動モデルにおいては、粒

子の運動をできるだけ統一的に表示する観点から、前述した粒子の運動方程式によって表示することにする。まず、1次モデルの場合には、式(4)において、 $\bar{U}(\tau_1)=0$ あるいは $\bar{U}(\tau_3)=0$ の条件を代入して、次のつり合い方程式を得られる。

$$S_T \bar{u}(\tau_i) + \bar{C}_M(d\bar{u}/d\tau)|_{\tau=\tau_i} \mp \bar{\mu}_f = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし、複号は $\tau_i=\tau_1$ のとき負、 $\tau_i=\tau_3$ のとき正である。また、式(15)は $0 \leq \tau \leq 2\pi$ の範囲で τ_1 の解(または τ_3)が一般に2つ存在するため、 τ_1 については次の時間ステップ $\tau=\tau_1+\Delta\tau$ において粒子の加速度 $d\bar{U}/d\tau$ が正となるものを、また τ_3 については $\tau=\tau_3+\Delta\tau$ において $d\bar{U}/d\tau$ が負となるものをそれぞれの解とする。なお、 $0 \leq \tau \leq 2\pi$ の範囲で式(15)の解が存在しない場合には、粒子は移動しないと考える。

次に、前進運動の終了時刻 τ_2 (または後退終了時刻 τ_4)の決定は、求めた移動開始時刻 τ_1 (または τ_3)より $\Delta\tau$ づつ時間が経過したときの $\bar{U}$ を式(7)で順次計算していき、 $\bar{U} \leq 0$ (または $\bar{U} \geq 0$)となるとき時刻を $\tau=\tau_2$ (または $\tau=\tau_4$)とする。以上の方法で、 τ_1, τ_2, τ_3 および τ_4 が求められ、そのとき粒子速度は $\bar{U}(\tau_2)=\bar{U}(\tau_4)=0$ となるが、加速度 $d\bar{U}/d\tau=0$ とは限らない。したがって、 $\tau=\tau_2+\Delta\tau$ または $\tau=\tau_4+\Delta\tau$ のとき $\bar{U}(\tau_2+\Delta\tau)=0$ を式(3)に代入し、 $d\bar{U}/d\tau < 0$ (または $d\bar{U}/d\tau > 0$)ならばそのまま静止せず前進運動から後退運動(または後退運動から前進運動)に移行するとし、 $d\bar{U}/d\tau \geq 0$ (または $d\bar{U}/d\tau \leq 0$)ならばそのまま一時静止するとする。

2.5 粒子の移動形態

前述した滑動モデルにおいて、ナイロン球粒子($d=0.32\text{ cm}$ および 0.65 cm)を対象とし、その移動限界時の Reynolds 数 Re より推定した C_D に一致するように K の値を求め、それぞれ $K=90$ および 128 とし、また $C_M=0.5$ を用いた。また、最大静止摩擦係数 μ_f と動摩擦係数 μ_{fD} とは、便宜上同じ値とし、粒子の移動限界時の波特性を用いて、式(15)から推定した値 0.1 を用いることにした。

これらの粒子条件に対して、適当な波条件を与えて、滑動モデルによって粒子の移動を数値計算で求めた。なお、転動モデルの場合についても、波動理論との関係で数値計算した。

(1) 滑動モデル

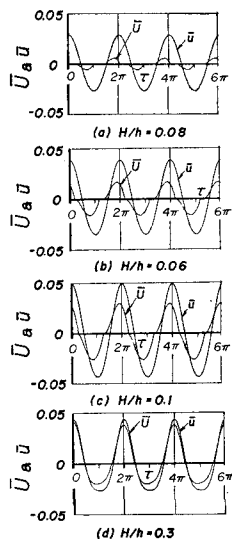


図-1 粒子の移動速度と移動形態(滑動モデル)

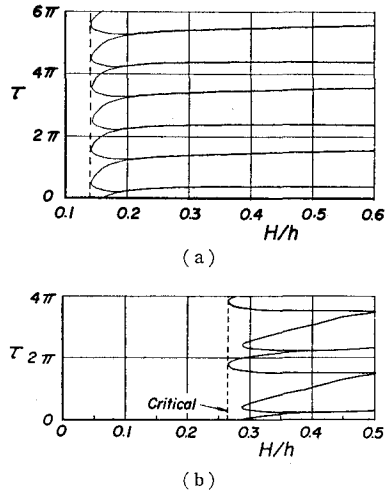


図-2 粒子の移動形態(滑動モデル)

図-1は滑動モデルによる計算結果の1例であり、波高・水深比 H/h による移動形態の変化がわかる。この場合の粒子の滑動・停止に伴う移動形態を図-2(a)に示すが、(b)は波の非線形性が卓越する諸条件による場合である。波高・水深比が小さくなって存在する粒子の移動限界が、1周期前に前者では1つ、後者では2つになることがわかる。これらの特性は、滑動モデルにおいても、1次および2次モデルにより、また波動理論によっても相違するが、次の6つの移動形態が考えられる。

- a) $S \rightarrow F \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S$, b) $S \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow S$
c) $F \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow F$, d) $S \rightarrow F \rightarrow S$,
e) $S \rightarrow B \rightarrow S$, f) $F \rightarrow B \rightarrow F$

ここに、静止(S)、前進(F)および後退(B)であり、それらの粒子の移動状況を図-3に示す。

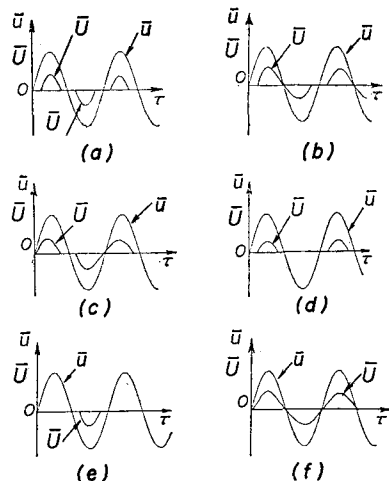


図-3 粒子の移動形態の分類

(2) 転動モデル

この場合には、粒子の移動限界が存在しないので、波

動とともに往復運動をする。

3. 球状粒子の移動機構に関する実験

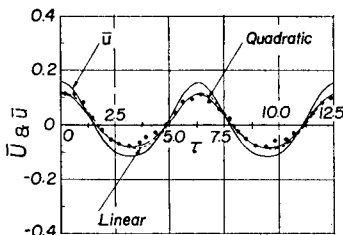
波による球状粒子は、前述したように滑動または転動として規定できるものではなく、おそらく若干転動しながら滑動していると考えられる。しかし、そのような力学的モデルは困難であるので、実際の粒子の移動とこれらのモデル化によって、粒子の平均移動速度がどの程度説明できるかを知るために、次のような実験を行った。

3.1 実験装置および方法

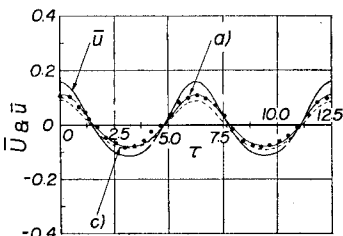
実験には、長さ 19.2m および幅 0.7m の二重床式不規則波浪水槽によって、規則波を用いて行った。球状粒子としては、ナイロン球（比重 1.18 および粒径 0.32, 0.65 cm）を用いて、次のような方法で実施した。造波後、波動場がほぼ定常になってから、水槽中央部に設けたスリット光線の照射部に粒子を投入し、その運動を 16 mm 撮影機で撮影した。この場合、床面条件は滑面（ガラス板）および粗面（粒径 0.20 cm のポリスチレン球状粒子をニスづけした板）とし、さらに波速の定義との関連から、水循環孔を閉じた場合と開いて無限長域の波動場とした場合について行った。この場合、実験波の特性を知るために、容量式波高計によって波形および波速を測定し、同時に質量輸送速度の鉛直分布を測った。

3.2 移動モデルとの比較

まず、粒子の移動速度の時間的変化と滑動モデルによる計算値との比較の一例と図-4に示す。図(a)は土屋らの Stokes 波理論 a) を用いて、1次 (Linear) および2次 (Quadratic) の場合を計算したものであるが、両者は比較的よく一致している。図(b)には、粒径 0.65 cm とし、波動理論の相違による粒子の移動速度の変化



(a) $d=0.32$ cm の場合

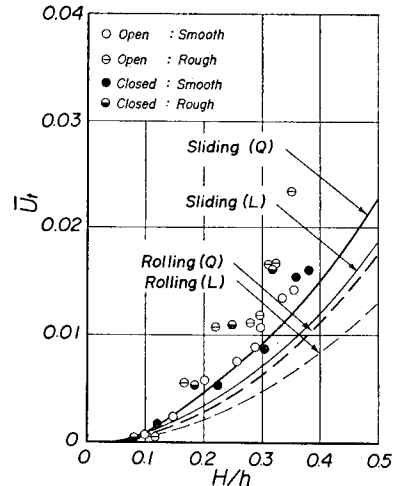


(b) $d=0.65$ cm の場合

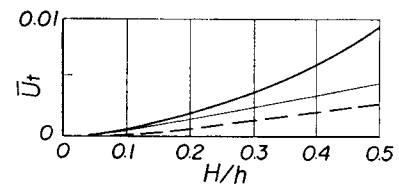
図-4 粒子の移動速度の時間的変化と理論との比較

を示す。それらの相違は明らかではないが、平均移動速度に対しては後述する。

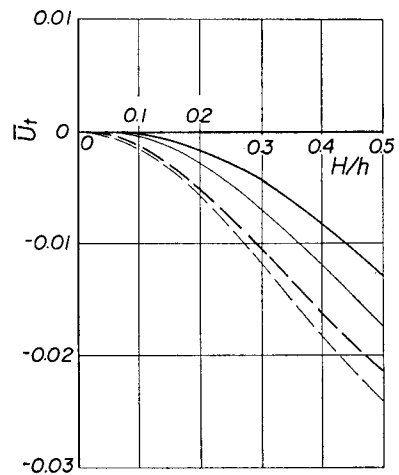
次に、粒子の平均移動速度の実験値と前述した移動モデルによる計算値との比較を図-5 および 6 に示す。図-5 には、各移動モデルについて比較してあるが、まず波理論 a), b) および c) による相違はきわめて大きく、前者では前進運動となるけれど、c) では後退運動が卓越する。1次および2次モデルによる相違はあまり大きくなく、全般的に波理論 a) による計算値に近くなっ



(a) 波理論 a)



(b) 波理論 b)



(c) 波理論 c)

図-5 粒子の平均移動速度と理論との比較 ($d=0.32$ cm の場合)

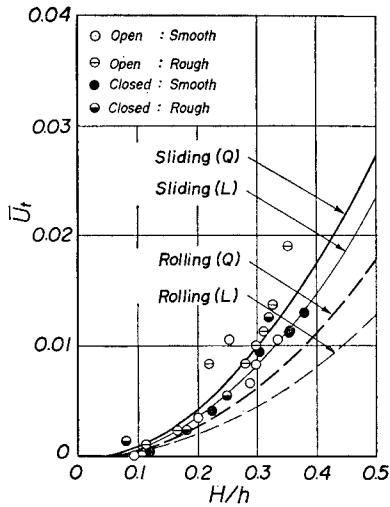


図-6 粒子の平均移動速度と理論の比較
($d=0.65$ cm の場合)

ている。しかし、水循環孔の開閉の影響は明らかでない。これは多分水循環孔を閉じて実験した場合、質量輸送が定常状態にまだ達していなかったためであろう。これらの比較から、この程度の大きさの粒子の場合には、転動より滑動が卓越するようであるが、粒径 0.32 cm の場合、実験値は理論値より若干大きく、粒径 0.65 cm の場合は、2次滑動モデルより若干小さく、2次転動モデルより大きくなっている。前者は、おそらく境界層の影響ではないかと思われる。したがって、境界層厚さよりかなり大きい球状粒子は、波の作用によってわずかに転動し

ながら滑動するものと思われる。粒径が小さくなると、境界層の影響をうけ、Magnus 効果の導入を余儀なくするであろうから、前述した粒子の移動モデルを若干修正する必要がある。

4. 結 語

以上、波による球状粒子の移動に関して、境界層の存在を省略した滑動および転動モデルを試み、波動理論との関係でその移動特性を調べた。その結果、滑動モデルにおいては、移動限界の考え方から粒子の移動形態を明らかにし、また滑動および転動による平均移動速度の表示を与えた。境界層厚さよりかなり大きい粒子は、わずかに転動しながら滑動しており、その特性は著者らの Stokes 波理論を用いた滑動モデルによって実用上表わされる。

最後に、本研究は文部省科学研究費一般研究 (A)、不規則波浪の輸送現象に関する研究による研究成果の一部であることを明記する。

参 考 文 献

- 1) Martin, S. C. et al: Rolling motion of a sphere on a plane boundary in oscillatory flow, J. Fluid Mech., Vol. 76, 1976, pp. 653~674.
- 2) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: A new approach to Stokes wave theory, Bull. DPRI, Kyoto Univ., Vol. 1981, pp. 17~34.
- 3) Al-Taweel, A. M. and J. F. Carley: Dynamics of single spheres in pulsated flowing liquids, Chem. Eng. Prog. Symp., No. 116, 1971, pp. 114~131.